

Geometrické hry a zábavy

XI. Malý výlet do neznámých a podivuhodných prostorů

In: Karel Čupr (author): Geometrické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 92–99.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403195>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

XI. MALÝ VÝLET DO NEZNÁMÝCH A PODIVUHODNÝCH PROSTORŮ

Mnohým autorům spisků tohoto druhu, jako jest tento, nestačí provést svého čtenáře naším obyčejným prostorem a ukázati mu zábavné a romantické jeho koutky; vedou ho na konec i do prostorů jiných. A poněvadž při povaze svého dílka nechtějí a nesmějí činiti přílišné nároky na přesné a logické myšlení čtenářovo (a toho při studiu jiných prostorů v první řadě jest třeba), spokojují se s tím, že ho obeznamují s histories scandaleuses, jakých se dožijí „naši v cizině“, t. j. vykládají užaslému čtenáři, jak by se mu vedlo, kdyby vyzbrojen pomůckami a názory svého třírozměrného prostoru navštívil prostory jiné a co by se stalo, kdyby obyvatelé těchto prostorů s myšlenkovou výzbrojí svého prostoru tuto návštěvu mu oplatili. Tyto autory budeme následovati i my, avšak poněkud jinak. Vyložíme na př. (*L. Hefftera*), že pojmy vpravo-vlevo jsou charakteristickým znakem našeho prostoru.

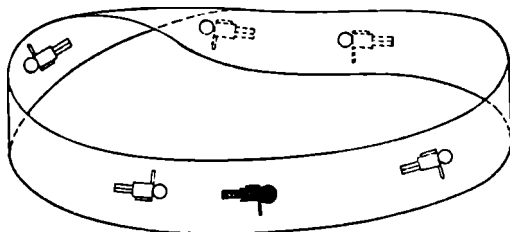
Dítěti již od malička jest známo, kde si dospělí zvykli říkati vpravo a kde vlevo; že někteří lidé (leváci) si zvykli vykonávati některé věci rukou levou místo pravou, na věci nic nemění. Ale představme si, že někoho neznalého prava a leva *písemně* chceme poučiti o tomto rozdílu. Pak by v dopise stála asi tato věta: „Postav se obličejem k jihu a rozpaž ruce; ruka ukazující k východu, jest Tvoje levice, druhá jest pravice“; bez poukazu na nějaký předmět zevnějšího světa bychom písemně nikoho nepoučili o tom, kde jest vpravo a kde vlevo.

Vzorem jednorozměrného prostoru a obyvatelů v něm lze spatřovati v housence lezoucí po lodyze. Housenka může činiti pouze pohyb vpřed a vzad; zamezíme-li nějakou překážkou ať na tom či onom konci či na obou koncích další pohyb, žije housenka v uzavřeném prostoru, z něhož se sama nijakým způsobem nevyprostí; my tvorové třírozměrní ji

ovšem z jejího zajetí na stéble slámy snadno prostorem naším přeneseme i na pokračování lodyhy i na lodyhu jinou. Směr pohybu v jednorozměrném prostoru jest pak dán úsečkou opatřenou šipkou, jež užší svou částí udává jeden směr, druhý pak jest opačný tomuto. Takovéto úsečky budeme říkati orientovaná úsečka a příslušnému prostoru orientovaný prostor. Přejděme k dvojrozměrnému prostoru a k dvojrozměrným bytostem; modelem nám budiž na př. želva lezoucí po zemi; takovým prostorem jest rovina i jakákoliv plocha jiná. Žije-li želva v oplocené zahrádce, jest chycena; neunikne ze svého zajetí, z kterého jí trojrozměrný člověk prostým zvednutím a přenesením ve svém prostoru snadno vyprostí. Lze v takovémto prostoru mluvíti o pravu a levu? Jest možno vůbec tento prostor orientovati? Lze-li, jistě ne naší orientovanou úsečkou: tu lze totiž v rovině a na kterékoliv ploše otočiti, aniž vystoupí z roviny, směrem právě opačným. Tentokráte jako orientačního prostředku užíváme kružnice, na níž jsme špkou vytkli směr, říkejme jí orientovaná kružnice. Zřejmo, že tato orientace může býti dvojí: proti směru a ve směru pohybu hodinových ručiček. Nakresleme si oba orientované kruhy na průsvitný papír; hledíme-li na obrázek z různých stran, vidíme, že oba obrazce přecházejí jeden v druhý. Avšak tento pokus jest možný pouze pro nás, jen my se stanoviska trojrozměrných tvorů můžeme v dvojrozměrném prostoru rozeznávati vpravo a vlevo, avšak bytostem žijícím v dvojrozměrném prostoru tento rozdíl *ještě* patrný není. Oni nijakým způsobem nemohou převést danou orientaci v opačnou, pro ně orientovanou kružnicí jest orientován i jejich prostor. Avšak věc má ještě jeden zapeklitý háček: nejsou totiž všechny plochy co do možnosti orientace stejné. Vystříhňte si asi 40 cm dlouhý a 4 cm široký pruh papíru! Slepíte-li oba kraje obvyklým způsobem, obdržíte válcovou plochu, otočíte-li však jeden kraj o 180° a pak zalepíte (viz obr. 74), obdržíte podivuhodnou plochu zvanou *Möbiusův* proužek (1858). Snadno se přesvědčíte, že má jen jeden okraj; avšak co ještě více

překvapí, má jen jednu stranu. Malíř, jenž by se domníval, že má strany dvě, a chtěl by každou stranu pomalovati jinou barvou, zjistí, že jedinou barvou pomaluje celý proužek.

Tím nejsou vyčerpány podivné vlastnosti této plochy. Rozstříhneme-li ji dle šířky, nerozpadne se nám ve dvě části,



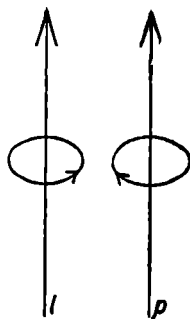
Obr. 74.

nýbrž objeví se podobný proužek, který vznikne z původního rovinného pruhu otočením o $2 \cdot 2 R$ a splením krajů. Rozstříhneme-li původní *Möbiusův* proužek dvěma takovými rovnoběžnými střihy, rozpadne se ve dva pruhy, avšak do sebe zapletené.

Neúspěch našeho malíře lze popsati ještě jinak: Chodec vyšedší z kteréhokoliv místa na proužku a jdoucí ustavičně vpřed, vrací se k svému východišti s prostorovými vlastnostmi protinožců. Představme si, že na své jedné podrážce měl orientovanou kružnici, pak po jeho návratu jest tato kružnice orientována směrem opačným. Při válcové, kuželové, kulové a j. ploše tomu tak není, nazýváme je dvoustrannými, *Möbiusův* list jest nejstarší příklad plochy jednostranné i plochy, v níž nelze orientaci provést. Výsledek našich úvah jest, že v dvojrozměrném prostoru nemůžeme ještě mluviti o pravu a levu, ba dokonce v jistých případech nelze mluviti ani o orientaci.

Trojrozměrný prostor lze orientovati kombinací orientované úsečky a orientované kružnice (obr. 75); tuto kombi-

naci stručně nazýváme šroubový pohyb nebo prostě šroub. A zde teprve lze mluvit o pravém a levém šroubu; jest zvykem, že pravým šroubem nazýváme první z uvedených obrázků, levým pak druhý. Při žádném pohybu v trojrozměrném prostoru (jak se snadno čtenář přesvědčí) nepřejde pravý šroub v levý a naopak, t. j. třírozměrný prostor jest šroubem orientován.



Obr. 75.

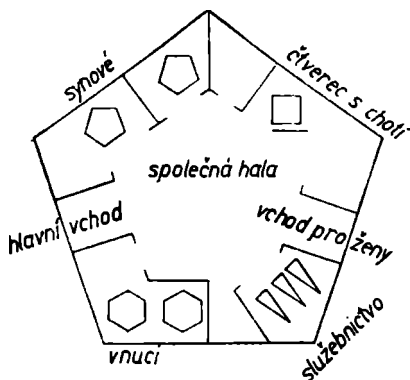
Abychom ukázali, že vpravo a vlevo jest výsadním pojmem našeho prostoru, nutno se předem zmíniti o čtyřrozměrném prostoru vůbec. Čtyřrozměrný a vícerozměrný prostor není pro matematiku žádným problémem. Bod v jednorozměrném prostoru lze určiti jedinou souřadnicí, v rovině dvěma a v prostoru obyčejném třemi souřadnicemi; nic nám nebrání uvažovati bod určený čtyřmi i pěti i více údaji. Rovnice přímky v rovině jest lineární vztah mezi dvěma proměnnými, rovnice roviny pak lineární vztah mezi třemi proměnnými; vztah $ax + by + cz + du + e = 0$ udává t. zv. nadrovinu ve čtyřrozměrném prostoru. Nesnáze s vyššími prostory začínají, až když se stanou předmětem úvah psychologa, filosofa a básníka; tyto nesnáze vrcholí, když lidská zvědavost a tomášská nedůvěřivost se táže: „Existují skutečně takové prostory? Kde? Jak?“ A nesnáze vrcholí, když s žabami ze známé *Nerudovy* žabí kosmické písně se zvědavci táží: „... jsou-li tam tvoři jako my, jsou-li tam žáby taky?“ Tu vykladači uchylují se pravidelně k analogiím, jež pro matematiku jsou nejnebezpečnější methodou. Poukazují k tomu, jako není jednorozměrný svět uzavřen pro dvojrozměrníky a svět těchto pro nás, tak že náš prostor pozorován z čtyřrozměrného prostoru jest rovněž otevřen, a kdybychom se octli nějakou vyšší náhodou ve čtyřrozměrném prostoru, že bychom mohli vcházet do svého pokoje zdmi a pod. Představme si, že i dvojrozměrníci nosí rukavice;

byly by to obrysy nějakého rovinného útvaru; ani oni nemohli by obléci levou rukavici na pravou ruku nebo opačně bez jejího obrácení; my bychom však to mohli učinit pohodlně překlopíce v našem prostoru rukavice a učiníce tak z rukavice pro pravou rukavici pro levou ruku. A podobně by to čtyřrozměrníci mohli učiniti s našimi trojrozměrnými rukavicemi i s našimi pravými a levými šrouby — zkrátka vpravo a vlevo ztrácí ve čtyřrozměrném a vyšším prostoru a pro bytosti vícerozměrné svůj *raison d'être*.

Byly napsány celé povídky a romány odehrávající se v jiných prostorech, než jest náš. Nejstarší z těchto románů pochází od *E. A. Abbota* (německý překlad z anglického originálu od *W. Biecka* v *Mathem. phys. Bibliothek* 83).

V tomto románě o plošných bytostech vystupují mužové jako mnohoúhelníky rozlišené dle svého společenského významu počtem stran. Dělníci a vojáci jsou rovnoramennými trojúhelníky, střední stav jest znázorněn trojúhelníky rovnostrannými; čtverce a pravidelné pětiúhelníky jsou určeny úřednictvu, šlechtě jsou vyhrazeny šesti a víceúhelníky. Kněžstvo jest vyznačeno mnohoúhelníky o takovém množství stran, že nelze vrcholů již pozorovat, kněží sami se pokládají za dokonalé kružnice. Avšak ženy! Ty jsou odkázány na úsečky na obou koncích špičaté; pod trestem smrti musí jdouce na ulici volati: Pozor! pozor! Jinak jsou skoro neviditelné, mohly by smrtelně zraniti muže. V domech, pravidelně pětiúhelníkových, jest jim vykázan zvláštní vchod (viz obr. 70). *Abbot* velmi podrobně popisuje život a zvyky těchto stínů; románovou zápletku tvoří náhlý vpád trojrozměrné koule do tohoto dvojrozměrného státu. Hrdina románu, Čtverec, pokládá hosta za kněze vysokého stupně; může měniti velikost svého obvodu, ba dokonce může i zmizeti, seznámí se s ním, a když Koule není s to přesvědčiti Čtverec o existenci třetího rozměru, prostě ho s sebou vezme do třírozměrného prostoru. Užaslý Čtverec vidí nyní pravé geometrické divy, spatřuje vnitřek svých spoluobčanů atd. Ale záhy jest učen nad mistra: Čtverec

nyní souží Kouli otázkami a výklady, existuje-li i pro ní vícerozměrný prostor a svoji tragickou ironii zaplatí Čtverec vyhazovem do svého dvojrozměrného prostoru. Ale ani on není prorokem ve své vlasti; marně se snaží poučiti spoluobčany o svých zážitcích z třírozměrného prostoru, svojí naukou, že jejich kněží nejsou nejdokonalejšího tvaru,



Obr. 76.

pobouří mocné svého světa, jest souzen a odsouzen k doživotnímu žaláři.

Pobyt třírozměrného pana *Hontina* ve čtyřrozměrném prostoru popisuje *R. Weitzenböck* ve své znamenité knize: *Der vierdimensionale Raum* takto (překlad *Ot. Borůvky*, *Věda a Život*, roč. VIII., str. 145-6): „Pan Hontin objeví jednoho dne čtvrtý rozměr, který jest mu po theoretické stránce již dávno znám. Zpozoruje, že vlivem určitých fysikálních a chemických procesů může způsobiti, že jeho pravá ruka zmizí z našeho prostoru. K tomu stačí malé soustředění vůle; povolí-li, objeví se ruka opět v našem prostoru. Zmizelá ruka zůstává při tom spojena s paží a nevznikají při tom zvláštní pocity. Jenom vidí, že na místě, kde ruka mizí, jsou viditelné kosti,

svaly atd., jako by byla přehlédnuta. Při ohmatání jest toto místo bolestivé a vzbuzuje pocit zlomeniny.

Pan Hontin pochopí rychle ohromný dosah svého objevu. Důkladnými pokusy se mu brzy podaří vsunouti do čtyřrozměrného prostoru i větší části svého těla a zase je vrátiti do našeho světa. Může také do čtyřrozměrného prostoru vsunouti jiné předměty. Nebo vsune na př. do čtyřrozměrného prostoru celou dolní končetinu a malým zpátečním pohybem vysune botu i s jejím obsahem zpět do našeho prostoru; tato bota a část nohy, která v ní jest, jeví se pak, jako by byla odtržena od těla a volně se vznášela ve vzduchu.

Nejpodivnější věci však zažije, když se mu po několika marných pokusech podaří do čtyřrozměrného prostoru vsunouti hlavu. Nejprve nevidí nic; pak se mu objeví směs úseček a křivek čar, které se při pohybování hlavou prostupují, zkracují a protahují, zkrátka mění podivným způsobem. Pan Hontin usuzuje: Moje hlava jest v jakémsi novém trojrozměrném prostoru; tento seče trojrozměrný prostor, v němž byla dříve, v rovině, a proto vidím v původním trojrozměrném prostoru jenom řezy jednotlivých předmětů s touto rovinou. Pan Hontin si tento úsudek prakticky ověří tak, že pozoruje zpola naplněnou krabici na cigarety. Opatrným pohybováním se mu podaří zjistiti řadu rovinných řezů, z nichž snadno vykonstruuje krabici i s jejím obsahem. Pan Hontin pokračuje ve svých pokusech a nabude brzy zběhlosti v tom směru, že si rychle vykonstruuje trojrozměrné předměty z rovinných řezů, které vidí rychle za sebou. Dovede rozeznati trojrozměrné předměty, které drží v ruce a ve čtyřrozměrném prostoru jimi pohybuje. Naučí se přehlédnouti vnitřek uzavřených skříní v našem prostoru, může čísti z knih, které před ním leží uzavřeny. Jest pro něj hračkou proměnit levou botu v pravou, svléci košili, aniž by odložil vestu, vytáhnouti nohu ze zašněrované boty anebo vyjmouti předmět ze zamčeného stolu.

Posud se dařilo panu Hontinovi uchovati pokusy v tajnosti a jest přirozené, že si položí otázku, zda má svým spolu-

občanům oznámiti svůj objev. Po zralé úvaze se rozhodne svěřiti své tajemství *Dru Willsovi*, s nímž se častěji bavil o geometrii a jehož bodrého rozumu si velice váží. Snadno si představíme údiv pana *dra Willse*, když mu pan Hontin po prvé předvedl své pokusy o čtyřrozměrném prostoru. V následujících dnech probírají spolu možnosti, které přináší objev pana Hontina. Jest to především nezranitelná moc. Člověk, mající možnost pohybu do čtyřrozměrného prostoru, byl by v naprosté převaze nad ostatními. Pro něj by neexistovalo listovní tajemství; z nejpevnějších pokladen mohl by vyjmouti předměty, aniž by se dotkl stěn; viděl by skryté poklady v zemi; moc zákona by na něj nemohla a život každého jednotlivce z jeho okolí byl by v jeho ruce. Pan Hontin se svým přítelem přišli k poznání, že svět by vůči takovému nadčlověku zaujal stanovisko naprosto nepřátelské a snažil by se všemi způsoby, aby jej zničil, neboť zdi žaláře by pro něj neexistovaly.“

Někteří autoři připouštějí, že my lidé trojrozměrní a žijící v trojrozměrném prostoru jsme do značné míry závislí na dobré či špatné náladě čtyřrozměrných bytostí, ovšem existují-li. Prý jsme ustavičně vystaveni jejich nediskretní zvědavosti, mohou prý nám bráti peníze ze zavřených tobolek, vypíjetí nápoje z uzavřených lahví a do našich útrob nebezpečně vsahovati. Není to právě příjemná myšlenka; bohudíky, není však oprávněna. Naše tvrzení, že dvojrozměrná bytost může jednorozměrnou bytost zbaviti vézení jednorozměrného prostoru a právě tak my osobu dvojrozměrnou, není zcela správné; líčení takového počínu jest vlastně myšlenkový pokus. Jako my nemůžeme chopiti předmět pouze o dvou rozměrech, nemůže bytost čtyřrozměrná chopiti žádný předmět třírozměrný; to, co my v běžném slova smyslu vydáváme za předmět dvojrozměrný, jest ve skutečnosti věc trojrozměrná, jejíž třetí rozměr jest nepatrný. Analogicky pak jsme chráněni před zásahy ze čtvrtého rozměru od případných zlovolných jeho obyvatelů.