3. ŘEŠENÍ ÚLOH O KUŽELOSEČKÁCH PROSTOROVÝMI VZTAHY

3,1. Průsečíky kuželoseček, které mají společné ohnisko. K řešení této planimetrické úlohy použijeme rotačního kužele a prostorového vztahu, který je vyjádřen větou, známou ze středoškolských výkladů: Orthogonální průměty kuželoseček, ležících na rotační ploše kuželové, do roviny kolmé k ose kuželové plochy jsou kuželosečky se společným ohniskem v bodě, který je průmětem vrcholu plochy do téže průmětny.[13])

Úlohu rozřešíme tak, že určíme pro dané kuželosečky, třebas jakožto první průměty kuželoseček příslušné kuželové plochy, jejich roviny ϱ a σ, pak vyhledáme průsečnici s obou rovin a potom sestrojíme průsečíky přímky s s kuželovou plochou; první průměty těchto bodů jsou hledané průsečíky. Protože rovina ϱ i σ je danými kuželosečkami určena dvojznačně — druhá rovina ϱ' prvé kuželosečky je s rovinou ϱ souměrná podle roviny τ, která prochází vrcholem kužele rovnoběžně s první průmětnou, a podobně rovina σ' druhé kuželosečky s rovinou σ — stanoví dvojice rovin ϱ', σ svou průsečnicí s' ještě další dva průsečíky daných kuželoseček. Další dvojice rovin neposkytují v prvém průmětě jiných průsečíků, jak vyplývá z uvedené souměrnosti dvojic rovin ϱ, ϱ' a σ, σ' podle roviny τ.

Konstrukci této snadné úlohy přenecháváme čtenáři.

Věty tohoto odstavce můžeme použíti i k řešení jiných úloh o kuželosečkách, na př. máme-li sestrojiti kuželosečku danou ohniskem a dalšími prvky. Hledíme vždy určiti rovinu kuželosečky náležející příslušné kuželové ploše, aby jejím průmětem do roviny kolmé k ose kužele byla hledaná kuželosečka.[14])

[13]) Viz Dg VI—VII, str. 37, 39 a 44.

[14]) Srovnej autorův článek: Sestrojení kuželoseček z ohniska a dalších prvků v Rozhledech mat.-přírodov., 16 (1936—1937), str. 133 a n.

Úloha 11. Sestrojte průsečíky a) dané elipsy a hyperboly; b) dané elipsy (hyperboly) s danou parabolou, mají-li společné ohnisko.

Úloha 12. Sestrojte středovou kuželosečku danou ohniskem a a) třemi jejími body, b) směrem osy a dvěma jejími body.

3,2. Kuželosečky dotýkající se ve dvou bodech. Úlohy, jak sestrojiti kuželosečky, které se dotýkají dvojnásobně jiné dané kuželosečky, mají bezpochyby svůj původ v deskriptivní geometrii.[15]) Lze totiž hledanou kuželosečku považovati za průmět rovinného řezu na ploše druhého stupně, která má danou kuželosečku za obrysovou křivku.

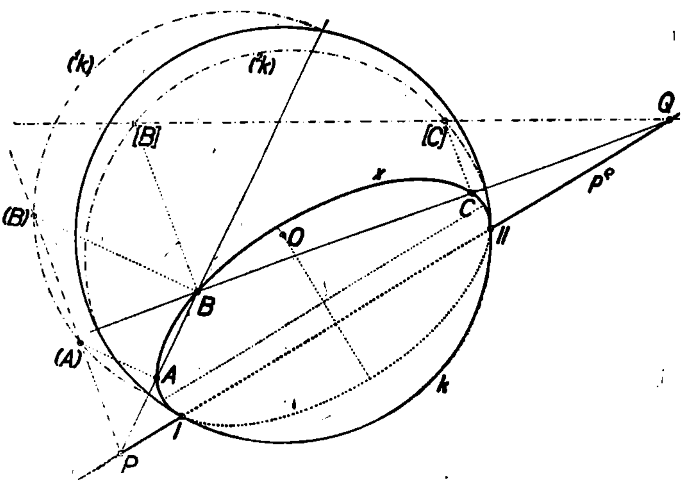
Ukážeme řešení úlohy na případu, když daná kuželosečka je kružnice.

a) Hledejme kuželosečku, která prochází třemi danými body A, B, C a která se dotýká dvojnásobně dané kružnice $k(O, r)$. Nutno rozeznávati se zřetelem k reálnému řešení jen dva případy, a to, že body A, B, C leží buď uvnitř nebo vně kružnice k.

α) Leží-li A, B, C *uvnitř* k, pak považujme k za obrys, třebas první, orthogonálního průmětu plochy kulové a každý bod A, resp. B, resp. C za půdorys dvou bodů, které leží na této ploše a které jsou souměrně sdružené podle roviny π, v níž si myslíme rovník k umístěn (obr. 8). Vedeme-li body A, B promítací rovinu, která protíná kulovou plochu v kružnici ${}^1k$, a sklopíme-li ji do průmětny π i s body A, B, dostaneme ve spojnici sklopených bodů (A), (B), ležících na $({}^1k)$, sklopenou sečnu $(A)(B)$ kulové plochy. Přitom nejprve považujme kóty z_A a z_B za kladné. Průsečík $(A)(B)$ s AB je první stopník P přímky AB. Podobně bod Q je stopník přímky BC (z_C nechť je také kladné) a tedy spojnice PQ první stopou p^ϱ roviny $\varrho \equiv ABC$. Hledaná kuželosečka x sestrojí se pak jako půdorys řezu takto určené roviny ϱ s kulovou plochou. Na obr. je to elipsa dotýkající se k v bodech I, II, v nichž stopa p^ϱ protí-

[15]) Viz pojednání *J. Sobotky*: Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících v Časopise JČMF, XXXII (1903), str. 1 a n.

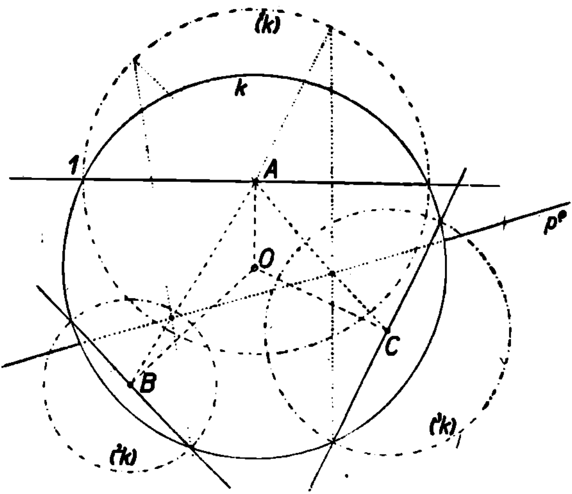
ná k. Při jiné poloze bodů A, B, C mohly by body I, II býti imaginární, elipsa x by ležela celá uvnitř k a dotyk by byl imaginární. V mezním případě by splynuly body I, II ve vrcholu elipsy x a kružnice k by byla pro elipsu x oskulační kružnicí v tomto vrcholu.



Obr. 8. Elipsa určená body A, B, C a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na kulové ploše.

Na obr. jsme předpokládali, že všecky tři body A, B, C jsou na horní polovině kulové plochy, jejich kóty jsme sestrojili vesměs kladné $(+++)$. Jiná skupina znamének těchto kót, a to $(++-)$, $(+-+)$ a $(+--)$ poskytla by další tři elipsy, které řeší úlohu. Skupiny znamének vesměs opačných proti znaménkům uvedených skupin vedly by k týmž elipsám, neboť roviny stanovené těmito opačně označenými skupinami bodů A, B, C jsou souměrně sdružené s oněmi rovinami podle π. Úloha je tedy čtyrznačná.

Jiné uspořádání konstrukce dostaneme, jestliže určíme kóty bodů A, B, C plochy kulové tak, že na př. bodem A vedeme rovinu kolmou k průmětu poloměru OA (obr. 9). Poloměr $\overline{A1}$ kružnice ${}^1k$ ležící v této rovině na ploše kulové je přímo roven kótě z_A. Všimněme si, že je protata sklopená



Obr. 9. Osy elips daných body A, B, C a dotýkajících se dvojnásobně kružnice k.

kružnice $({}^1k)$ rovníkem k diametrálně; podobně i kružnice $({}^2k)$ a $({}^3k)$. Středy podobnosti dvojic kružnic $({}^ik)$, $i = 1, 2, 3$, jsou stopníky přímek AB, BC, CA, jak potvrzuje použití kót bodů A, B, C při hledání těchto stopníků. Proto příslušná osa podobnosti těchto tří kružnic určuje stopu p^ϱ roviny $\varrho \equiv ABC$. Protože p^ϱ určuje směr hlavní osy elipsy x, je kolmice spuštěná s O na p^ϱ druhou její osou. Máme tedy výsledek: Kolmice spuštěné z bodu O k čtyřem osám podobnosti[16]) kružnic (${}^{i}k$) jsou osami výsledných elips.

Úloha 13. Sestrojte elipsu, která prochází dvěma body danými uvnitř dané kružnice, aby tato kružnice byla její kružnicí oskulační ve vrcholu.

Úloha 14. Sestrojte elipsu, která prochází dvěma body danými uvnitř dané kružnice, které se má dvojnásobně dotýkati, je-li dán ještě směr osy elipsy.

Úloha 15. Dvěma body danými uvnitř dané kružnice k proložte elipsu, která se k dvojnásobně dotýká, je-li dán mimo to bod, kterým prochází osa elipsy.

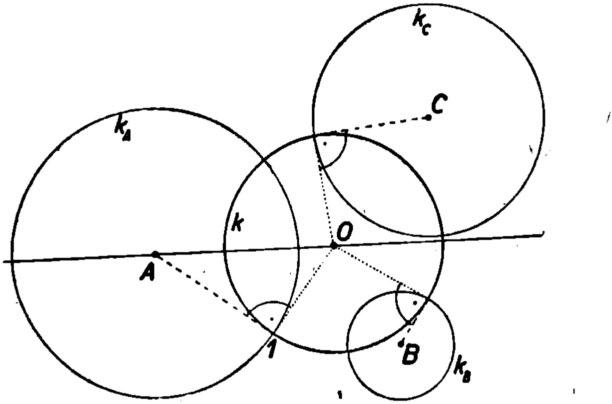
β) Jsou-li dané body A, B, C *vně* dané kružnice $k(O, r)$, považujme k za obrysovou křivku orthogonálního průmětu rotačního jednodílného hyperboloidu $\varkappa$, a to výhodně rovnoosého, jehož osa tedy prochází bodem O a je kolmá k průmětně π, v níž nechť leží rovník (hrdlo) k plochy $\varkappa$ (obr. 10). Body A, B, C jsou půdorysy vždy dvou bodů ležících na $\varkappa$. Jejich kóty z dostaneme tak, že si myslíme, na př. bodem A procházející rovnoosou hyperbolu v promítací rovině proložené OA, t. j. poledník plochy. Označíme-li $\overline{OA} = x$, pak má poledník ve své rovině rovnici $x^2 - z^2 = r^2$. Vedeme-li tedy z A tečnu ke kružnici k, pak její délka $\overline{A1}$ je rovna z_A, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka $OA1$. Kružnice $k_A(A, z_A)$ protíná proto kružnici k orthogonálně, jakož i kružnice $k_B(B, z_B)$ a $k_C(C, z_C)$. Pak jsou stopníky přímek AB, BC a CA středy podobnosti dvojic kružnic $k_{A \dots C}$ a osy podobnosti těchto kružnic jsou stopami čtyř rovin $\varrho \equiv ABC$, jejichž řezy s plochou $\varkappa$ poskytují ve svých půdorysech čtyři výsledné kuželosečky. Platí zde tedy celkem: Kolmice, spuštěné ze středu O dané kružnice k na čtyři osy podobnosti kružnic $k_{A \dots C}$, jsou osami čtyř kuželoseček, které procházejí body A, B, C a které se dvojnásobně dotýkají kružnice k.

[16]) Viz M. rov. k., str. 23. Na obr. 9 je sestrojena pouze jedna osa podobnosti s^{ϱ}, když byla pro kóty z bodů A, B, C zvolena znaménka $(+ - -)$.

Úloha 16. Sestrojte kuželosečku, která prochází dvěma body danými vně dané kružnice, aby byla daná kružnice její oskulační kružnicí ve vrcholu.

Úloha 17. Dvěma body danými vně dané kružnice k veďte kuželosečku, která se k dvojnásobně dotýká a jejíž osa prochází dalším daným bodem.

Úloha 18. Sestrojte kuželosečku, je-li dána středem, délkou jedné poloosy a dvěma body.



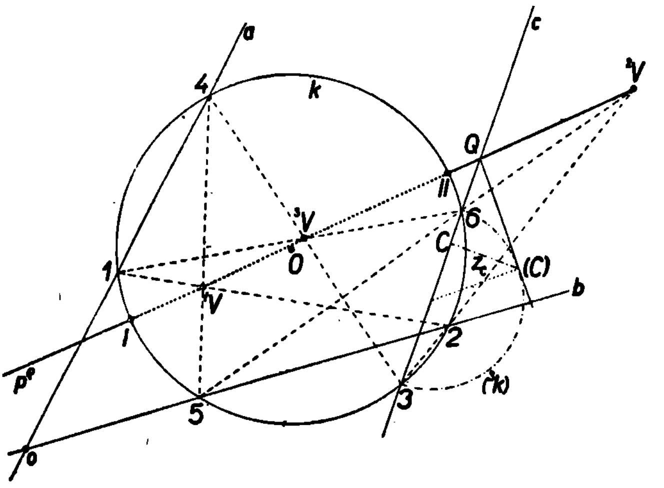
Obr. 10. Určení kuželosečky dané body A, B, C a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na rotačním jednodílném hyperboloidu rovnoosém.

b) Nyní hledejme kuželosečku, která se dotýká tří daných přímek a, b, c a která se dvojnásobně dotýká dané kružnice $k(O)$.

α) Všimněme si nejdříve případu, když jsou přímky a, b, c sečnami kružnice k. Přímka a nechť protíná k (obr. 11) v bodech 1, 4, přímka b v bodech 2, 5 a přímka c v bodech 3, 6. Kružnici k považujme za rovník kulové plochy $\varkappa$, který leží v průmětně π. Myslíme-li si přímkami a, b, c promítací roviny, pak jsou úsečky $\overline{14}$, $\overline{25}$ a $\overline{36}$ průměty tří kružnic ${}^{i}k$ ($i = 1, 2, 3$), které náležejí ploše $\varkappa$. A sestrojíme-li rovinu, která se všech tří kružnic ${}^{i}k$ dotýká, pak průmět řezu této roviny s plochou $\varkappa$ bude elipsa vyhovující naší úloze.

Dvojicemi kružnic ${}^{i}k$ můžeme proložiti vždy dvě kuželové plochy druhého stupně s kruhovými řezy v dvojicích kružnic ${}^{i}k$ (viz úvodní část 1, 2). Tyto kuželové plochy jsou souměrné podle roviny π a jejich vrcholy v π dostaneme jako body ${}^{i}V$ v průsečících spojnic, na př. *12*, *45* atd. Po třech určují Pascalovu přímku příslušného šestiúhelníka *123456*, vepsaného do kružnice k. Na obr. 11 je sestrojena jedna trojice vrcholů ${}^{i}V$ podle schematu, uvedeného v 2,2 a to:

$$\left.\begin{aligned} 12\,.\,45 &\equiv {}^{1}V \\ 23\,.\,56 &\equiv {}^{2}V \\ 34\,.\,61 &\equiv {}^{3}V \end{aligned}\right\} p^{\varrho}.$$



Obr. 11. Určení kuželosečky dané tečnami a, b, c a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na kulové ploše.

Tečná rovina kužele s vrcholem ${}^iV$ a její řez s plochou $\varkappa$ dotýkají se obou kružnic ${}^ik$, které leží na zvoleném kuželi. Proto lze přímkou p^ϱ vésti roviny, a to dvě, souměrně sdružené podle π, které se dotýkají všech tří kružnic ${}^ik$; Pascalova přímka p^ϱ jest jejich společnou stopou. Společný průmět obou řezů, elipsa e, jest tedy jedním řešením naší úlohy. Řešení jest opět několik. (Viz úl. 62 kap. 6.)

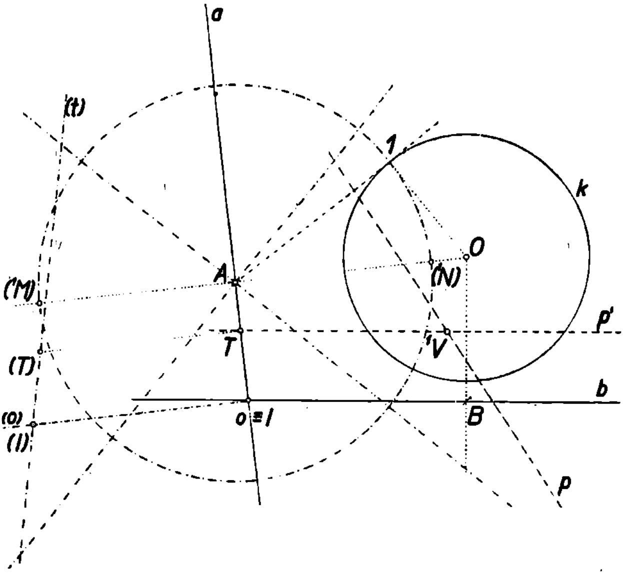
Na obraze je určena jedna rovina ϱ, jdoucí p^ϱ a bodem C, ve kterém se dotýká kružnice ${}^3k$. Kóta $z_C = \overline{C(C)}$.

Úloha 19. Sestrojte elipsu, která se dotýká dvojnásobně dané kružnice k, dvou daných přímek, sečen kružnice k, a která prochází bodem, daným uvnitř k.

Úloha 20. Sestrojte elipsu, která se dotýká dvojnásobně dané kružnice k, jedné její dané sečny a která prochází dvěma body, danými uvnitř k.

β) Jestliže dané přímky a, b, c neprotínají danou kružnici k, zavedeme místo kulové plochy rotační jednodílný rovnoosý hyperboloid $\varkappa$ jako v této kap. sub a), β). Na obr. 12 je sestrojen jen vrchol ${}^1V$ jednoho kužele druhého stupně, proloženého hyperbolami ${}^1k$, ${}^2k$, v nichž protínají promítací roviny přímek a, b plochu $\varkappa$. Tyto hyperboly jsou, jak víme, rovnoosé, se středy A, resp. B, a souměrné podle roviny π. Bod ${}^1V$ sestrojíme jako průsečík dvou přímek p a p'. Jedna přímka je polára p průsečíku o přímek a, b vzhledem ke kružnici k; její použití odůvodníme z předcházejícího obr. 11, kde bod $o \equiv a \,.\, b$ a ${}^1V$ jsou diagonální body čtyrrohu *1425*, tedy polárně sdružené body vzhledem ke kružnici k. V našem případě na obr. 12 jsou vrcholy čtyrrohu sice imaginární, ale polárný vztah bodů o a ${}^1V$ zůstává nezměněn. Druhou přímku p' určíme z kolineárního vztahu hyperboly ${}^1k$ a ${}^2k$, jakožto kuželoseček ležících na kuželové ploše s hledaným vrcholem ${}^1V$. Bod ${}^1V$ jest přitom středem kolineace a průsečnice o rovin hyperbol ${}^1k$, ${}^2k$ je osou kolineace. Opatříme-li si dvojici sdružených bodů v této kolineaci, bude jejich spojnice p' paprsek kolineace a ten půjde hledaným středem kolineace

^1V. Za tím účelem zvolme jednu tečnu hyperboly ^2k, a to její asymptotu m, sestrojme její průsečík s o, samodružný bod I, a jím veďme k hyperbole ^1k tečnu t jako přímku kolineárně sdruženou s m. Tečnu t sestrojíme snadno ve sklopené rovině hyperboly ^1k. Vrcholy (^1M), (^1N) sklopené hyperboly (^1k)



Obr. 12. Vrchol kužele proloženého dvěma hyperbolami na rotačním jednodílném hyperboloidu.

sestrojíme podle odst. a), β); platí $\overline{A(^1M)} = \overline{A(^1N)} = \overline{AI}$, kde $\overline{AI}$ je délka tečny z A vedené ke k. Sklopený bod (I) na (o) je určen svou kótou $z = \overline{IB}$, protože zmíněná asymptota m svírá s π úhel 45°. A bodem (I) vedená tečna (t) k hyperbole (^1k) poskytuje ve svém bodě dotyku (T) již sklopený bod T, kolineárně sdružený s úběžným bodem asymptoty m. Půdorysem bodu T, který leží na a, vedeme tedy přímku p' rovnoběžně s b a tím je bod ${}^1V \equiv p \,.\, p'$ nalezen. Druhá tečna, kterou bychom vedli bodem (T) k hyperbole $({}^1k)$, poskytla by vrchol druhého kužele, proloženého hyperbolami ${}^1k$, ${}^2k$.

Je patrno, že můžeme i v případě sečen a, b, c dané kružnice k, kterým jsme se zabývali sub α), místo kulové plochy použíti rovnoosého hyperboloidu a učiníme tak, jestliže řez s kulovou plochou nevede k reálnému výsledku.

Další použití kuželů, proložených dvojicemi hyperboloických řezů ${}^ik$ jest pro dokončení řešení úlohy stejné jako v odst. α).

Úloha 21. Řešte úlohy 19 a 20 v případě, nejsou-li dané přímky sečnami kružnice k.

c) Úlohy, sestrojiti kuželosečku, která se dvojnásobně dotýká dané elipsy a přitom vyhovuje dalším nutným podmínkám, bylo by možno převésti afinní transformací dané elipsy v kružnici na úlohy, kterými jsme se zabývali v předcházejících odstavcích.

Jinak je v příznivých případech možno hned považovati elipsu za obrysovou křivku průmětu rotačního elipsoidu do roviny, v níž leží jeho osa rotace, t. j. roviny hlavního poledníku, obdobně jako při ploše kulové.[17]) Příznivými případy myslíme ty, když body a řezy elipsoidu, odvozené z daných bodů a tečen, vycházejí reálné.

I když daná kuželosečka je hyperbola nebo parabola, lze si počínati při řešení v takových příznivých případech obdobně.

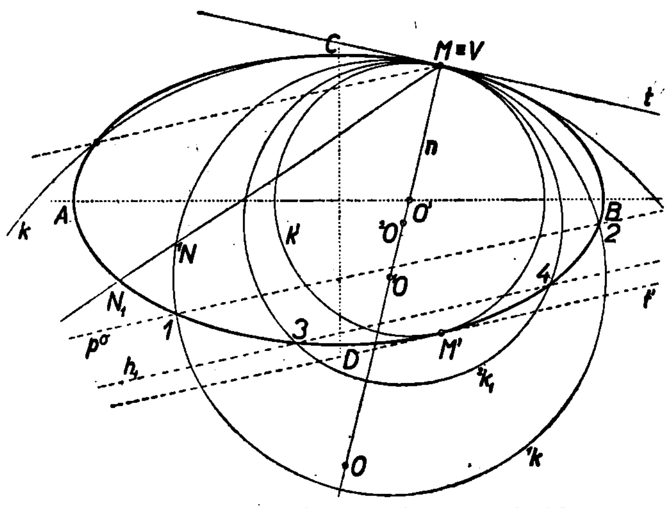
Konečně i tehdy, je-li daná kuželosečka degenerovaná v dvě přímky buď různoběžné nebo rovnoběžné, poslouží k prostorovému řešení příslušných úloh kuželová nebo válcová plocha, považujeme-li dané různoběžky, resp. rovnoběžky, za obrysové přímky průmětu rotačního kužele, resp. válce.

---

[17]) **Viz některé úlohy Lit. III, díl II, odst. 225.**

3,3. Jiné úlohy o kuželosečkách řešené prostorově: a) *Oskulační kružnice.* Z prostorových vztahů můžeme odvoditi i konstrukci oskulační kružnice neboli kružnice křivosti kuželosečky v libovolném jejím bodě.[18])

Mějme dánu elipsu (obr. 13) osami AB, CD, na ní libovolný bod M a v něm tečnu t a normálu n. Opíšeme-li z kteréhokoliv



Obr. 13. Kružnice, které se dotýkají elipsy v bodě M — rovinné řezy na kuželové ploše.

koliv bodu ${}^1O$, zvoleného na n, kružnici ${}^1k$ poloměrem $\overline{{}^1OM}$, dotýká se elipsy v M a protíná ji v dalších dvou bodech *1*, *2*. Považujme ${}^1k$ za podstavu kužele v π, jehož vrchol V má v π průmět $V_1 \equiv M$. Vedeme-li bodem V libovolnou povrchovou přímku kužele, spojnici V s bodem ${}^1N$ kružnice ${}^1k$, pak její průmět protne elipsu v bodě N_1, který je průmětem nějakého

[18]) Viz Lit. II, str. 150.

bodu N na zvolené povrchové přímce. Rovina σ, proložená stopou $p^\sigma \equiv 12$ a bodem N, vytíná na kuželi řez, a to kuželosečku, která je určena body $1, 2, N, M$ a tečnou, v bodě M, jejíž průmět je t. Je proto daná elipsa, obsahující body $1, 2, N_1$ a M s tečnou t, průmětem řezu, způsobeného rovinou σ na našem kuželi. Vedeme-li nyní libovolnou rovinu ϱ, rovnoběžnou s π, protne kuželovou plochu v kružnici ^2k a rovinu σ v hlavní přímce $h \parallel p^\sigma$, na níž leží dva body řezu v σ. Spojnice průsečíků $3, 4$ kružnice $^2k_1$ s danou elipsou, t. j. průmět h_1, je tedy rovnoběžná se spojnicí bodů $1, 2$. Jsou tedy společné sečny všech kružnic ^ik a dané elipsy spolu rovnoběžné. Jako zvláštní případ sečny dostaneme tečnu t' elipsy v bodě M', souměrně sdruženém s M podle osy AB (nebo tečnu t'' v M'', který je s M souměrně sdružený podle CD), zvolíme-li střed příslušné kružnice k' (nebo k'') na ose AB (nebo CD) v bodě O', resp. O''[19]). Úhly tečen t a t' s osou AB jsou si rovny, ale opačného smyslu. Platí tedy celkem věta, a to pro kuželosečku vůbec:

Společné sečny kuželosečky a kružnic, které se kuželosečky dotýkají v daném bodě, jsou vzájemně rovnoběžné a svírají s osou kuželosečky úhly rovné úhlu tečny kuželosečky, sestrojené v daném bodě, *a téže osy, ale opačného smyslu.* Říkáme též krátce, že tyto sečny jsou s tečnou antiparalelní vzhledem k osám kuželosečky.

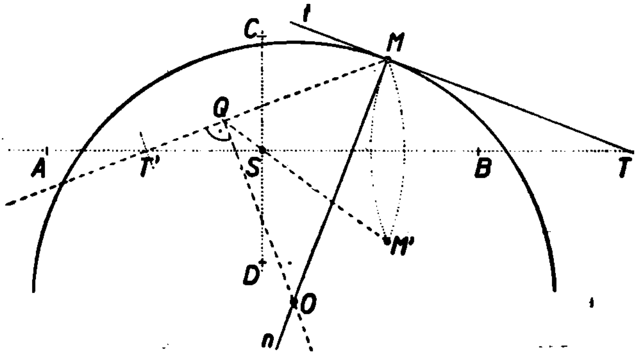
Jestliže v jiném zvláštním případě, a to na obr. 13 pro kružnici k, splyne jeden krajní bod společné tětivy kružnice k a kuželosečky s bodem M, stane se kružnice k oskulační kružnicí kuželosečky v bodě M. Tyto křivky mají v bodě M tři soumezné společné body, t. j. dotyk druhého stupně.

Z odvozených vlastností dostáváme pro elipsu takovouto konstrukci kružnice křivosti v jejím bodě M (obr. 14). Sestrojíme přímku MT', antiparalelní s tečnou t vzhledem k hlavní ose AB elipsy třebas přenesením délky $\overline{MT}$ do po-

---

[19]) Na obr. 13 je sestrojena jen kružnice k'.

lohy MT'. Přímka MT' jest již společnou sečnou kružnice křivosti a elipsy. Sestrojíme-li dále bod M', souměrně sdružený s M podle osy AB, a spojíme-li M' se středem S elipsy, je v elipse tato spojnice sdruženým průměrem k směru sečny MT' (proč?). Protne tedy sečnu MT' v bodě Q, jenž je středem tětivy na ní elipsou vyťaté, kterou není třeba ani omezovati: Kolmice QO k MT' v bodě Q vztyčená určí již na normále n střed křivosti O.



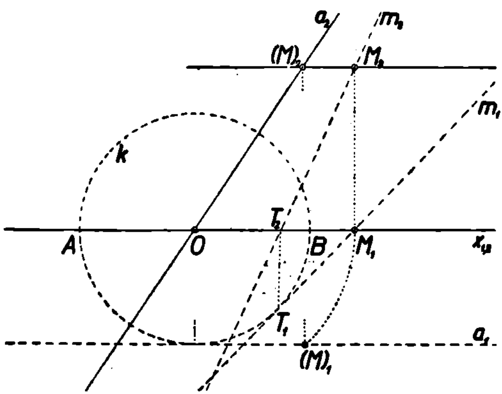
Obr. 14. Kružnice křivosti elipsy v bodě M.

Úloha 22. Sestrojte střed křivosti a) dané hyperboly, b) dané paraboly v jejich libovolném bodě.

b) *Konstrukce o hyperbole.* Všimněme si nyní některých jednoduchých konstrukcí o hyperbole, které lze odvoditi prostorově, považujeme-li danou hyperbolu za obrys průmětu rotačního jednodílného hyperboloidu do ν a kružnici k (obr. 15), opsanou nad hlavní osou AB hyperboly jakožto průměrem, za obrys průmětu téže plochy do π, k níž je tedy osa hyperboloidu kolmá.[20])

[20]) Viz článek *V. Hübnera* v Příloze k Časopisu JČMF, XXXII (1903), str. 259. Také v učebnici Dg VI—VII jsou odvozeny prostorově některé konstrukce hyperboly na str. 45 a n.

α) Hyperbola je dána hlavní osou AB a bodem. Máme sestrojiti asymptoty hyperboly. V ose AB (obr. 15) volme osu $x_{1,2}$ sdružených průmětů, prvního a druhého, a daný bod hyperboly označme M_2, jakožto nárys bodu na hlavním poledníku hyperboloidu. Sestrojme půdorys M_1 na x_{12} a mysleme si tečnu m_1, vedenou z M_1 ke k, která je půdorysem jedné přímky hyperboloidu, procházející na ploše bodem M. Oto-



Obr. 15. Určení hyperboly dané hlavní osou AB a bodem M_2.

číme-li m_1 (a není ani třeba m_1 rýsovati) do polohy a_1, rovnoběžné s x_{12}, a bod M_1 do polohy $(M)_1$ na a_1, pak nárys a_2 přímky a hyperboloidu poskytne jednu asymptotu druhého obrysu hyperboloidu a tedy i asymptotu dané hyperboly. Sestrojíme proto $(M)_2$ na rovnoběžce s x_{12} vedené bodem M_2 a spojnice $O(M)_2$ jest asymptota a_2.

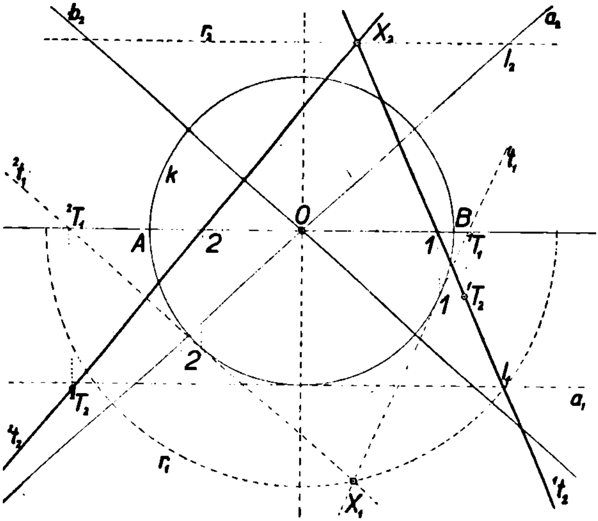
Jestliže jsme sestrojili m_1, pak nárys m_2 přímky m je tečna dané hyperboly v bodě M_2. Určíme ji s pomocí bodu T_2 na x_{12}, který je nárysem bodu T, společného přímce m a hrdlu k.

Úloha 23. Hyperbola je dána hlavní osou a tečnou. Sestrojte s pomocí rotačního hyperboloidu její asymptoty.

Úloha 24. Hyperbola je dána asymptotami a bodem. Sestrojte podobným způsobem její hlavní osu.

β) Hyperbola je dána hlavní osou a asymptotou; máme vésti k hyperbole tečny daným bodem. Nad hlavní osou AB opišme opět kružnici k a považujme ji zase za půdorys hrdla rotačního hyperboloidu; dané asymptoty označme a_2, b_2, jakožto nárysy obrysových přímek asymptotického kužele a daný bod X_2, jako nárys bodu X, který leží na hyperboloidu (obr. 16). Hledané tečny jsou pak nárysy dvou přímek plochy, které procházejí bodem X.

Nejprve sestrojíme půdorys X_1 bodu X na půdorysu r_1 rovnoběžky r, vedené na ploše bodem X. Jeden bod rovno-



Obr. 16. Tečny sestrojené k hyperbole z bodu X_2.

běžky r na přímce a je bod I. Sestrojíme tedy nejdříve a_1 jako tečnu hrdla rovnoběžnou s x_{12} a na ní půdorys I_1, čímž je $r_1(O; \overline{OI_1})$ určeno. Z půdorysu X_1, který stačí určiti na r_1 jednoznačně, vedeme tečny ${}^1t_1 \equiv X_1 1$, ${}^2t_1 \equiv X_1 2$ k hrdlu a to jsou půdorysy přímek plochy, které procházejí bodem X. Jejich nárysy ${}^1t_2$, ${}^2t_2$, určené s pomocí bodů 1, resp. 2, jsou hledané tečny. Na obr. jsou doplněny i jejich body dotyku ${}^1T_2$, ${}^2T_2$.

Úloha 25. K hyperbole dané hlavní osou a asymptotami sestrojte tečny rovnoběžné s danou přímkou. [Použijte vlastnosti, že přímky hyperboloidu jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami jeho asymptotického kužele.]