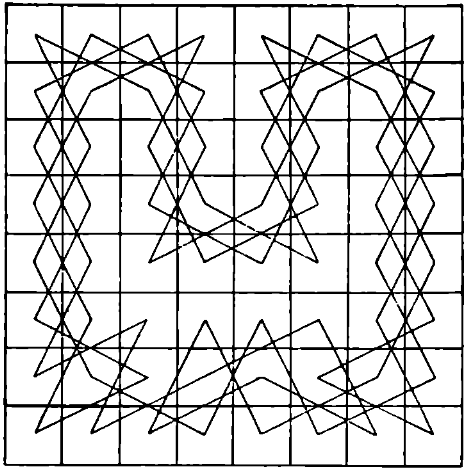
VII. HRY NA ŠACHOVNICI

a) Mnohé a skutečné hry ve velkém rozsahu užívají jednoduchých geometrických prvků (úseček, čtverců, jejich úhlopříček i stran) a přece je nelze dobře nazvati hrami geometrickými. Jsou to zejména hry na šachovnici (vlk a ovce, volná dáma a její opak rychlá dáma a j.); zde stručně se zmíníme o dvou úlohách vyrostlých ze známé hry šachové, asi nejdokonalejší z her vůbec. Jak známo, hraje se na šachovnici o osmkráte osmi polích, působnost figur jest určena úsečkami rovnoběžnými se stranami čtverce i jeho úhlopříčkami; pohyb koníčka jest dán úhlopříčkou obdélníka o stranách dvou a tří základních dílců. Jest mnoho zevnějších důvodů, pro něž laik přisuzuje šachové hře vlastnosti hry matematické; úspěch ve hře šachové i v matematickém bádání vyžaduje jak přesného logického uvažování, tak jisté intuice. Není náhodou, že z dosavadních pěti mistrů světa (*Steinitz*, *Lasker*, *Capablanca*, *Alechin*, *Euwe* a opět *Alechin*) byli dva matematikové i vědecky činni (*Lasker*, *Euwe*). Laika klame dále i notace této hry upomínající na algebraické výrazy i číselné hodnocení figurek, vyhraných i prohraných partií.

Dvě veliká jména matematická jsou spojena s úlohami na šachovnici; jest to *L. Euler* a *C. F. Gauss*. *Euler* zabýval se úlohou, jež jest mnohem starší než jeho zájem o ni. Jde o to, koníčkovým skokem projíti souvislou lomenou čarou všemi poli obyčejné šachovnice, a to každým polem jen jedenkráte. Jedno z *Eulerových* řešení znázorňuje obr. 57a. Všimněme si, že při tomto řešení lomená čára jest uzavřena, takže za výchozí pole lze voliti kterékoliv pole.

Velmi dobře lze užíti tohoto pravidla *Warnsdorfova*: Koníčka postavíme na takové místo, s něhož má potom pokud možno nejmenší možnost dalších tahů; je-li takových míst více, jest lhostejno, pro které z nich se rozhodneme. (Viz obr. 57b, kde jsou jednotlivé tahy očíslovány podle



a)

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

b)

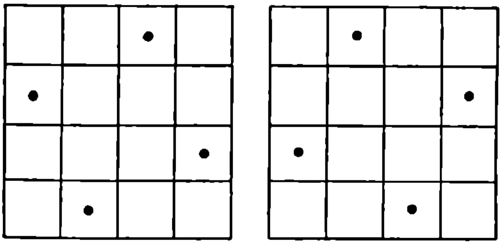
Obr. 57.

pořadí. Lze tedy obecně říci, že se obsazují nejdříve místa co nejblíže krajům. Při tom je možno tahy voliti tak, aby při zavedeném očíslování vznikl na šachovnici čtverec, v němž součty čísel v každé řadě i v každém sloupci jsou stejné. (Viz obr. 57b). Lomené čáry, znázorňující pohyb koníčka po šachovnici, mají různé symetrické vlastnosti; této vlastnosti užívají již od sta let hádankářské rubriky k sestrojování t. zv. koníčků. Normální šachovnici lze nahraditi i obdélníky ba i komplikovanějšími útvary stylisovanými do tvarů písmen, květů a pod. Byly řešeny i úlohy mnohem obecnější, na př. *Fitting* (Mathem. Mussestunden) uvádí obdobnou úlohu pro krychli o $4 \times 4 \times 4$ polích; koníčka lze nahraditi figurou, jejíž pohyb se děje po úhlopříčce obdélníka o stranách 3, 4 atd. Uvažujme šachovnici o 3×3 polích, pole očíslujme od levého rohu nahoře počínaje čísly *1* až *9*. Na *1*. a *3*. pole postavme koníčky bílé, na pole *7*. a *9*. pak černé. Jest koníčkovým skokem vyměniti jezdce *1*, *3* za jezdce *7*, *9* a tyto jest zase umístiti na *1*, *3*. Pořadí tahů jest toto: *1*, *8*; *3*, *4*; *9*, *2*; *7*, *6*; *4*, *9*; *6*, *1*; *2*, *7*; *8*, *3*. Tím jsme seskupení koníčků vlastně otočili o 90°, opakujeme-li tedy ještě jednou uvedené tahy, obdržíme žádanou posici. Jsou-li koníčky stejné barvy v koncových bodech úhlopříčky, stačí provésti toto pořadí tahů jen jednou.

Ukažte, je-li o obvod šachovnice, že celková dráha koníčka při této úloze jest $2o\sqrt{5}$; předpokládáme, že figurku klademe vždy do středu pole.

Za téhož předpokladu úhrnná délka, kterou vykonají figurky bílého při známé „nesmrtelné partii“ (*Zmatlík*, Šachy, III. vyd., str. 175-76), jest rovna $13 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{5} \doteq 49$ stranám po'e, dráha černých figur pak $8 + 22\sqrt{2} + 6\sqrt{5} \doteq 52{,}5$ stran pole, tedy o 3,5 větší. Změřte takto „délku“ i jiných šachových partií.

b) O sto let později a ke sklonku svého života zabýval se *C. F. Gauss* jinou úlohou na šachovnici: postaviti na normální šachovnici osm královen tak, aby se navzájem nemohly bráti. Ihned jest zřejmo, že nutnou podmínkou jest, aby na žádném sloupci ani v žádném řádku nestála než jedna královna. Na jednoduchém případě popíšeme *Gaussovu* methodu methodického pokusu. Nejmenší šachovnice, na níž jest úloha řešitelna, jest šachovnice o 4 × 4 polích. Postavíme-li královnu na *a1*, zbývají nám pole *c2*, *d2*, *b3*, *d3*, *b4*, *c4*. Postavíme-li však nyní další královnu na *c2* nebo *d2*, snadno se přesvědčíme, že bychom mohli již postaviti jedinou královnu; nevede tedy předpoklad o krá-



Obr. 58.

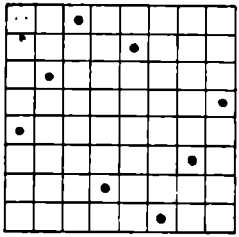
lovně na *a1* k cíli. Královna na *b1* pak umožňuje toto postavení: *d2*, *a3*, *c4*, královna na *c1* pak dává řešení *a2*, *d3*, *b4*. Předpoklad o královně na *d1* pak opět nevede k cíli. Jsou tedy pro $n = 4$ tato dvě řešení (obr. 58).

Všimněme si, že druhé řešení jest zrcadlovým obrazem prvního, ať již dle vodorovné nebo svislé hrany této šachovnice.

Poněvadž ani na hlavní ani na vedlejší úhlopříčce nestojí žádná z královen, obdržíme řešení pro šachovnici o 5 × 5 polích, obložíme-li šachovnici o 4 × 4 polích dalším sloupcem a další řádkou a na pole jim společné postavíme pátou královnu. Tak z každého řešení pro šachovnici 4 × 4 obdržíme 4 řešení, tedy celkem 8 řešení pro šachovnici 5 × 5. Avšak lze též pátý sloupec a řádek vložiti mezi 2. a 3. sloupec resp.

řádek a na společné jim místo položiti královnu; tak obdržíme dvě další řešení, takže na šachovnici 5×5 jest možno deset různých řešení. Podobnými úvahami, jichž složitost ovšem roste s počtem polí, bylo zjištěno, že pro $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ existuje postupně 4, 40, 92, 352, 724, 2680, 14032 řešení.

Některá z těchto řešení slují základní; další z nich lze odvoditi elementárními geometrickými transformacemi (zrcadlení, otočení a pod.). Uveďme ještě řešení pro $n = 8$; k zapamatování jest velmi přehledné:



Obr. 59.

Ve vzájemném postavení jakéhokoliv počtu královen řešících danou úlohu lze vystopovati různé symetrie i jiné vztahy, jež se staly předmětem četných a složitých úvah užívajících namnoze honosně matematického názvosloví (na př. dvojperiodické řešení) avšak jejich obsah po matematické stránce jest dosti chudý, třebas *Pólya* uvedl tyto úlohy ve složitý systém nerovností a kongruencí.

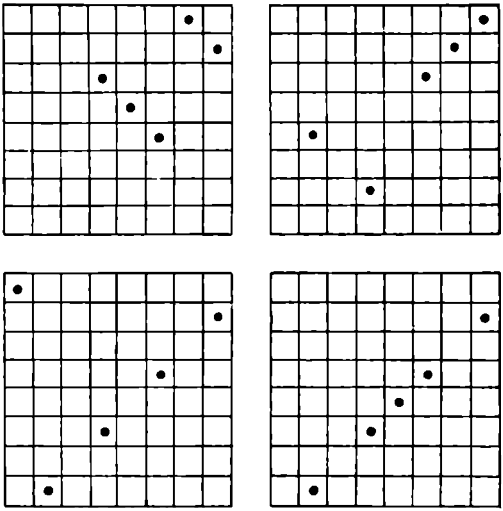
Ukažte, že n věží na šachovnici o $n \times n$ polích lze celkem umístiti n krát tak, aby se navzájem nemohly vzíti.

c) Jakýmsi protějškem úlohy o královnách jest vyšetřiti, kolika královnami lze ovládnouti všechna pole na šachovnici o $n \times n$ polích; při tom nečiňme rozdílu, zdaž místo, na němž

Rozsah šachovnice:	Počet královen:	Počet řešení:
2×2	1	4
3×3	1	1
4×4	2	12
5×5	3	182
6×6	4	120
7×7	4	?
8×8	5	4860

královna stojí, pokládáme za napadené či ne. Tento úkol jest, ve srovnání s oběma předchozími, data mnohem mladšího; několik výsledků v tabulce na str. 73.

Uveďme několik zajímavých postavení na normální šachovnici (obr. 60):



Obr. 60.

Ukažte, že na obdélníkové šachovnici o p, q polích lze provésti věží celkem $pq\,(p + q - 2)$ tahů, tedy na normální šachovnici celkem 896 tahů.