X. O ŘEŠITELNÝCH A NEŘEŠITELNÝCH ÚLOHÁCH GEOMETRICKÝCH

V kavárně u stolku blíže prostředního okna sedí několik pánů skloněno nad notýsky i okraji novin a cosi čárají; rukou společnou a nerozdílnou řeší marně úlohu, kterou „náš Jára“ onehdy dostal za domácí cvičení: má totiž sestrojiti kosočtverec, je-li dána jeho úhlopříčka a výška. Konstrukce vázne, připojují se poznámky o škole vůbec a geometrii zvláště, svůj díl dostane i profesor; otec hájí synovo zvláštní nadání ke geometrii — „vždyť dostal od strýce kružítko za tři sta korun“; a když druhý den ani kancelářští přátelé otcovi nedovedou úlohu rozřešiti (z kosočtverce se stal mezi tím kosodélník), jest včerejší diagnosa z kavárny v plném rozsahu potvrzena, zejména když Jára v poledne přijde ze školy a na otázku, jak to dopadlo s úlohou, hlásí třebas jaksi nejistě, „že to nikdo neměl a že profa marně úlohu řešil na tabuli, pak řekl: „Tak to smažte“, a Ferda prý se usmál a za to dostal pecku“. Tož to by byl asi nejběžnější druh neřešitelných úloh a velmi rozšířený.

Avšak žerty stranou, nejsou naším programem. Od úsvitu kultury provázejí člověka v řemesle i v umění dvě geometrické pomůcky: pravítko, dle něhož lze narýsovati přímku, a kružítko, kterým lze narýsovat kružnici. Za neřešitelné úlohy pak pokládáme ony, které skutečně nelze těmito pomůckami přesně rozřešiti; kriteriem, zdaž konstrukci lze skutečně provésti pravítkem a kružítkem, jest poznatek *J. Steinera*, že úloha těmito pomůckami řešitelná vede buď na kvadratickou rovnici nebo na takovou, kterou lze pomocí kvadratických rovnic řešiti; na př. úloha vedoucí na reciprokou rovnici stupně 4. jest řešitelná. Uveďme dva příklady. Sestrojiti pravidelný sedmnáctiúhelník, dán-li poloměr kruhu opsaného, vede na binomickou rovnici $x^{17} - 1 = 0$, a jest jedním z nejkrásnějších výkonů *Gaussových* důkaz, že tuto rovnici lze rozřešiti pomocí kvadratických rovnic.

Tuto větu objevil *Gauss* ve svých devatenácti letech (30. III. 1796, kteréžto datum pokládal za jedno z nejdůležitějších svého života). Oproti tomu sestrojiti pravidelný sedmiúhelník vede na rovnici $x^7 - 1 = 0$, kteráž po krácení $x - 1$ vede na reciprokou rovnici stupně šestého $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, a tu substitucemi

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

lze převésti na rovnici stupně třetího, kterou pomocí kvadratických rovnic řešiti nelze. Známe však velmi přibližnou konstrukci; hledaná strana jest polovina strany do kružnice vepsaného rovnostranného trojúhelníka. Tato konstrukce dává $a_7 = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 0{,}8660a$ (kde a je poloměr uvažované kružnice) místo správného $a_7 = 2a \sin \frac{1}{7}\pi = 0{,}8667a$, tedy chyba jest asi $0{,}8\,{}^0/_{00}$. O jiných konstrukcích přesných i přibližných viz 7. sv. této sbírky: *Hruška*, Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace, nebo též poslední kapitolu *Sobotkovy*: Deskriptivní geometrie promítání paralelního.

V odst. 4 jsme pojednali již o jiné úloze neřešitelné, totiž o kvadratuře kruhu nebo rektifikaci jeho obvodu. Avšak Řekové narazili ještě na jiné dvě úlohy, které nerozřešili ani oni ani matematikové během dalších více než dvou tisíc let. Jest to slavný problém délický, t. j. sestrojiti krychli, která má krychlový obsah dvakráte větší než daná krychle, a rozděliti úhel na tři stejné části. Pravou podstatu těchto úloh ukázala až uvedená věta *Steinerova* (1833), obě úlohy totiž vedou na rovnici stupně třetího:

$$x^3 - 2a^3 = 0, \quad x^3 - 3 \operatorname{tg} \alpha x^2 - 3x + \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

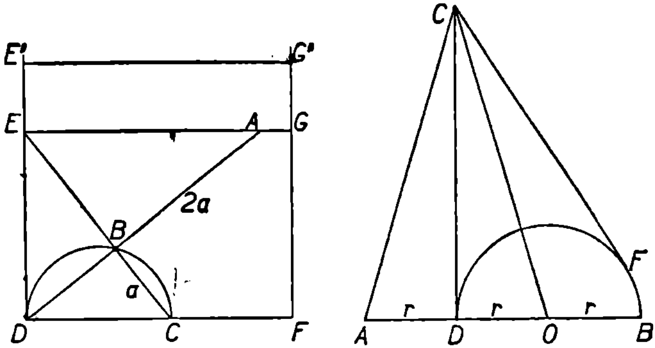
kdež $x = \operatorname{tg} \frac{1}{3}\alpha$. A přece jen tyto úlohy řešitelny jsou, připustíme-li vedle pravítka a kružítka pomůcku ještě jinou, na př. možnost jistého pohybu.

V obr. 71a značí *DFGE* dřevěný rámec, jehož hrana $\overline{E'G'}$ se může rovnoběžně pohybovati (v drážce) s hranou

$\overline{DF}$. Značme $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Tento pravý úhel vložme do rámu a pohybujme pohyblivou hranou i jím tak, až vzniknou úsečky $\overline{AD}$, $\overline{EC}$. Pak jest

$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{BE} = \overline{BE} : 2\overline{BC}$$

a znásobením obou rovnic $\overline{BD}^3 = 2\overline{BC}^3$, a odsud $\overline{BD} = a\sqrt[3]{2}$. To jest jednoduchý aparát, řešící délický problém; dle některých mínění byl již znám *Platonovi*.



a) Obr. 71. *b)*

V obr. 71b jest znázorněn přístroj, řešící mechanicky trisekci úhlu (nepříliš malého). Narýsujme si na průsvitný papír úsečku AB a rozdělme ji na tři stejné části, nad $\overline{DB}$ jako nad průměrem veďme polokružnici, v bodě D veďme kolmici. Máme-li roztřetiti úhel α, položíme průsvitný papír na jeho ramena tak, aby jedno jeho rameno procházelo bodem A, vrchol ležel na kolmici v patě D a druhé rameno aby se dotýkalo kružnice. Okamžitě jest patrno, že $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCO = \sphericalangle OCF$.

Připustíme-li pohyb jako konstruktivní pomůcku, lze řešiti i jiné úlohy, pravítkem a kružítkem neřešitelné; na př.

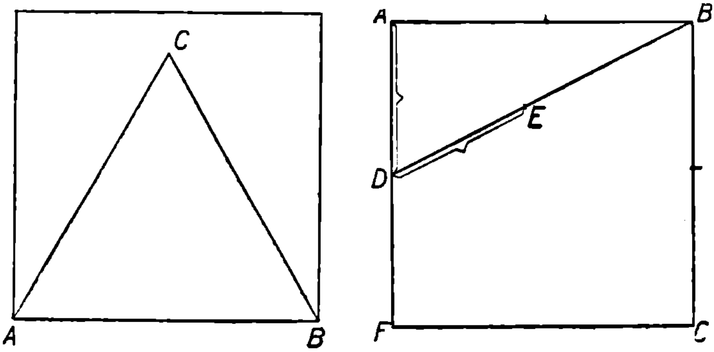
sestrojiti elipsu, k tomu slouží různé elipsografy. Historii obou problémů i jiné konstrukce viz v knize: *Enriques-Fleischer*: Fragen der Elementargeometrie II.

Čtenář snad i ze své vlastní zkušenosti ví, že vhodným překládáním a skládáním čtvercových, obdélníkových i kruhových papírů lze obdržeti různé hračky; nejznámější snad jest složení obdélníkového papíru do čáky a z ní do lodičky. Asi před čtyřiceti lty bylo využito těchto papírových skládanek k řešení planimetrických úloh, z nichž některé uvedeme. Přímku, která vznikne složením papíru ve dvě části, nazývejme přehybem.

1. Pravý úhel sestrojíme, vytvoříme-li přehyb a složíme-li nyní papír tak, že obě části přehybu se kryjí. Nový přehyb jest kolmý na první. Jak sestrojíte nyní dvě rovnoběžky? Jak sestrojíte pomocí obou předpisů obdélník?

2. Čtverec sestrojíme, sestrojíme-li nejprve obdélník, pak přehybem rozpůlíme jeden z jeho pravých úhlů, dalším přehybem již snadno vytvoříme čtverec.

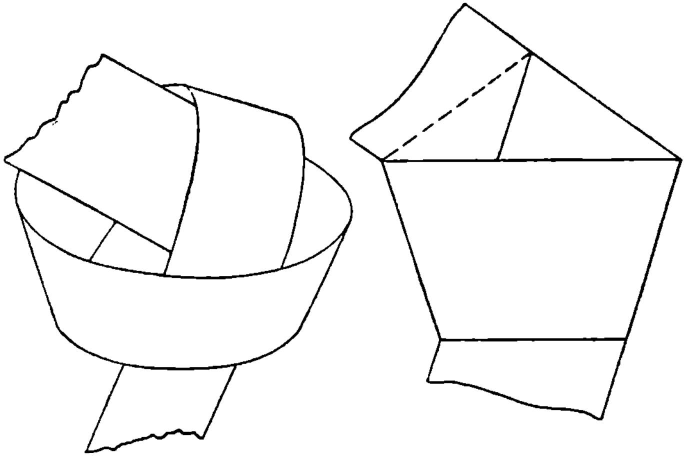
3. Rovnostranný trojúhelník nad danou úsečkou sestrojiti lze takto (obr. 72a): Sestrojíme nejprve čtverec, pak přehybem osu jedné ze stran. Nyní přehybem vycházejícím



a) Obr. 72. *b)*

z A přehneme papír tak, aby bod B padl na osu strany; tento bod C jest vrcholem rovnostranného trojúhelníka.

4. Danou úsečku rozdělíme zlatým řezem takto (obr. 72b): Přehyb jdoucí vrcholem B a půlicím bodem D jedné strany čtverce, nad ní sestrojeného, má délku $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Poněvadž větší část úsečky rozdělené zlatým řezem jest $\frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$, přehneme $\overline{AD}$ na přehyb $\overline{DB}$ do bodu E,

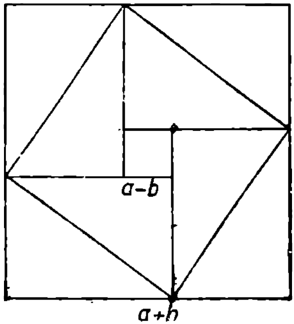


Obr. 73a.

dalším přehybem vycházejícím z bodu B lze bod E přenésti na stranu $\overline{AB}$, čímž je konstrukce hotova.

5. Konstrukci pravidelného pětiúhelníka znázorňuje obr. 73a; složený takto pruh papíru jest nutno pevně utáhnouti. Důkaz, že se skutečně touto konstrukcí dojde k pravidelnému pětiúhelníku, není právě snadný (viz *Kraitchik*: Les Mathématiques des Jeux).

Těchto skládanek bylo užito i jako důkazové methody; že součet úhlů v trojúhelníku jest úhel přímý, lze dokázati přehybem všech tří úhlů do jedné strany; přehyby vytvoří obdélník. V obr. 73b jest strana velkého čtverce $a + b$, čtyřmi přehyby snadno vytvoříme čtverec další. Trojúhelníky pak omezují čtverec třetí o straně $a - b$. A nyní lze jednoduše dokázati větu *Pythagorovu*; je-li strana druhého z čtverců c, jest buď $(a + b)^2 = c^2 + 4\,\frac{1}{2}\,.\,ab$, nebo $c^2 = (a - b)^2 + \frac{1}{2}\,.\,4ab$, v obou případech pak $a^2 + b^2 = c^2$.



Obr. 73b.