O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů

6. Stereografická projekce

In: Josef Holubář (author): O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. pp. 85–92.

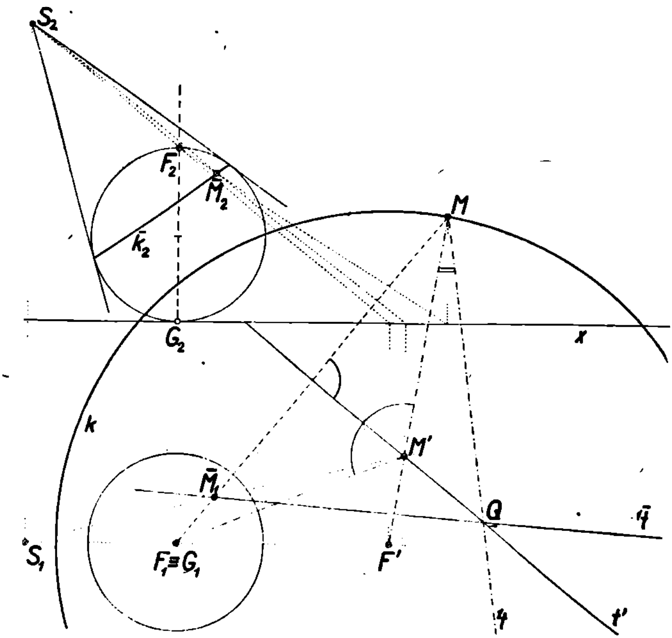
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403217

6. STEREOGRAFICKÁ PROJEKCE

Jiná transformace rovinných útvarů v prostorové útvary, které lze také použíti k řešení planimetrických úloh, je t. zv. stereografická projekce.

Při ní přiřaďujeme k útvarům roviny π útvary kulové plochy $\varkappa$ tím způsobem, že na plochu $\varkappa$ promítáme útvary ležící v π z bodu, zvoleného na ploše $\varkappa$ v jednom krajním bodě jejího průměru, který je kolmý k π.

Zvolíme-li plochu kulovou $\varkappa$ jako na obr. 40 tak, aby se ro-



Obr. 40. Dvě vlastnosti stereografické projekce (důkaz).

viny π dotýkala v bodě G, pak promítáme útvary roviny π na plochu $\varkappa$ z bodu F, který je diametrálně protilehlý k bodu G. Bod M roviny π se promítne na $\varkappa$ do bodu $\overline{M}$, který je druhým společným bodem promítacího paprsku FM s plochou $\varkappa$. Přiřadění bodů roviny π a bodů kulové plochy je vzájemně jednoznačné s výjimkou bodu F na k a úběžných bodů roviny π. Proč?

Stereografické projekce obyčejně používáme k zobrazení útvarů plochy $\varkappa$ v rovině π anebo v rovinách s π rovnoběžných, kdy docházíme v těchto rovinách k obrazům vzájemně homothetickým podle středu F, takže promítáme opačně útvary kulové plochy do roviny π, a mluvíme pak o stereografickém průmětu kulové plochy do roviny. Takové zobrazení je časté v kartografii.[38])

6,1. Vlastnosti stereografické projekce. Všimneme si dvou hlavních vlastností této transformace, a to že při ní přecházejí kružnice roviny π v kružnice kulové plochy $\varkappa$ i naopak a že se jí zachovávají úhly transformovaných křivek a tedy také vzájemný dotyk kružnic. Obě tyto vlastnosti dokážeme ze středového osvětlení kulové plochy,[39]) jako důsledek známé poučky Quetelet-Dandelinovy.

a) Na obr. 40 sestrojíme půdorys i nárys našich útvarů. Na kulové ploše $\varkappa$, která se dotýká π v bodě G, zvolme libovolný bod $\overline{M}$ a jím procházející a na ploše $\varkappa$ ležící kružnici $\overline{k}$, jejíž rovina je kolmá k druhé průmětně. Dále sestrojíme stereografický průmět M bodu $\overline{M}$ z bodu F do průmětny π, t. j. první stopník paprsku $F\overline{M}$, a pak odvodíme stereografický průmět k kružnice $\overline{k}$. Považujme $\overline{k}$ za mez vlastního stínu plochy $\varkappa$ při středovém osvětlení z bodu S a sestrojme tedy bod S jako vrchol kuželové plochy, která se dotýká

[38]) Viz na př. učebnici Dg VI—VII.

[39]) Důkaz podle *K. Pelce* z pojednání Věstníku Král. české společnosti nauk, Praha 1898.

plochy $\varkappa$ podél kružnice $\bar{k}$. Vržené stíny bodů F, G na π, body F', G jsou ohniska kuželosečky, v našem případě elipsy k', meze vrženého stínu plochy $\varkappa$ na π. Jedním bodem elipsy k' je bod M', jakožto vržený stín bodu $\bar{M}$ na π. Tečna t' elipsy k', půlící příslušný úhel průvodičů bodu M', je první stopou tečné roviny kulové plochy v bodě dotyku $\bar{M}$, takže spojnice $G_1\bar{M}_1$, jakožto půdorys poloměru kulové plochy jdoucího bodem $\bar{M}$, je kolmá na přímku t'. Spojnice $F'M'$ je však první stopou roviny $(SF\bar{M})$ a prochází tedy stereografickým průmětem M bodu $\bar{M}$, neboť M je prvním stopníkem přímky $F\bar{M}$. I jest bod M průsečíkem spojnice $G_1\bar{M}_1$ se spojnicí $F'M'$, a proto bodem souměrně sdruženým s ohniskem G_1 elipsy k' podle její tečny t'. Všechny body kružnice $\bar{k}$ promítají se stereograficky do bodů, které vyplňují kružnici k, jakožto geom. místo bodů souměrně sdružených s ohniskem G elipsy k' podle jejích tečen; střed F' kružnice k je v druhém ohnisku této elipsy.

Také naopak: Promítneme-li libovolnou kružnici k danou v π stereograficky z bodu F na plochu $\varkappa$, dostaneme kružnici $\bar{k}$, což potvrdíme tak, že si myslíme promítnuty tři body v π ležící na kružnici k do bodů plochy $\varkappa$. Těmito body na $\varkappa$ jest určena rovina a její řez s plochou $\varkappa$ je kružnice $\bar{k}$, přiřaděná stereograficky ke kružnici k. Platí tedy: *Stereografickým průmětem kružnic $\bar{k}$ plochy kulové*, pokud kružnice neprochází středem projekce, *jest kružnice k*. Vzájemné přiřazení kružnic $k, \bar{k}$ jest jednoznačné. *Středem kružnice k je stereografický průmět vrcholu kuželové plochy, která se dotýká plochy kulové podél kružnice $\bar{k}$*, neboli stereografický průmět pólu roviny kružnice $\bar{k}$. *Poloměr kružnice k*, jak také plyne z našeho důkazu, *rovná se délce hlavní osy kuželosečky, která je středovým průmětem kružnice $\bar{k}$ z vrcholu její dotykové kuželové plochy.*

Jestliže kružnice na kulové ploše prochází středem projekce, pak jest jejím stereografickým průmětem přímka; vždyť také se stává příslušná kuželosečka parabolou.

b) Rovnost úhlů křivek přiřaděných stereografickou projekcí dokážeme z vlastností útvarů na našem obraze takto: Protože jsou délky tečen vedených z bodu M' ke kulové ploše sobě rovny, platí rovnosti: $\overline{M'\overline{M}} = \overline{M'G} = \overline{M'M}$. Můžeme tedy považovati bod M za obraz bodu $\overline{M}$ vzniklý sklopením tečné roviny bodu $\overline{M}$ do π kolem její první stopy t'. Jestliže pak sestrojíme v této rovině v bodě $\overline{M}$ ještě jinou libovolnou tečnu ${}^1\overline{t}$ plochy $\varkappa$, jest jejím sklopeným obrazem přímka ${}^1t$, spojnice QM, při čemž je bod Q na t' prvním stopníkem tečny ${}^1\overline{t}$. Ale přímka ${}^1t$ je také stereografickým průmětem tečny ${}^1\overline{t}$, jako byla přímka MM' stereografickým průmětem tečny $\overline{M}M'$.

Proto *úhel, který svírají tečny kulové plochy v libovolném jejím bodě, a úhel sevřený stereografickým průmětem těchto tečen jsou stejně velké a tím i úhly přiřaděných křivek.*

6,2. Stereografické řešení úlohy Apolloniovy. Jde-li o řešení obecné Apolloniovy úlohy v rovině π pro dané kružnice ${}^ik$, $i = 1, 2, 3$, můžeme převésti tyto kružnice stereografickou projekcí v kružnice ${}^i\overline{k}$ na zvolenou kulovou plochu $\varkappa$. Rozřešíme-li úlohu Apolloniovu na ploše $\varkappa$ pro kružnice ${}^i\overline{k}$, dostaneme stereografickým promítnutím výsledků do π výsledné kružnice pro dané kružnice ${}^ik$.

a) *Konstrukci* lze pak uspořádati takto: Dvěma kružnicemi kulové plochy, na př. ${}^1\overline{k}$, ${}^2\overline{k}$, proložíme dvě kuželové plochy druhého stupně s vrcholy V_{12}, V'_{12}. Každá tečná rovina takové plochy protíná kulovou plochu v kružnici, která se dotýká obou kružnic ${}^1\overline{k}$, ${}^2\overline{k}$. Sestrojíme-li tedy ještě další dvě kuželové plochy, proložené další dvojicí kružnic ${}^1\overline{k}$, ${}^3\overline{k}$, s vrcholy V_{13}, V'_{13}, pak mají na př. kuželové plochy s vrcholy

V_{12}, V_{13} společnou kružnici $^1\overline{k}$, takže lze k nim sestrojiti dvě společné tečné roviny, které již stanoví na kulové ploše dvě kružnice, dotýkající se všech tří kružnic $^i\overline{k}$.

Společné tečné roviny dvojic kuželových ploch V_{12}, V_{13}; V_{12}, V'_{13}; V'_{12}, V_{13} a V'_{12}, V'_{13} poskytnou osm rovin, určujících na kulové ploše osm kružnic, které řeší Apolloniovu úlohu na kulové ploše. Z nich lze potom odvoditi stereograflckým promítnutím osm kružnic v rovině π, které se dotýkají daných kružnic ^ik.

b) Vhodnou volbou kulové plochy $\varkappa$ možno dospěti v π k planimetrickým konstrukcím, které řeší Apolloniovu úlohu pro kružnice ^ik způsobem *Gergonnovým, Gaultierovým* i *Fouchéovým,*[40]) jak ukázal vztahy prostorovými již bývalý profesor karlínské reálky *F. Machovec.*[41])

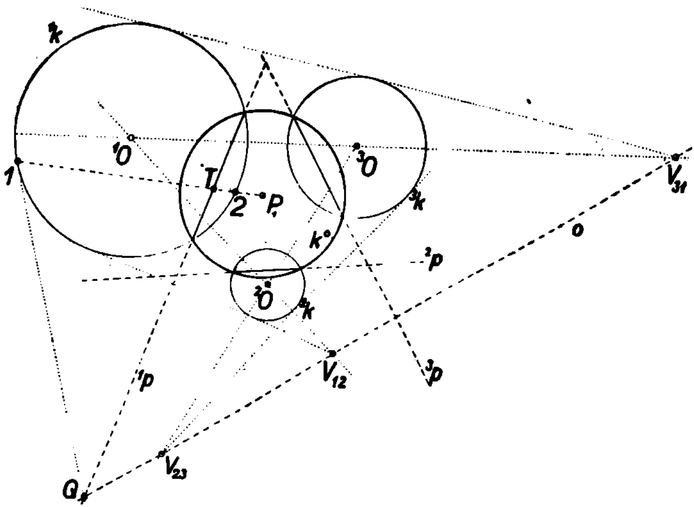
Ukážeme tak aspoň odvození konstrukce Gaultierovy pro kružnice ^ik (obr. 41), k nimž lze sestrojiti reálnou kružnici orthotomickou k_0 (viz M. rov. k., str. 36, obr. 18).

Kružnici k^0 považujme za rovník kulové plochy $\varkappa$ v π a promítněme dané kružnice ^ik na $\varkappa$ do kružnic $^i\overline{k}$ z bodu plochy $\varkappa$, který jest v jejím pólu P. Při této stereografické projekci jsou roviny kružnic $^i\overline{k}$ kolmé k π, protože k_0 protíná kružnice ^ik v pravém úhlu. Proto jsou poláry ^ip středu P_1 kružnice k^0 vzhledem ke kružnicím ^ik půdorysy rovin kružnic $^i\overline{k}$ a vrcholy kuželových ploch proložených dvojicemi těchto kružnic jsou body $V_{12}, \ldots$ atd., které leží po třech na čtyřech přímkách o v rovině π; přímky o jsou totiž osami podobnosti kružnic ^ik, jak lze snadno odvoditi z prostorových vztahů, platných pro kuželové plochy, které mají vždy jednu kružnici $^i\overline{k}$ společnou. (Srovnej též s obr. 11.) Je-li pak na obr. bod Q průsečíkem jedné přímky $o \equiv V_{12}V_{23}V_{31}$ s rovinou kružnice $^1\overline{k}$, tedy v π průsečík o s ^1p, pak tečny z Q ke kružnici

[40]) Viz M. rov. k., kap. 3, odst. B, D, E.

[41]) *F. Machovec*: O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii. Pátá výroční zpráva reálky karlínské 1879.

$^1\overline{k}$ vedené dotýkají se jí v bodech $\overline{1}$, $\overline{2}$, jejichž půdorysy splývají v bodě T. A body *1*, *2*, přiřazené stereografickou projekcí k bodům $\overline{1}$, $\overline{2}$ na spojnici PT a na kružnici ^1k, jsou dotykovými body dvou výsledných kružnic, které se dotýkají kružnice ^1k právě v těchto bodech. Tak lze sestrojiti i dotykové body výsledných kružnic s kružnicemi ^2k, ^3k.



Obr. 41. Stereografický důkaz Gaultierova řešení Apolloniovy úlohy.

Sestrojení bodů *1*, *2* shoduje se úplně s konstrukcí Gaultierovou, protože spojnice PT jest polárou bodu Q vzhledem ke kružnici ^1k, neboť stereografickým průmětem tečen kružnice $^1\overline{k}$, vedených k ní z bodu Q, jsou přímky $Q1$, resp. $Q2$.

Ze srovnání našeho obrazu s obr. 11 poznáváme, že orthogonálním průmětem v π kružnic plochy $\varkappa$, které se dotýkají kružnic ${}^i\bar{k}$, jsou elipsy, které se dotýkají tří přímek ${}^ip$ a kružnice k^0 dvojnásobně. Pro náš případ kružnic ${}^ik$ ukazuje stereografická projekce v rovině π těsnou souvislost úlohy Apolloniovy, řešené pro tyto kružnice, s úlohou o kuželosečkách, které se dvojnásobně dotýkají kružnice k^0.

Poznámka. Myšlenka stereografické projekce kulové plochy vznikla z astronomických potřeb, výhodně zobraziti nebeskou kouli s jejími kružnicemi. Objevuje se již u řeckého astronoma *Hipparcha* (2. stol. př. Kr.). K sestrojení map nebe i země použil jejích vlastností v 2. stol. po Kr. *Ptolemaios* v Alexandrii. Název pochází od francouzských geometrů ze 17. stol. a vědecké zpracování vlastností od slavného *M. Chaslesa* (1793—1880). Soustavně pak se zabýval stereografickou projekcí *W. Fiedler* na curyšské technice.

Zobecnění stereografické projekce dostaneme, nahradíme-li kulovou plochu na př. plochou rotačního elipsoidu. Je obsaženo v této větě: *Elipsy na ploše rotačního elipsoidu promítají se z vrcholu plochy na rovinu kolmou k rotační ose do kružnic.*[42]) Tato věta platí také pro ostatní nepřímkové rotační plochy 2. st., tedy i pro plochu rotačního dvojdílného hyperboloidu a paraboloidu. I vlastnost plochy rotačního paraboloidu, které jsme v kap. 4 využili pro planimetrické konstrukce, jest jen zvláštním případem projekce, při níž je středem promítání úběžný vrchol paraboloidu.

Úloha 57. Řešte zvláštní úlohu Apolloniovu (kBB) stereografickou projekcí a ukažte, že konstrukce je totožná se známou planimetrickou konstrukcí. [Použijte kulové plochy sestrojené nad rovníkem, který prochází danými body a který protíná danou kružnici pravoúhle.]

Úloha 58. Odvoďte planimetrickou konstrukci pro řešení úlohy (kpB) ze stereografické projekce.

Úloha 59. Jakou vlastnost má stereografický průmět hlavních kružnic kulové plochy do roviny jejího rovníku v π? Sestrojte v π svazek kružnic, které jsou stereografickým průmětem hlavních kruž-

[42]) Důkaz viz v odst. 220 Lit. III, díl II; jiný důkaz v Rozhledech matem. přírodov. XII (1933), str. R 76 v článku *J. Roháčka*: Elipsy na nepřímkové ploše rotační 2. st.

nic kulové plochy. Určete pak kružnice této plochy, které mají stereografický průmět v kružnicích protínajících onen svazek pravoúhle.

Úloha 60. V π jsou dány tři kružnice ${}^i k$, $i = 1, 2, 3$, které se navzájem protínají pravoúhle. Sestrojte kružnici, která je kružnicemi ${}^i k$ půlena, použijte ji za rovník kulové plochy $\varkappa$ a odvoďte stereograficky kružnice ${}^i \bar{k}$ na $\varkappa$. V jaké sférické trojúhelníky rozdělí ${}^i \bar{k}$ plochu $\varkappa$? Řešte pro kružnice ${}^i k$ úlohu Apolloniovu prostorovými vztahy.

Úloha 61. Uvnitř dané kružnice k jsou dány tři body; jimi veďte elipsu dvojnásobně se dotýkající k s pomocí stereografické projekce. (Srovnej obr. 8.)

Úloha 62. Pro danou kružnici k a tři její sečny sestrojte elipsu, která se dotýká těchto sečen a kružnice k dvojnásobně užitím stereografické projekce. (Srovnej s obr. 11.)