O nekonečných řadách

Historický přehled

In: Jan Vyšín (author): O nekonečných řadách. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
pp. 105–[108].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403205

HISTORICKÝ PŘEHLED

Jisté náznaky nekonečných řad se vyskytují sice už ve starověku, na př. u *Archimeda*, ale teprve v 2. polovině 17. století se objevují nekonečné řady jako nový matematický prostředek, kterého se užívá cílevědomě k řešení úloh. Mezi prvními byli *Mercator* a *Brouncker*, kteří objevili při provádění kvadratury hyperboly r. 1668 logaritmickou řadu. Rok poté *Newton* ve spise „De analysi per equationes numero terminorum infinitas" položil první základy teorie řad.

Její rozvoj pak úzce souvisí s rozvojem počtu infinitesimálního, který v té době objevili *Newton* a *Leibniz*. Newton je autorem binomické řady (1676), Leibniz se zabýval řadami alternujícími (viz kriterium, věta 1,23); jemu byla známa formule, po něm nazvaná:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

plynoucí jinak z pozdějšího *Gregory*-ova rozvoje funkce arctg x.

Celé 18. století bylo horlivě pěstováno praktické počítání s řadami, ale teorie, zejména otázky konvergence, divergence a dovolených výkonů s řadami byly zanedbávány. Přesto přineslo toto období mnoho výsledků trvalé vědecké ceny. R. 1715 uveřejnil *Brook Taylor* svůj rozvoj. Bratři *Jean* a *Jacques Bernoulli*-ové a jejich přítel, vynikající matematik *Leonhard Euler*, pracovali vydatně v oboru nekonečných řad. Euler se zabýval zvláště rozvojem funkce e^x a odvozených funkcí. Přitom jeho způsob dokazování — jako ostatně i jinde — nevynikal přesností: na konvergenci a divergenci řad se vůbec neohlížel. Tak na př. užíval „rovnice":

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

kterou „odvodil“ z rozvoje:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

dosazením $x = -1$.

Na součet nekonečné řady se tehdy hledělo jako na skutečný součet: pojmy absolutní konvergence, přerovnávání řad a věty z nich plynoucí byly neznámy. Proto stáli tehdejší matematikové bezradně před „paradoxem“, kterým pro ně byla skutečnost, že z konvergentní řady

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

vzniká při jiném uspořádání závorek opět konvergentní řada s jiným součtem

$$1 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots.$$

Za takových poměrů se ovšem mohl vyskytnouti jakýsi *Grandi*, který v této „rovnici“ viděl mystiku — matematický důkaz stvoření světa z ničeho.

Na uvedeném příkladě je viděti, v jakém desolátním stavu byla teorie řad. I po Eulerovi mnozí vynikající matematikové užívali s úplnou samozřejmostí divergentních řad při svých důkazech a toto své stanovisko dokonce obhajovali tím (*Lagrange*), že „kdyby na př. nebylo dovoleno vždy (i v případě divergence) dosaditi za řadu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots.$$

výraz $\dfrac{1}{1-x}$, bylo by otřeseno principy analyse“. Jen matematický instinkt uchránil většinu tehdejších matematiků před hrubšími chybami ve výsledcích.

Toto řádění zastavil teprve slavný francouzský matematik *Cauchy*, který postavil teorii řad na pevné a přesné základy. Učinil tak svými přednáškami a zejména svým spisem „Analyse algébrique“ (1821). Cauchy-ův zásah byl tak pronikavý, že znepokojil všechny matematiky, kteří užívali řad k svým výpočtům. Vypráví se, že známý francouzský učenec *Laplace*, vyslechnuv přednášku Cauchyovu, spěchal domů, aby přezkoušel konvergenci řad ve svém spise „Mécanique céleste“.

Cauchy také uvedl na pravou míru používání Taylorovy řady. Ukázal na příkladě funkce

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

že k tomu, aby platil rozvoj

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

nestačí, aby funkce $f(x)$ měla všechny derivace, ale že je nutné, aby t. zv. zbytek, který lze vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad 0 \leqq \xi \leqq x,$$

konvergoval s rostoucím n k nule. — Cauchy formuloval obecné kriterium konvergence, objevené již r. 1817 *Bolzanem*. Jak nasvědčují názvy četných vět, jsou dílem Cauchyovým různá kriteria konvergence, řešení otázky konvergenčního oboru potenčních řad a j.

Vedle Cauchyho se zasloužil o položení přesných základů teorie řad hlavně norský matematik *Niels Henrik Abel* svou prací o binomické řadě (1826). Ovšem i jiná jména jsou spjata s vývojem teorie řad v první polovině 19. století: jsou to na př. *Gauss*, *Fourier*, *Dirichlet* a j. — Dalšího prohloubení se dostalo teorii řad v druhé polovině 19. století přesným definováním iracionálních čísel (*Dedekind*).

V novější době se obrací zřetel matematiků opět k divergentním řadám a k rozšíření pojmu konvergence. Vysvětlit podstatu věci není však v možnostech této příručky. — Celkem lze říci, že teorie řad tvoří dnes ucelenou část t. zv. algebraické analyse a je v matematice mocným a přesně fungujícím nástrojem.

LITERATURA

Poučení o pojmu a vlastnostech funkcí, derivacích a rozvoji funkcí v řadu najde čtenář v podrobné učebnici *V. Jarník*: Úvod do počtu diferenciálního, která vyšla v r. 1946 a navazuje na starší knihu *M. Kösslera*: Úvod do počtu diferenciálního, která vyšla r. 1926 ve sbírce Kruh. Speciálně o funkcích exponenciální, logaritmické a goniometrických pojednává knížka *E. Čecha*: Elementární funkce (táž sbírka 1944). V těchto učebnicích jsou i odstavce věnované reálným číslům, posloupnostem a řadám.

Systematicky a důkladně je zpracována theorie posloupností a nekonečných řad (i součinů) v knize *K. Knopp*: Theorie u. Anwendung der unendlichen Reihen (2. nebo 3. vydání). Zde najde čtenář zejména důkazy vět, které v této příručce nejsou provedeny, a hojnost příkladů.