O nekonečných řadách

2. část: O potenčních řadách

In: Jan Vyšín (author): O nekonečných řadách. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. pp. 65–104.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403204

2. ČÁST

O POTENČNÍCH ŘADÁCH

2,1. Pojem potenční řady. Geometrická řada

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{1}$$

konverguje — jak je známo — pro každé číslo x, pro které platí $|x| < 1$, diverguje, je-li $|x| \geqq 1$. Obecné číslo, které může nabývati různých hodnot, se nazývá v matematice (veličina) *proměnná*, číslo, které má určitou jedinou hodnotu, se nazývá *veličina stálá* čili *konstanta*. Je tedy řada (1) řada s proměnnými členy a protože členy jsou tvořeny mocninami (potencemi) proměnné x, jmenuje se *řada potenční*. Tato řada konverguje uvnitř intervalu $(-1, +1)$, diverguje vně tohoto intervalu a v jeho krajních bodech $(x = \pm 1)$.

Obecně dostaneme **potenční řadu**, znásobíme-li mocniny proměnné x konstantními koeficienty a z těchto součinů utvoříme řadu:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Řady, o kterých bylo pojednáno v I. části, jejichž členy nejsou proměnné, nazýváme pro odlišení *řady s konstantními členy*. Z řady potenční se stává řada s konstantními členy, dosadíme-li za x určité číslo.

Otázka po konvergenci potenčních řad se vysloví takto: pro které hodnoty proměnné x řada (2) konverguje a pro které diverguje? Souhrn všech čísel x, pro která řada (2) konverguje, nazývá se jejím **konvergenčním oborem**. — Řada (1) má tedy konvergenční obor interval $(-1, +1)$.

Každé hodnotě x z konvergenčního oboru řady (2) přísluší jisté číslo — součet řady pro toto x. Je-li každé hodnotě proměnné x z jistého oboru přiřaděno jediné číslo, říkáme, že je tím definována *funkce proměnné x*; přiřaděné hodnoty nazýváme funkčními hodnotami. Označíme-li funkční hodnoty jedinou proměnnou veličinou y, píšeme funkční vztah symbolicky:

$$y = f(x), \tag{3}$$

t. j. „proměnná y je funkcí proměnné x". *Je tedy součet potenční řady funkcí proměnné x v konvergenčním oboru.* Geometrickým znázorněním funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic $(x; y)$ je zpravidla křivka.

U geometrické řady (1) dovedeme součet řady vyjádřit zlomkem $\frac{1}{1-x}$. Rovnice (3) zní o tomto konkrétním případě

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Připomínám: Rovnice

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

platí jen pro x z intervalu $(-1, +1)$. Pro jiná x řada na pravé straně nekonverguje a vztah tedy pozbývá významu.

Součet potenční řady nelze vždycky vyjádřiti v tak jednoduchém tvaru jako u řady (1). Naopak, často je potenční řada nejjednodušším vyjádřením funkce, která je jejím součtem definována. V tom je význam potenčních řad, jak ukáži později na různých příkladech.

Podrobnější poučení o pojmu a vlastnostech funkce, se kterými se budeme často setkávati, najde čtenář na př. v uvedených učebnicích diferenciálního počtu.

Příklady. 2,1. Nejjednodušší druh funkcí jsou t. zv. polynomy — mnohočleny v proměnné x:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Jsou to vlastně potenční řady, kde $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Potenční řada je rozšíření pojmu mnohočlen „na nekonečný počet členů" právě tak, jako řada s konstantními členy byla podobným rozšířením pojmu algebraický součet.

2,2. Řada

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

t. j. $a_n = \begin{cases} 0, \text{ je-li } n \text{ liché} \\ 1, \text{ je-li } n \text{ sudé} \end{cases}$, má týž obor konvergence jako řada (1), totiž interval $(-1, +1)$. Proč? Její součet je $\dfrac{1}{1 - x^2}$.

2,3. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

konverguje podle podílového kriteria (viz část 1.) pro každé x. Její obor konvergence označíme $(-\infty, \infty)$. Její součet je, jak ukáži později, e^x, kde $e = 2{,}71828\ldots$.

2,4. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$$

diverguje podle podílového kriteria, je-li $x \neq 0$. Konverguje tedy jedině pro $x = 0$.

2,2. Konvergenční obor potenčních řad. Uvedené příklady ukazují, že jsou potenční řady, které konvergují pro každé x (př. 2,3); takovým říkáme řady *všude konvergentní*. Jiné potenční řady konvergují jen pro $x = 0$ (př. 2,4); takové se nazývají řady *všude divergentní*. Konečně jsou řady, které konvergují pro všechna čísla x z jistého intervalu a divergují pro všechna x vně tohoto intervalu; na př. geometrická řada má konvergentní interval $(-1, +1)$. Tyto tři příklady vyčerpávají všechny možnosti. Platí totiž:

(**V. 2,1**). *Potenční řada je buď všude divergentní nebo všude konvergentní nebo existuje kladné číslo r takové, že řada konverguje absolutně pro všechna čísla x, pro něž platí $|x| < r$ a diverguje pro všechna x, pro něž $|x| > r$. Jinak řečeno: interval $(-r, +r)$ je konvergenční obor potenční řady. Krajní body tohoto intervalu ($x = \pm r$) mohou, ale nemusí náležet konvergenčnímu oboru. Číslo r se nazývá poloměrem konvergence.**)

Důkaz této věty je typický existenční důkaz analyse a protože je zcela jednoduchý, uvedu postup. Nejprve dokážeme, že platí pomocná věta:

Konverguje-li potenční řada pro jisté číslo $x_1 \neq 0$ konverguje absolutně pro každé x, pro které platí $|x| < |x_1|$. Diverguje-li potenční řada pro jisté číslo x_2, diverguje také pro každé x, pro které platí $|x| > |x_2|$.

Uvažte, co je obsahem věty, znázorníte-li čísla x na ose číselné! — První část pomocné věty plyne snadno. Řada $\Sigma a_n x_1^n$ konverguje, posloupnost $\{a_n x_1^n\}$ je tedy ohraničená (odst. 1,8), t. j.

$$|a_n x_1^n| < K, \quad p. v. n.$$

Dále platí:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Řada $\Sigma |a_n| \cdot |x|^n$ má tedy konvergentní majorantu — geometrickou řadu $\Sigma K \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$; tím je tvrzení dokázáno.

Druhá část pomocné věty plyne nepřímo: kdyby řada konvergovala pro některé x, pro něž $|x| > |x_2|$, konvergovala by podle první části také pro x_2, což je proti předpokladu.

Dejme tomu, že řada konverguje na př. pro $x_1 = -0{,}562$,

*) Název *poloměr* je převzat od řad s komplexními členy, kde toto číslo r je skutečně poloměrem kružnice, ohraničující konvergenční obor.

diverguje pro $x_2 = 0{,}573$.*) Podle pomocné věty řada konverguje pro $x = 0{,}56$ a diverguje pro $x = 0{,}58$. Pro $x = 0{,}57$ může buď konvergovati nebo divergovati; dejme tomu, že diverguje. Mezi čísly

$$0{,}560;\ 0{,}561;\ 0{,}562;\ \ldots;\ 0{,}570$$

najdeme dvě sousední taková, aby pro menší z nich řada konvergovala, pro větší divergovala. Buďte to na př. 0,566; 0,567. Mezi čísly

$$0{,}5660;\ 0{,}5661;\ 0{,}5662;\ \ldots;\ 0{,}5670$$

najdeme opět dvě sousední téže vlastnosti, a tak pokračuieme. Tímto postupem určujeme — jako limitu posloupnost- — jisté reálné číslo:

$$r = 0{,}566\ldots,$$

které má zřejmě vlastnosti poloměru konvergence. Takovým postupem lze v každém případě nalézti číslo $r > 0$ a tím je věta 2,1 dokázána.

Pro jednotnost pravíme, že řada všude konvergentní má poloměr konvergence $r = \infty$, řada všude divergentní $r = 0$.

O chování řady v krajních bodech konvergenčního intervalu nelze obecně rozhodnouti. Uvidíte později na příkladech, že řada může konvergovati v jednom či v obou krajních bodech, ale tato konvergence nemusí být absolutní, jako je tomu *uvnitř* konvergenčního intervalu.

Absolutní konvergence řady *uvnitř* konvergenčního intervalu je velmi důležitá; dovoluje nám totiž použíti pro potenční řady všech vět o absolutně konvergentních řadách, zejména vět o násobení a přerovnávání řad. (Část 1.)

Poloměr konvergence potenční řady závisí na koeficientech a_n a lze ho z nich přímo určiti. Francouzský matematik Cauchy odvodil takový vzorec pro poloměr konvergence; tento vzorec však vyžaduje hlubší znalosti limitních pojmů, proto ho neuvádím.

*) Takové hodnoty x_1, x_2 lze vždy najít u řady, která není všude konvergentní.

Cvičení 2,1. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

má poloměr konvergence $r = 1$ a vyšetřete její chování pro $x = \pm 1$.

2,2. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

resp. řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

má poloměr konvergence $r = 1$ a vyšetřte chování obou řad v krajních bodech konvergenčního intervalu.

2,3. Jaké jsou poloměry konvergence řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Návod: Použijte Leibnizova kriteria pro alternující řady a skutečnosti, že $\frac{x^n}{n!} \to 0$ pro $n \to \infty$ (viz př. 2,3).

2,4. Jaký je poloměr konvergence potenční řady z příkladu 2,1?

2,5. Jaký poloměr konvergence má řada:

$$1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots.$$

Návod: Vyjádřete obecný člen a použijte podílového kriteria; vyjde $r = 1$.

2.3. Rozvinutí racionální funkce v potenční řadu. Mezi nejjednodušší funkce patří t. zv. *funkce racionální*: předně to jsou *celistvé* racionální funkce, t. j. mnohočleny v proměnné x, libovolného stupně:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Je-li $n = 0$, je funkce konstanta, t. j. všem hodnotám proměnné x odpovídá stejná funkční hodnota a_0.

Lomená racionální funkce je podíl dvou polynomů:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}.$$

Funkční hodnoty lomené rac. funkce $\frac{1}{1 - x}$ jsou v intervalu $(-1, 1)$ vyjádřeny jako součty nekonečné řady potenční (geometrické). Ukáži postup, jak lze funkční hodnoty *libovolné* rac. funkce vyjádřiti součty potenční řady — ovšem jen v jistém oboru proměnné x. Takovému vyjádření říkáme **rozvinutí funkce v potenční řadu.**

Zvolíme nejprve funkci, jejíž čitatel je konstanta 1, na př.

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x - 3x^2}.$$

Položíme

$$x_1 = 2x + 3x^2 \tag{4}$$

a funkci $\frac{1}{1 - x_1}$ rozvineme v potenční řadu podle proměnné x_1:

$$\frac{1}{1 - x_1} = 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \ldots \tag{5}$$

Rozvedeme-li mocniny proměnné x_1, t. j. dvojčlenu (4) podle binomické věty, dostaneme soustavu nekonečně mnoha konečných (a tedy absolutně konvergentních) řad:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
x_1 &= 2x + 3x^2 \\
x_1^2 &= \phantom{2x + {}} 4x^2 + 12x^3 + 9x^4 \\
x_1^3 &= \phantom{2x + 4x^2 + {}} 8x^3 + 36x^4 + \ldots \\
x_1^4 &= \phantom{2x + 4x^2 + 8x^3 + {}} 16x^4 \ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Součty absolutních hodnot členů těchto řad tvoří podle (5) řadu, která také absolutně konverguje, je-li $x > 0$ zvoleno tak, aby $|x_1| < 1$. Podle přerovnávací věty (část 1) lze tedy řady (6) „sečísti po sloupcích“, t. j. řadu (5) uspořádati podle stoupajícího exponentu u mocnin proměnné x. Vyjde:

$$\frac{1}{1-2x-3x^2} = 1 + 2x + 7x^2 + 20x^3 + \overset{61}{\cancel{45}}x^4 + \dots .$$

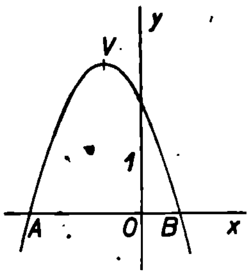
Tato řada konverguje pro $x > 0$, je-li $|x_1| < 1$, diverguje, je-li $|x_1| > 1$. Zjistíme, pro která x jsou tyto nerovnosti splněny. První nerovnost znamená:

$$-1 < +2x + 3x^2 < 1.$$

Odečtením od jedné dostaneme

$$0 < 1 - 2x - 3x^2 < 2. \qquad (7)$$

Znázorníme graficky průběh funkce $y = 1 - 2x - 3x^2$ (obr. 12).



Obr. 12.

Příslušná parabola protíná osu x v bodech A, B a její vrchol, t. j. bod který přísluší největší funkční hodnotě, má souřadnice $V(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$. Nerovnost (7) je splněna pro všecka x, kterým odpovídají body paraboly *nad* osou x. Poloměr konvergence je tedy $r = \frac{1}{3}$.

Podobným postupem lze rozvinouti v potenční řadu racionální funkci

$$f(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}, \qquad (8)$$

kde $a_0 \neq 0$. Upravíme ji

$$f(x) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{a_1}{a_0}x - \frac{a_2}{a_0}x^2 - \dots - \frac{a_n}{a_0}x^n\right)}$$

a položíme $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}x - \dots - \frac{a_n}{a_0}x^n$. Není-li splněn předpoklad $a_0 \neq 0$, provádí se rozvinutí v složitější potenční řadu, která nepostupuje v mocninách proměnné x, ale v mocninách dvojčlenu, na př. $x - 1$.

Povšimněte si v uvedeném příkladě, že poloměr konvergence potenční řady je menší z absolutních hodnot obou kořenů rovnice

$$1 - 2x - 3x^2 = 0,$$

totiž $\frac{1}{3}$. To je zvláštní případ obecného pravidla pro odhad poloměru konvergence při rozvinutí funkce (8): *Má-li rovnice*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

reálné kořeny, nemůže poloměr konvergence potenční řady při rozvinutí funkce (8) *přesáhnouti nejmenší z absolutních hodnot těchto kořenů.*

K rozvinutí lomené racionální funkce je možno dojíti i jinou cestou — dělením mnohočlenem — jak ukáži později.

Cvičení 2,6. Rozviňte funkci $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x^3}$ v potenční řadu! Určete první 4 členy a poloměr konvergence!

2,7. Rozviňte funkci $\dfrac{1}{2 - x + x^3}$ v potenční řadu! Najděte okolí bodu O, ve kterém řada konverguje.

2,4. Slučování a násobení potenčních řad. Na potenční řady se samočinně přenáší věta o slučování nekonečných řad.

(V. 2,2.) *Potenční řady lze sečísti* (*odečísti*) *„člen po členu“; výsledná řada je opět potenční; její poloměr konvergence neklesne pod menší z poloměrů konvergence obou řad. Rovnicí:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n.$$

Tato věta nám dovoluje tvořiti z rozvojů dvou funkcí rozvoj funkce součtové.

Příklad 2,5. Platí rovnice:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Z rozvojů

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}\right\} |x| < 1$$

dostaneme sečtením:

$$\frac{2}{1-x^2} = 2(1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

(srovnej s příkladem 2,2.)

Cvičení 2,8. Z rovnice

$$\frac{1}{6 - 5x + x^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

odvoďte rozvoj funkce $\frac{1}{6 - 5x + x^2}$. Obor konvergence!

2,9. Stejná úloha pro funkci

$$\frac{1}{6 - 5x - 2x^2 + x^3} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Rozklady lomených funkcí ve cvičeních 2,8, 2,9 lze provésti na př. metodou neurčitých koeficientů. Správnost rozkladů si čtenář snadno sám ověří.

Násobení potenční řady konstantním koeficientem se provádí člen po členu jako u řad s konstantními členy. Pro násobení dvou potenčních řad je důležité, že tyto řady konvergují ve svých konvergenčních oborech absolutně. Součinovou řadu lze tedy srovnati podle mocnin x (část 1) a výsledek je opět potenční řada. Platí tedy:

(V. 2,3.) *Součinová řada dvou potenčních řad je potenční řada; její poloměr konvergence neklesne pod menší z poloměrů konvergence obou řad.*

Příklad 2,6. Protože polynom je potenční řada (srovnej př. 2,1), dovedeme podle věty 2,3 a postupu odst. 2,3 rozvinouti obecnou racionální funkci v potenční řadu. Rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{1 - x^2}$$

dostaneme násobením řad (jako mnohočlen mnohočlenem)

$$2 + 3x; \frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots,$$

t. j.

$$\frac{2 + 3x}{1 - x^2} = 2 + 3x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots \text{ pro } |x| < 1.$$

Násobíme-li obecně řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

vyjde součinová řada potenční:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

Její koeficienty c_n jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Takovým postupem lze znásobiti postupně libovolný počet potenčních řad. Zvláštní případ násobení potenčních řad je umocňování potenční řady celým kladným exponentem. *Mocnina potenční řady je podle předchozího opět potenční řada.*

Cvičení 2,10. Užijte výsledku cvičení 2,8 a odvoďte rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{2x - 5}{6 - 5x + x^2}.$$

Jaký má řada obor konvergence?

2,11. Pro funkci ze cvičení 2,3

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

platí vztah:

$$f(2x) = f^2(x) - 1.$$

Vypočtěte první 4 členy rozvoje pro $f^2(x) - 1$ a porovnejte s odpovídajícími členy rozvoje $f(2x)$.

2,12. Pro funkci z příkladu 2,3

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

platí vztah

$$f^2(x) = f(2x).$$

Dokažte tento vztah porovnáním příslušných potenčních řad (viz část 1). Jaké jsou poloměry konvergence obou řad?

2,5. Rozvinutí funkce v potenční řadu. — Věta o identitě. V odst. 2,1 jsem uvedl, že potenční řada svými součty ve svém konvergenčním oboru definuje funkci. V odst. 2,3, 2,4 jsem ukázal, jak naopak daná funkce (lomená racionální) se může rozvinouti v potenční řadu. Mimo racionální funkce je v matematice mnoho jiných důležitých funkcí, na př.: iracionální funkce ($f(x) = \sqrt{1 + x}$), funkce logaritmická, exponenciální, goniometrické funkce a j. Přirozeně se tážeme, lze-li také tyto funkce rozvinouti v potenční řady.

Výhody takových rozvojů jsou zřejmé: u funkce racionální dovedeme počítat její funkční hodnoty přímo, dosazením za x do příslušného zlomku. U jiných složitějších funkcí nám poskytne potenční řada rozvoje funkční hodnoty jako součty řady a tak můžeme počítat (numericky) na př. odmocniny, logaritmy, hodnoty goniometrických funkcí s libovolnou přesností (viz část 1.). Mimo to je možné — jak dále podrobněji vyložím — počítati s funkcí rozvinutou v řadu jako s mnohočlenem. To má velký význam zvláště v infinitesimálním počtu při derivování a integrování funkcí.

Hlavní otázky, týkající se možnosti rozvinutí funkce v potenční řadu jsou tyto:

1. Které funkce lze rozvinout v řadu, resp. za jakých podmínek lze danou funkci rozvinout v řadu.

2. V jakém oboru tento rozvoj platí, t. j. jaký je konvergenční obor potenční řady.

3. Kolik různých rozvojů má daná funkce.

Odpověď na první dvě otázky najde čtenář později. Odpověď na třetí otázku dává

(V. 2,4.) *Mají-li funkce, definované dvěma potenčními řadami* $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$ *v jistém (sebemenším) okolí bodu* 0*) *stejné funkční hodnoty, jsou obě potenční řady identické, t. j. platí*

$$a_n = b_n, \quad p. v. n.$$

Důsledek:

Lze-li funkci rozvinouti v potenční řadu, je to možné jen jedním způsobem.

Důkaz neuvádím, poněvadž vyžaduje znalosti pojmu spojitosti funkce a odkazuji na knihu *Jarníkovu*.

Věta 2,4 má mimo svůj existenční význam důležité důsledky pro počítání s řadami.

Příklad 2,7. Za předpokladu, že je možno rozvinouti iracionální funkci $\sqrt{1+x}$ v potenční řadu, můžeme *formálně* vypočísti koeficienty této řady. Budiž:

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Umocníme obě strany rovnice:

$$1 + x = a_0^2 + 2a_0a_1x + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + \\ + (2a_1a_2 + 2a_0a_3)x^3 + \ldots$$

Řady na obou stranách se shodují v součtech pro všechny

*) Tímto výrokem je míněno: ve všech bodech okolí.

hodnoty proměnné x z konvergenčního intervalu řady na pravé straně. Podle věty 2,4 mají tedy stejné koeficienty, t. j. platí

$$a_0^2 = 1,\ 2a_0a_1 = 1,\ a_1^2 + 2a_0a_2 = 0,$$
$$2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 0, \dots \tag{10}$$

Odtud plyne:

$$a_0 = \pm 1.$$

Dvojznačnost koeficientu a_0 je důsledek skutečnosti, že „druhá odmocnina je dvojznačná". Omezme se na jednu řadu, t. j. zvolme $a_0 = 1$; pak plyne dále z rovnic (10):

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = -\tfrac{1}{8},\ a_3 = \tfrac{1}{16}, \dots .$$

Stejným způsobem lze vypočísti libovolné a_n. Snadno se ukáže (indukcí), že čísla a_n střídají znaménka a jejich prosté hodnoty konvergují k nule. Řada $\Sigma a_n x^n$ tedy konverguje podle Leibnizova kriteria pro $x = 1$; její obor konvergence je jistě nejméně interval $(-1, 1)$. Tím je dokázána *existence* rozvoje pro $\sqrt{1 + x}$:

$$\sqrt{1 + x} = \pm (1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \dots),\ |x| < 1.$$

Cvičení 2,12. Rozvoj pro lomenou rac. funkci, na př.

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

lze nalézti také z podmínky:

$$(1 - 2x - 3x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 1.$$

Proveďte a porovnejte s výsledkem v odst. 2,3.

2,13. Rozviňte v potenční řadu funkci $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ a porovnejte s řadou cvičení 2,5.

2,14. Které funkce rozvinutelné v řadu vyhovují vztahu

$$f^2(x) = f(2x).$$

Návod: Při porovnání obou řad zůstane koeficient a_1 neurčen; zvolte jej $a_1 = 1$. Pak budou všechny další koeficienty jednoznačně určeny. Indukcí lze určit obecný a_n.

Podobně, jako jsme prováděli v odst. 2,3 dělení polynomem, lze provésti dělení potenční řadou, která má koeficient $a_0 \neq 0$. Upravíme si:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 - \left(-\frac{a_1}{a_0} x - \frac{a_2}{a_0} x^2 - \ldots\right)} =$$

$$= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - x_1}.$$

Lze ukázati na základě spojitosti,*) že v jistém okolí O_0 bodu 0 je $|x_1| < 1$; výraz $\frac{1}{1 - x_1}$ se dá rozvinouti v geometrickou řadu. Za x_1 se dosadí zpět příslušná řada a podle přerovnávací věty se výsledek srovná podle mocnin x. Tím je dokázáno, že $\frac{1}{\Sigma a_n x^n}$ se dá vyjádřit potenční řadou $\Sigma b_n x^n$, která *konverguje* v jistém okolí počátku. Koeficienty řady $\Sigma b_n x^n$ počítáme podle věty 2,4 ze vztahu:

$$\Sigma a_n x^n \,.\, \Sigma b_n x^n = 1.$$

Vychází tedy:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

Odtud lze vypočíst $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Vyslovíme tyto výsledky ve větě:

(V. 2,5.) *Je-li* $a_0 \neq 0$, *lze funkci* $f(x) = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ *rozvinouti*

*) Viz na př. *V. Jarník:* Úvod do počtu diferenciálního, Praha, 1946.

v potenční řadu $\Sigma b_n x^n$, která konverguje v jistém okolí počátku. Její koeficienty b_n počítáme podle věty 2,4 ze vztahu

$$\Sigma a_n x^n \, . \, \Sigma b_n x^n = 1 .$$

Cvičení 2,15. Rozviňte v potenční řadu:

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + \ldots} .$$

2,16. Rozviňte v pot. řadu převrácenou hodnotu funkce definováné řadou příkladu 2,3.

2,17. Určete počátek rozvoje pro $\sqrt{1 - x}$ dělením řadou ze cvičení 2,13 a porovnejte výsledek s řadou příkladu 2,7.

2,6. Derivování a integrování potenční řady. Do teorie potenčních řad zasahují dvě základní operace infinitesimálního počtu: derivování a integrování funkcí. Úkolem tohoto oddílu není podati výklad pojmu derivace a integrálu, ale shrnouti stručně výsledky, kterých bude v dalším použito.

Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_1 se nazývá limita:

$$D_x f(x_1) = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} .$$

Její geometrický význam je: $f'(x_1)$ je směrnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $(x_1; f(x_1))$. Existuje-li derivace $f'(x_1)$ v každém bodě x_1 jistého oboru, představují její hodnoty funkční hodnoty jisté funkce $f'(x)$, derivované v tomto oboru. Je pak možno utvořit derivaci derivační funkce, které říkáme druhá derivace; její hodnoty definují — existují-li ve všech bodech oboru — funkci $f''(x)$. Takovým postupem dostáváme t. zv. *derivace vyšších řádů*:

$$f''(x); \; f'''(x); \; f^{(4)}(x); \; f^{(5)}(x); \ldots$$

Základní obecná pravidla pro počítání derivací funkcí jsou pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu dvou funkcí a dále pravidlo pro derivování funkce složené. Psáno v obvyklé zkrácené formě, kde $u = f(x)$, $v = g(x)$:

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad (ku)' = ku', \quad k \ldots \text{ konstanta},$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

pro funkci složenou $z = F(y)$, $y = f(x)$:

$$\mathrm{D}_x F(f(x)) = \mathrm{D}_y F(y) \,.\, \mathrm{D}_x f(x).$$

Dále použijeme vzorců pro derivace t. zv. *elementárních funkcí*: mocniny, exponenciální funkce, logaritmické funkce funkcí goniometrických a cyklometrických.

$$\mathrm{D}_x x^n = n x^{n-1}, \; n \text{ reálné}, \quad \mathrm{D}_x \sin x = \cos x,$$

$$\mathrm{D}_x \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad \mathrm{D}_x \cos x = -\sin x,$$

$$\mathrm{D}_x a^x = a^x \log_{\mathrm{e}} a, \quad \mathrm{D}_x \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\mathrm{D}_x \log_{\mathrm{e}} x = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{D}_x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Logaritmy v těchto vzorcích jsou Napierovy přirozené se základem $\mathrm{e} = 2{,}718 \ldots$, proměnná x u goniometrických funkcí je úhel v míře obloukové ($360^0 \ldots 2\pi$, $180^0 \ldots \pi$ atd.).

Kombinací předchozích pravidel dostáváme výsledek: *polynom proměnné x derivujeme „člen po členu" podle vzorce:*

$$\mathrm{D}_x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \\ + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Toto pravidlo lze rozšířit z polynomu na potenční řadu,*) jak je vysloveno ve větě:

(V. 2,6). *Derivace funkce dané potenční řadou je potenční řada, která vzniká derivováním dané řady „člen po členu". Nová řada má stejný obor konvergence jako daná. Vzorcem:*

$$\mathrm{D}_x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

*) Důkaz viz v knize Knoppově.

Věta 2,6 nám dovoluje vedle četných jiných aplikací nalézti rychle rozvoje různých funkcí.

Příklad 2,8. Derivováním řady

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

dostaneme

$$\mathrm{D}_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Podle pravidel pro derivování je

$$\mathrm{D}_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2}.$$

Platí tedy:

$$\frac{x}{1-2x+x^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots.$$

Poloměr konvergence této řady podle věty 2,6 je $r = 1$. (Srovnej se cvičením 2,1.)

Cvičení 2,18. Dokažte, že pro funkci definovanou řadou z příkladu 2,3 platí:

$$f'(x) = f(x) \tag{11}$$

2,19. Dokažte, že pro každou funkci, rozvinutelnou v řadu a vyhovující funkční rovnici (11) platí rozvoj:

$$F(x) = a_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right).$$

2,20. Dokažte, že derivace funkce ze cvičení 2,2

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Druhá základní operace infinitesimálního počtu je *integrování*. Geometricky vyjadřuje *integrál*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

obsah části roviny, omezené obloukem křivky $y = f(x)$, osou x a pořadnicemi bodů, jejichž úsečky jsou a, b.

Ponecháme-li dolní mez a pevnou a měníme horní mez b (v jistém oboru), je integrál — existuje-li — zřejmě funkcí ve své horní meze. Píšeme:

$$F(x) = \int_a^x f(x) \mathrm{d}x.^{*})$$

Ukazuje se, že za jistých předpokladů, které v dalším budou splněny (spojitost funkce $f(x)$) platí rovnice:

$$F'(x) = f(x),$$

t. j. integrování je operace protichůdná k derivování. Pro integrování platí obecná pravidla:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \int_a^b q(x) \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b kf(x) \mathrm{d}x = k\int_a^b f(x) \mathrm{d}x, \ k \text{ je konstanta.}$$

Integrály nejjednodušších funkcí jsou dány vzorci:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}; \ n \neq -1, \text{ reálné}, \qquad \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x,$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log_e x, \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x,$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x.^{**})$$

---

*) Není-li dolní mez určena, nazývá se integrál *neurčitý*. Je to vlastně množina funkcí, které se od sebe liší o konstantní veličiny. Tuto neurčenou konstantu nazýváme *integrační konstanta* a píšeme:

$$F(x) = \int f(x) \mathrm{d}x + k.$$

**) Integrační konstanty jsou vynechány.

Ve všech uvedených vzorcích platí o logaritmech a o argumentech goniometrických funkcí stejná poznámka jako při derivování.

Integrály složitějších funkcí určujeme používajíce dvou hlavních metod: t. zv. *metody substituční* a integrace *„per partes“*.

Hodnotu omezeného intergálu z neurčitého integrálu dostaneme dosazením obou mezí a odečtením, na př.

$$\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Spojením předchozích pravidel dostaneme pravidlo pro *integrování mnohočlenu „člen po členu“*:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) \mathrm{d}x = a_0 c + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + $$
$$+ \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + k.$$

Toto pravidlo lze rozšířiti na potenční řadu, jak je vysloveno ve větě:

(V. 2,7.) *Integrál funkce dané potenční řadou je potenční řada, která vzniká integrováním dané řady „člen po členu“. Nová řada má stejný obor konvergence jako daná. Vzorcem:*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + k.$$

Integrační konstanta je pro novou řadu absolutním členem.

Příklad 2,9. Integrováním řady

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

dostaneme (až na integrační konstantu):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Integrál na levé straně je $\log_e (1 + x)$; platí tedy:

$$\log_e (1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

Cvičení. 2,21. Dokažte, že platí (až na integrační konstantu)

$$\int f(x) \mathrm{d}x = f(x)$$

pro funkci, definovanou řadou 3 příkladu 2,3.

2,22. Najděte rozvoj pro funkci $\operatorname{arctg} x$; použijte rovnice

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x$$

a rozviňte $\dfrac{1}{1 + x^2}$ v potenční řadu.

2,23. Proveďte podobnou úlohu pro $\arcsin x$.

Integrování je operace zpravidla složitější a obtížnější k provedení než derivování; u funkcí rozvinutelných v potenční řady je integrace řady „člen po členu" nejjednodušší a často jediná cesta, jak nalézti integrál dané funkce. (Srovnej poznámku v odst. 2,5.)

2,7. Řada Taylorova. Derivujeme-li postupně funkci $f(x)$ danou potenční řadou:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{12}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \\ f''(x) &= 1 \,.\, 2a_2 + 2 \,.\, 3a_3 x + 3 \,.\, 4a_4 x^2 + \dots \\ f'''(x) &= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a_3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4a_4 x + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{aligned}$$

obecně:

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \dots \,.\, (k + 1) a_{k+1} x + \dots \,.$$

Dosadíme-li do této rovnice $x = 0$, vyjde:

$$f^{(k)}(0) = k!a_k,$$

t. j.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tyto rovnice doplníme rovnicí

$$a_0 = f(0),$$

která plyne z vyjádření (12).

Funkce, jejíž funkční hodnoty jsou dány součty potenční řady, konvergentní v jistém okolí O_0 bodu $x = 0$, se nazývá *analytická* (t. j. rozvinutelná) *v tomto okolí*. Výše odvozené výsledky shrneme ve větě

(V. 2,8.) *Analytická funkce v okolí O_0 má v tomto okolí derivace všech řádů*) a je vyjádřena potenční řadou:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

konvergentní v O_0. Tato řada se nazývá Taylorova (MacLaurinova).

Označením $f'(0)$, $f''(0)$ atd. rozumíme hodnoty funkcí $f'(x), f''(x), \ldots$ v bodě $x = 0$.

Cvičení 2,24. V jakém oboru jsou analytické

a) funkce z příkladu 2,3;

b) $\log(1 + x)$;

c) $\dfrac{1}{1 - x}$.

Funkce, která je analytická, má derivace všech řádů, ale obráceně tato podmínka není postačující pro rozvinutelnost funkce. Dokonce není pro rozvinutelnost funkce postačující ani podmínka, že funkce má derivace všech řádů v jistém okolí bodu $x = 0$ a že řada

*) Existence derivací všech řádů nemusí nastat pro libovolně zvolenou funkci.

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

v tomto okolí konverguje. Součty této řady nemusí totiž být — jak ukázal Cauchy na příkladě funkce e^{-x^2} — funkční hodnoty funkce $f(x)$.

Postačující podmínka pro rozvinutelnost funkce je požadavek, aby jistý výraz, závislý na derivaci $f^{(n)}(x)$, t. zv. *zbytek*, konvergoval s rostoucím n k nule.*) Příslušná věta je podrobně uvedena a dokázána v citovaných učebnicích diferenciálního počtu.

Většina základních funkcí, které se v matematice vyskytují, jsou rozvinutelné; dokážeme to na př. tak, že funkci odvodíme různými početními výkony, integrováním nebo derivováním z funkcí analytických a tím dostaneme podle známých vět i její rozvoj. Ovšem numerické výpočty koeficientů rozvoje bývají při tomto postupu — zvláště jde-li o dělení potenční řadou nebo dosazování potenční řady do jiné — velmi složité.

Tu lze však výhodně uplatnit větu 2,8 o Taylorově řadě. Víme-li totiž, že jistá funkce je analytická, je její rozvoj podle věty 2,4 určen jednoznačně. Koeficienty tohoto rozvoje můžeme tedy počítati podle věty 2,8. Příklad tohoto postupu dává funkce arcsin x (viz odst. 2,12).

Nakonec ještě **poznámku** k vysvětlení názvu „funkce rozvinutelná v okolí bodu $x = 0$". Upozornil jsem v odst. 2,3 u racionálních funkcí, že není-li splněn předpoklad $a_0 \neq 0$, je možno takovou funkci rozvinouti v složitější řadu. Na př. u funkce $\frac{1}{x}$: položíme-li $x = x_1 + 1$, je

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1 + 1} = 1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \dots, |x_1| < 1.$$

Vrátíme-li se k proměnné x, platí:

*) Tím je též odpověděno na první dvě otázky v odst. 2,5.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + - \ldots,$$

což je potenční řada, postupující v mocninách proměnného dvojčlenu $x - 1$. Tato řada konverguje, je-li $|x - 1| < 1$, t. j. v intervalu $(0,2)$. O funkci $\frac{1}{x}$ říkáme, že je *rozvinutelná* v okolí bodu 1. Jedna a tatáž funkce je ovšem rozvinutelná (analytická) v okolí nekonečně mnoha bodů a rozvoje lze převáděti jeden v druhý t. zv. transformováním potenční řady.

Na př. rozvoj funkce $\frac{1}{x}$ v okolí bodu $x = 2$ dostaneme takto: Položíme $x = 2x_1 + 2$;

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x_1 + 1} = \tfrac{1}{2}\,(1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + - \ldots)$$

$$\frac{1}{x} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,(x-2)^2 + \tfrac{1}{8}\,(x-2)^3 + \ldots .$$

V dalším si budeme všímati výhradně rozvinutelnosti v okolí bodu $x = 0$. Proto, bude-li řečeno „funkce analytická", rozumí se tím funkce analytická v okolí bodu $x = 0$.

2,8. Binomická řada. Zvláštním případem binomické poučky je vzorec

$$(1 + x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x,$$

který platí pro každé přirozené číslo α. Newton zobecnil tento vzorec pro *libovolné reálné* číslo α t. zv. binomickou řadou. Kombinační číslo $\binom{\alpha}{n}$ je dáno výrazem

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,.\,(\alpha - 1)\,.\,(\alpha - 2)\,.\,\ldots\,.\,(\alpha - n + 1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,n}. \qquad (13)$$

Rovnice (13) má význam pro libovolné reálné číslo α a libovolné přirozené číslo n. Pokládáme ji za definici rozšířeného kombinačního čísla. Definujeme k vůli jednotnosti $\binom{\alpha}{0} = 1$ pro libovolné reálné α a utvoříme formálně potenční řadu:

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots \tag{14}$$

Je-li α přirozené číslo, je pro $n > \alpha$ $\binom{\alpha}{n} = 0$, řada (14) se stává konečnou a dává podle binomické poučky $(1 + x)^\alpha$. Podíl 2 sousedních členů řady (14) je

$$\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} : \binom{\alpha}{n} x^n = \frac{\alpha - n}{n + 1} x.$$

Platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n + 1} x\right| = |x|$; konverguje tedy řada (14) podle podílového kriteria, je-li $|x| < 1$ a definuje v intervalu $(-1; +1)$ pro *libovolné reálné* α k jisté funkci $f_\alpha(x)$.

Vypočteme derivaci funkce $f_\alpha(x)$ podle věty 2,6:

$$f'_\alpha(x) = \alpha \,.\, f_{\alpha-1}(x). \tag{15}$$

I pro rozšířená kombinační čísla $\binom{\alpha}{n}$ platí, jak lze snadno dokázati,*) součtový vzorec:

$$\binom{\alpha - 1}{n} + \binom{\alpha - 1}{n + 1} = \binom{\alpha}{n + 1}.$$

Použijeme-li ho, dokážeme násobením snadno vztah*):

$$(1 + x) \,.\, f_{\alpha-1}(x) = f_\alpha(x). \tag{16}$$

Znásobíme rovnici (15) dvojčlenem $(1 + x)$ a užijeme rovnice (16); vyjde:

$$(1 + x) \,.\, f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x),$$

*) Proveďte podrobně!

t. j.
$$\frac{f'_\alpha(x)}{f_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1 + x}.$$

Podle pravidel o derivování složené funkce je levá strana této rovnice derivací funkce $\log_e f_\alpha(x)$, pravá strana derivací funkce $\log (1 + x)^\alpha$. Platí tedy:

$$D_x \log_e f_\alpha(x) = D_x \log_e (1 + x)^\alpha,$$
$$\log_e f_\alpha(x) = \log_e (1 + x)^\alpha + \log_e k,\text{*)}$$
$$f_\alpha(x) = k \,.\, (1 + x)^\alpha. \tag{17}$$

Pro $x = 0$ je podle rovnice (14) levá strana rovnice (17) rovna 1, pravá strana je k; je tedy $k = 1$.

Výsledek vyslovíme větou:

(V. 2,9.) *Funkce* $(1 + x)^\alpha$, α *reálné, má Taylorův rozvoj*:
$$(1 + x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots;$$
poloměr konvergence je $r \geqq 1$.

Cvičení 2,25. Proveďte tento rozvoj pro $\alpha = -1, \pm \frac{1}{2}$ a porovnejte s geometrickou řadou a s řadami příkladu 2,7 a cvičení 2,13.

Binomické řady se užívá k numerickému výpočtu odmocnin. Podmínka $|x| < 1$ není na závadu obecnosti základu, neboť ji lze vhodnou úpravou splniti. Hlavně — chceme-li dosáhnout rychlé konvergence — musí být $|x|$ pokud možno malá a číslo x záporné; neboť při kladném x střídají členy $\binom{\alpha}{n} x^n$ znaménka, řada alternuje a konverguje pomaleji; při záporném x jsou členy (od určitého počínaje) všechny téhož znaménka.

Příklad 2,10. Pro výpočet $\sqrt{2}$ si upravíme binomickou řadu:
$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5} \,.\, (1 - \tfrac{1}{50})^{-\frac{1}{2}}.$$
Dostaneme:

---

*) Tento tvar můžeme dáti integrační konstantě.

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{50^3} + \dots\right).$$

Řada konverguje velmi rychle. Prvních 6 členů nám dá přesně 10 desetinných míst. Proveďte výpočet!

Cvičení 2,26. Vyhledejte sami výhodný rozvoj pro $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ a pod. a proveďte výpočet.

Na př.:

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{5}{4}\,(1 + \tfrac{3}{125})^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt{13} = \tfrac{18}{5}\,(1 - \tfrac{1}{325})^{-\frac{1}{2}} \text{ a p.}$$

2,9. Logaritmická řada. Pro funkci, definovanou řadou ze cvičení 2,2

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

byl dokázán ve cvičení 2,18 vztah:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

t. j.

$$f'(x) = D_x \log(1 + x),\text{*)}$$
$$f(x) = \log(1 + x) + \log k,$$
$$f(x) = \log k\,.\,(1 + x);$$

Ježto pro $x = 0$ je $f(0) = 0$, je $\log k = 0$, $k = 1$.

Tím je získán rozvoj pro $\log(1 + x)$.

(V. 2,10.) *Taylorův rozvoj funkce* $\log(1 + x)$ *je*

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots.$$

Poloměr konvergence této řady je $r = 1$.

Logaritmická řada konverguje v krajním bodu $x = 1$ svého konvergenčního intervalu a diverguje v bodě $x = -1$,

*) Logaritmus přirozený; index e vynechávám.

jak je známo z části 1. Součet této řady v bodě $x = 1$ lze určiti na základě *Abelovy věty:*

(V. 2,11.) *Nechť potenční řada $\Sigma a_n x^n$ má poloměr konvergence r a definuje ve svém konvergenčním intervalu funkci*

$$f(x) = \Sigma a_n x^n.$$

Konverguje-li též řada $\Sigma a_n r^n$ resp. $\Sigma a_n(-r)^n$, pak její součet je $\lim_{x \to r} f(x)$ resp. $\lim_{x \to -r} f(x)$.

Důkaz najde čtenář v knize *Knoppově.*

Protože tedy logaritmická řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$, je součet řady:

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

roven $\lim_{x \to 1} \log(1 + x)$, t. j. $\log 2$; tento výsledek byl uveden již v části 1.

Logaritmické řady nelze použít k numerickému počítán logaritmů pro její pomalou konvergenci. Vhodnou transformací se však její konvergence značně zrychlí. Počínáme si takto: sečteme řady

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$$

$$-\log(1 - x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Vyjde

$$\log \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \tag{18}$$

Tato řada konverguje rychleji, neboť není alternující a exponenty stoupají po dvou. Řada (18) konverguje sice jen pro x taková, že $|x| < 1$, ale dovoluje nám počítati přirozené logaritmy všech kladných čísel, neboť podmínka

$|x| < 1$ je vždy splněna, je-li $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Na př. log 2 dostaneme pro $x = \frac{1}{3}$;

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \ldots\right). \tag{19}$$

Provedeme-li odhad zbytku po n-tém členu, ukazuje se, že prvních 8 členů řady dává log 2 přesně na 7 desetinných míst:

$$\log 2 = 0{,}6931471 \ldots$$

Dosadíme-li v řadě (18) $x = \frac{1}{2N+1}$, vyjde *rekurentní* vzorec:

$$\log(N+1) = \log N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right];$$

podle něho můžeme počítati postupně logaritmy čísel 3, 4, 5, ..., známe-li log 2.

Od přirozených logaritmů Napierových (základ e) přejdeme snadno k dekadickým logaritmům Briggsovým (základ 10). Označme β resp. ν dekadický resp. přirozený logaritmus *téhož* čísla. Platí:

$$10^\beta = e^\nu.$$

Logaritmujeme tuto rovnici přirozenými logaritmy:

$$\beta\,.\log_e 10 = \nu\,.\log_e e = \nu,$$

t. j.

$$\beta = \frac{1}{\log_e 10}\,.\,\nu.$$

Číslo $M = \frac{1}{\log_e 10}$ se nazývá *modulem* Briggsových logaritmů a vypočteme je z log 2 a log 5:

$$M \doteq 0{,}4342945 \ldots$$

Cvičení 2,27. Vypočtěte přirozené logaritmy $\log_e 3$, $\log_e 5$ na 5 desetinných míst s použitím rekurentního vzorce!

2,28. Vypočtěte $\log_e \frac{5}{2}$ na 4 desetinná místa s použitím řady (18).

2,29. Vypočtěte dekadické logaritmy $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$ na 5 desetinných míst. S jakou přesností je k tomu třeba znáti modul M?

2,10. Exponenciální funkce. Exponenciální funkcí v širším slova smyslu rozumíme funkci, kde proměnná se vyskytuje v exponentu, v užším slova smyslu funkci e^x, kde $e = 2{,}718\ldots$ Tato funkce má pro své jednoduché vlastnosti zvláštní význam v infinitesimálním počtu. Uvedl jsem v odst. 2,6, že pro derivaci této funkce platí:

$$D_x e^x = e^x.$$

Jediná analytická funkce, která je rovna své derivaci, je podle cvičení 2,19 funkce, daná až na multiplikativní konstantu*) řadou:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (20)$$

s poloměrem konvergence $r = \infty$ (viz příklad 2,3).

Dokážeme, že platí

(V. 2,12.) *Funkce e^x je analytická; její Taylorův rozvoj je dán řadou*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

s poloměrem konvergence $r = \infty$.

Důkaz: Podle pravidla pro násobení absolutně konvergentních řad vyjde pro funkci definovanou rovnicí (20):

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2), \qquad (21)$$

kde x_1, x_2 jsou libovolná reálná čísla.

*) Pravíme, že dvě funkce, jejichž podíl je konstantní, se liší o *multiplikativní* konstantu (na př. $f(x) = x$, $f_1(x) = 2x$); je-li jejich rozdíl stálý, liší se o *aditivní* konstantu (na př. $f(x) = x$, $f_1(x) = x + 2$).

Tato rovnice se dá indukcí snadno zobecnit:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \quad (22)$$

Dosadíme-li do (22) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, vychází:

$$f(n) = [f(1)]^n.$$

Protože $f(1) = \mathrm{e}$, jak bylo dokázáno v odst. 1,13, platí

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad (23)$$

pro každé číslo x *celé, kladné*. Přímým dosazením $x = 0$ do (20) dostaneme $f(0) = 1$; zvolíme-li v (21) $x = x_1 = -x_2$, je:

$$f(x) = \frac{1}{f(x)} = \mathrm{e}^{-x}. \quad (24)$$

Rovnice (23) tedy platí pro *libovolné celé číslo* x.

Dále dosadíme do (22): $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$; pak je:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = f(1) = \mathrm{e}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}};$$

znovu dosadíme do (22) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n'}$; vyjde

$$\left[f\left(\frac{1}{n'}\right)\right]^n = f\left(\frac{n}{n'}\right); \quad f\left(\frac{n}{n'}\right) = \mathrm{e}^{\frac{n}{n'}}.$$

Platí tedy rovnice (23) pro každé kladné racionální číslo x a v důsledku (24) pro *každé racionální* x. Limitním postupem se dále ukáže, že rovnice (23) platí pro každé *reálné* x.

V odst. 1,13 bylo dokázáno, že pro číslo e platí vztah:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Tento vztah lze zobecniti; platí totiž rovnice:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Cvičení 2,30. Rozviňte v řadu exponenciální funkci $y = 2^x$.
Návod: logaritmováním dostaneme

$$\log_e y = x \,.\, \log_e 2$$

čili:

$$y = e^{x \,.\, \log_e 2}$$

a použijeme rozvoje pro e^x.

Příklad 2,11. Na konci odstavce uvedu příklad rozvoje důležité funkce odvozené od funkce exponenciální. Tato odvozená funkce — resp. řada — je východiskem pro další důležité rozvoje. Jde o funkci

$$y = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Platí:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 : \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots\right).$$

Řadou v závorkách je možno „děliti“ podle věty 5; výsledek jepotenční řada:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{1}{1!} B_1 x + \frac{1}{2!} B_2 x^2 + \frac{1}{3!} B_3 x^3 + \dots .$$

Koeficienty $B_0, B_1, B_2, \dots$ jsou racionální čísla, nazývaná po svém objeviteli *Bernoulli-ova*. Jejich hodnoty jsou

$$B_0 = 1;\ B_1 = -\tfrac{1}{2};\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = 0;\ B_4 = -\tfrac{1}{30};\ B_5 = 0;$$
$$B_6 = \tfrac{1}{42}, \dots .$$

Cvičení 2,31. Dokažte, že nahradíme-li B_ν výrazem B^ν, platí *symbolická* rovnice

$$(B + 1)^\nu - B^\nu = 0.$$

Návod: Znásobte příslušné řady a použijte věty o identitě.
S použitím symbolické rovnice vypočtěte hodnoty Bernoulliových čísel B_0 až B_6.

2,11. O funkcích inversních. Budiž $y = f(x)$ funkce definovaná v jistém číselném oboru Ω_x; její funkční hodnoty y tvoří jiný obor číselný Ω_y. Je-li funkční vztah takový, že každé číslo z oboru Ω_y odpovídá *jen jedinému* číslu z oboru Ω_x, pak lze toto číslo x pokládati za funkční hodnotu dotyčného y a tím je definována nová funkce

$$x = \varphi(y),$$

t. zv. **funkce inversní** k dané. Tato inversní funkce je charakterisována tím, že platí rovnice

$$\varphi(f(x)) = x \text{ resp. } f(\varphi(y)) = y \tag{25}$$

identicky pro vsecka x z Ω_x resp. y z Ω_y.

Na př. k funkci $y = x^2$ je inversní funkce $x = \sqrt{y}$. Obory Ω_x, Ω_y mohou být na př. množství všech kladných čísel. K funkci $y = \sin x$, definované v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$ je inversní funkce $x = \arcsin y$, definovaná v intervalu $(-1, +1)$. Obor Ω_x nelze v tomto případě rozšířiti. Proč?

S hlediska potenčních řad nás zajímají inversní funkce k funkcím analytickým. Za jistých předpokladů jsou to opět funkce analytické. Uvedu nejprve jednoduchý

příklad 2,12. Rozvineme analytickou funkci

$$y = \sqrt{1 + x} - 1 \tag{26}$$

podle příkladu 2,7:

$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - + \ldots. \tag{27}$$

Inversní funkci dostaneme řešením rovnice (26) podle x:

$$x = 2y - y^2. \tag{28}$$

Tato rovnice představuje zároveň rozvoj inversní funkce v potenční řadu v proměnné y. Podle rovnic (25) můžeme dosaditi do rozvoje (27) za x z rovnice (28); po uspořádání podle mocnin y dostaneme ve shodě s větou 2,4 identitu $y = y$. Proveďte podrobně: vypočtěte koeficienty při y, y^2, y^3.

Takovýmto dosazováním potenční řady je možno určiti v každém případě koeficienty rozvoje inversní funkce, je-li znám rozvoj funkce dané. Je-li totiž dána funkce analytická:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

a je-li funkce k ní inversní opět analytická:

$$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$$

kde dosadit za x do rozvoje dané funkce, uspořádat řadu podle mocnin y a položit všechny koeficienty této řady rovny nule s výjimkou koeficientu při y, který je roven 1. Tímto použitím věty 2,4 určíme postupně $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Zdůrazňuji znovu, že předchozí postup je možný jen za předpokladu, že inversní funkce je analytická. — Na existenční otázku, kdy je inversní funkce k analytické funkci opět funkce analytická, odpovídá věta:

(V. 2,13.) *Budiž*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \ a_1 \neq 0,$$

analytická funkce. Pak existuje jistý interval proměnné y $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ takový, že v něm existuje inversní funkce k dané, je analytická a má rozvoj ve tvaru:

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots, \ b_1 = \frac{1}{a_1}.$$

Právě popsaný postup pro výpočet koeficientů rozvoje inversní funkce je příliš pracný a proto se ho užívá zřídka. Obyčejně volíme tuto cestu: protože *existence* rozvoje inversní funkce je za daných předpokladů zaručena podle věty 2,13, stačí vypočítat koeficienty Taylorovy řady podle věty 2,8. Při tom užíváme vztahu mezi derivací dané funkce $y = f(x)$ a inversní funkce, $x = \varphi(y)$, který se odvozuje v infinitesimálním počtu; platí totiž:

$$\mathrm{D}_x f(x) = \frac{1}{\mathrm{D}_y \varphi(y)}.$$

Podrobnější vysvětlení podává

příklad 2,13. Derivace všech řádů funkce $y = \mathrm{e}^x - 1$ jsou

$$\mathrm{D}_x^{(n)}(\mathrm{e}^x - 1) = \mathrm{e}^x.$$

Protože funkce $y = \mathrm{e}^x - 1$ splňuje předpoklady věty 2,13, má inversní funkci analytickou; její derivace je

$$D_y\varphi(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1+y}.$$

Druhá derivace je:

$$D_z^{(2)}\varphi(y) = -\frac{1}{(1+y)^2},$$

třetí:

$$D_y^{(3)}\varphi(y) = 2 \cdot \frac{1}{(1+y)^3};$$

obecně n-tá:

$$D_y^{(n)}\varphi(y) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+y)^n}.$$

Hodnota této derivace v bodě $y = 0$ je:

$$D_y^{(n)}\varphi(y) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Dosadíme-li do Taylorovy řady, dostaneme řadu logaritmickou.

Cvičení 2,32. Najděte rozvoj inversní funkce k funkci

$$y = (1+x)^\alpha - 1.$$

2,12. Funkce goniometrické a cyklometrické. Na příkladě rozvinutí goniometrických funkcí v řady ukáži jinou metodu, jak lze takové rozvinutí provésti. V odst. 2,7 bylo řečeno, že Taylorova řada představuje rozvoj dané funkce, jestliže jistý výraz, t. zv. *zbytek*, konverguje s rostoucím n k nule.*) Tento zbytek je dán na př. výrazem

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n.$$

Určíme výraz R_n pro funkci $y = f(x) = \cos x$. Derivace jsou:

$$D_x \cos x = -\sin x,\ D_x^{(2)} \cos x = -\cos x,\ D_x^{(3)} \cos = \sin x;$$

$$D_x^{(4)} \cos x = \cos x;$$

dále se zřejmě opakují, platí tedy

*) Viz citované učebnice diferenciálního počtu.

$$\begin{aligned}
D_x^{(0)} \cos x &= D_x^{(4)} \cos x = D_x^{(8)} \cos x = \ldots = \cos x \text{ *)} \\
D_x^{(1)} \cos x &= D_x^{(5)} \cos x = D_x^{(9)} \cos x = \ldots = -\sin x \\
D_x^{(2)} \cos x &= D_x^{(6)} \cos x = D_x^{(10)} \cos x = \ldots = -\cos x \\
D_x^{(3)} \cos x &= D_x^{(7)} \cos x = D_x^{(11)} \cos x = \ldots = \sin x.
\end{aligned}$$

Je tedy zřejmě pro každé n a x:

$$|D_x^{(n)} \cos x| \leqq 1,$$

t. j.

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0 \quad \text{pro každé } x.$$

Podíl $\frac{x^n}{n!}$ totiž konverguje k nule s rostoucím n, jak je patrno z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

V bodě $x = 0$ mají derivace kosinu (nultou počínaje) postupně hodnoty $1, 0, -1, 0 \,|1, 0, -1, 0|, \ldots$. Věta 2,8 dává rozvoj

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

což je všude konvergentní řada ze cvičení 2,3.

Cvičení 2,33. Ukažte podobně, že rozvoj sinu je druhá řada ze cvičení 2,3.

Máme tedy celkem výsledek:

(V. 2,14.) *Goniometrické funkce* $\sin x$, $\cos x$ *jsou analytické; jejich Taylorovy řady jsou:*

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \\
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.
\end{aligned} \tag{29}$$

Poloměry konvergence obou řad jsou $r = \infty$.

---

*) $D^{(0)} \cos x$ píši místo $\cos x$.

Řada pro $\cos x$ obsahuje jen mocniny proměnné x se sudým exponentem, řada pro $\sin x$ jen s lichým exponentem. Nahradíme-li v obou řadách proměnnou x veličinou $-x$, dostaneme zřejmě známé vztahy:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Platí-li pro funkci $f(-x)$ vztah $f(x) = f(x)$ pro všechna x v oboru, kde je definována, nazývá se *sudá*; platí-li vztah $f(-x) = -f(x)$, nazývá se *lichá*. Je tedy $\cos x$ *sudá funkce*, $\sin x$ *lichá*. Je-li sudá resp. lichá funkce rozvinutelná, jsou její rozvoje podobné jako u $\cos x$ resp. $\sin x$; t. j. vyskytují se v nich jen mocniny x s exponenty téže parity. Dokažte!

Rovnice (29) se hodí při malém x (pozor: x je úhel v míře obloukové!) pro výpočet hodnot goniometrických funkcí, neboť rychle konvergují. Nevýhodou je, že alternují. — Rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ lze získati z řad (29); výhodnější metoda než prosté dělení je založena na složitějších řadách. Funkce $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$ nejsou analytické (v okolí bodu $x = 0$). Proč?

Cvičení 2,34. Určete pro $x = 1$ hodnoty $\cos x$, $\sin x$ z řad (29) a odtud úhel x v míře stupňové ($x < 60°$).

2,35. S použitím řad (29) dokažte součtový vzorec

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.$$

2,36. Dělením potenční řadou najděte rozvoj pro $\sec x$ (první čtyři členy); přihlížejte při tom k faktu, že $\sec x$ je funkce sudá.

Podle věty 2,13 je $\arcsin x$ funkce analytická v okolí bodu 0. Koeficienty rozvoje určíme podobně takto:
Platí:

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rozvineme pravou stranu podle binomické řady ($\alpha = -\frac{1}{2}$):

$$D_x \arcsin x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x^6 + \dots \quad (30)$$

Poloměr konvergence této řady je $r = 1$.

Integrujeme-li rovnici (30), vyjde:

$$\arcsin x = k + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Ježto $\arcsin 0 = 0$, je integrační konstanta $k = 0$. Ještě jednodušší je odvození rozvoje pro $\operatorname{arctg} x$. Tato funkce, jakožto inversní k analytické funkci

$$\operatorname{tg} x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

($\operatorname{tg} x$ je funkce lichá!), je také analytická. Platí:

$$D_x \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots;$$

integrací ($k = 0$ z téhož důvodu jako u $\arcsin x$) vyjde:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots . \quad (31)$$

Také tato řada má poloměr konvergence $r = 1$.

Oba výsledky shrneme ve větě:

(V. 2,15.) *Rozvoje cyklometrických funkcí* $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ *jsou:*

$$\arcsin x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Obě řady mají poloměr konvergence $r = 1$.

Řada pro $\operatorname{arctg} x$ konverguje podle Leibnizova kriteria pro alternující řady i pro $x = 1$; její součet je podle Abelovy věty 2,11 $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Dostaneme tedy vzorec:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots,$$

nazývaný *formule Leibnizova.* K výpočtu čísla π se tato formule nehodí pro pomalou konvergenci řady. Totéž platí i o řadě, kterou dostaneme z rozvoje funkce $\arcsin x$ pro $x = 1$. Také tato řada konverguje — jak lze dokázati — a její součet je $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$. Platí tedy:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots.$$

K numerickému výpočtu čísla π užíváme tohoto postupu:

Do řady (31) dosadíme $x = \frac{1}{5}$ a vypočteme příslušný úhel $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$. Příslušná řada dosti dobře konverguje; prvních 6 členů dá úhel α přesně na 8 desetinných míst. Dále zavedeme úhel $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$; tento úhel je velmi malý; podle známého vzorce vypočteme

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (4\alpha - \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{239}.$$

Platí tedy:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots;$$

tato řada konverguje velmi dobře. Číslo π je pak dáno rovnicí

$$\pi = 4(4\alpha - \beta).$$

Cvičení 2,37. Proveďte naznačeným způsobem výpočet čísla π na 7 desetinných míst.

2,38. Dokažte, že funkce $\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$ je analytická.

Návod: dosaďte $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ a nahraďte $\sin x$, $\cos x$ řadami

2,39. Dokažte, že funkce $\log_e \dfrac{\sin x}{x}$ je analytická.

Návod: použijte vztahu:

$$\log_e \frac{\sin x}{x} = \int \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) dx. \tag{32}$$

Poznámka: Protože platí rovnice

$$\log_e \sin x = \log_e x + \log_e \frac{\sin x}{x},$$

lze z rozvoje funkce (32) odvoditi rozvoj, důležitý pro numerický výpočet $\log_e \sin x$.