Geometrické hry a zábavy

IV. Kruh a koule

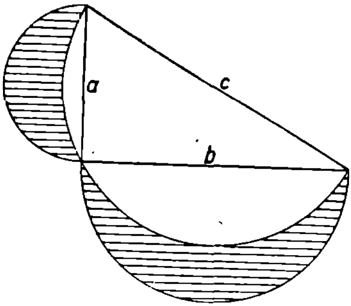
In: Karel Čupr (author): Geometrické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 37–46.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403188

Na oba útvary dovedl starověk i středověk vzhlížeti velmi romanticky a obdivoval se jim z několika důvodů.

Kruh prý jest obrazec nejdokonalejší a nejdůležitější; příroda sama ho napodobí, nebesa a jiná tělesa jsou okrouhlá, poněvadž v kruhu jest jedině dokonalost. Člověk rovněž své výrobky nejraději krouží do kruhu a koule (nádoby, číše a j.). Jinou význačnou vlastnost, kterou přiřkli kruhu, byl největší obsah, poněvadž kruh nemá žádných koutů ani rohů. A hle: po tisíciletí stál člověk bezradně nad tímto nejdokonalejším útvarem, chtěl-li řešiti úlohu, která se mu vnucovala vždy, setkal-li se s útvarem rovinným i prostorovým: seznati obvod, obsah, povrch, krychlový obsah. Tuto úlohu rozřešil vzorci někdy velmi složitými (*Heronův* vzorec pro obsah trojúhelníka daného stranami nebo obdobný vzorec pro obsah čtyřúhelníka tětivového). Při svém nejobdivovanějším útvaru musil se spokojiti hrubším či jemnějším odhadem. Již v tom byl veliký pokrok, když otázka byla formulována do věty: kolikráte lze nanésti průměr kruhu na obvod? Velmi záhy se však vědělo, že ze známé délky průměru kruhu lze vypočísti jeho obsah a obvod. Nejhrubší odpovědí na tuto otázku bylo, že průměr na obvod lze nanésti třikráte. Ve Starém Zákoně v třetí knize Královské (7,23) čteme líčení o vnitřním zařízení chrámu *Šalamounova*, stavěného asi tisíc let před Kristem ... „Dále udělal moře lité deset loket od kraje ke kraji okrouhlé vůkol ... provazec na třicet loket bylo dlužno ovinouti kolem něho“. (*Hejčl*, Bible česká, 932). Egyptský *Ahmes*, žijící asi pět set let před biblickým *Abrahamem*, určil poměr obvodu kruhu a průměru jeho na $(\frac{16}{9})^2 = 3{,}1605$; nejdokonaleji určil tento poměr v třetím století před Kristem *Archimedes*, sevřev ho nerovninou $3\frac{10}{71} < p < 3\frac{1}{7}$ čili $3{,}1408 < p < 3{,}1428$, takže aritmetický střed obou mezí jest 3,1418, tedy o 0,07 ‰ více než hodnota, kterou známe my. Přibližné hodnoty $\frac{22}{7}$ užívá se pro zběžné výpočty.

Archimedes též věděl, že povrch koule jest čtyřikráte tak velký jako obsah největšího jejího kruhu. I divili se Řekové nemálo, že existují rovinné útvary omezené kruhovými oblouky, jichž obsah lze přesně vypočísti. Nejproslulejším útvarem tohoto druhu jsou t. zv. *Hippokratovy měsíčky* (viz obr. 34), obsah obou měsíčků jest totiž $\frac{1}{2}\pi\,(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2) + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}\pi c^2 = \frac{1}{2}ab$, rovná se tedy obsahu daného pravoúhlého trojúhelníka. Jiné útvary, které Řeky zajímaly, rovněž pocházejí od *Hippokrata*, jest to arbelos (nůž, knejp; viz obr. 35) a salinon (snad mořské vlny).

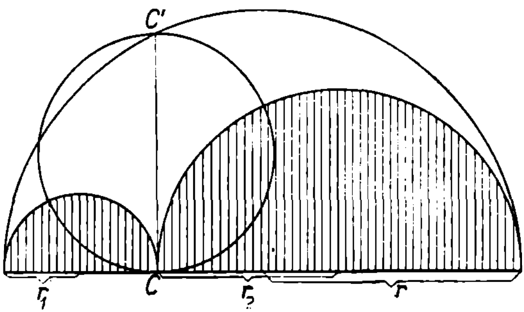


Obr. 34.

Obsah prvního jest

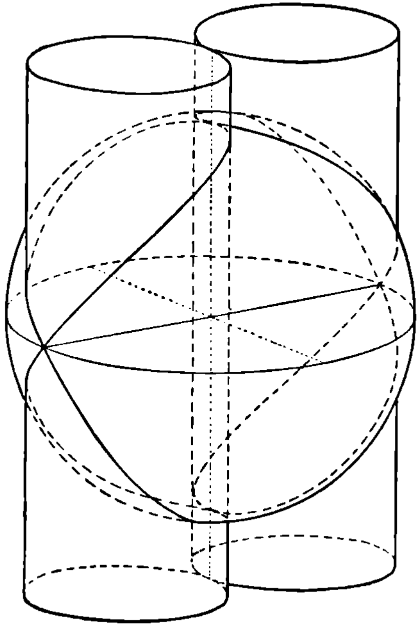
$$\frac{1}{2}\pi\,(r^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{1}{2}\pi\,(r^2 - (r_1 + r_2)^2 + 2r_1r_2) = \pi r_1 r_2 =$$
$$= \pi\,\frac{1}{2}(\sqrt{2r_1(2r - 2r_1)})^2,$$

tedy jest tak velký jako kruh nad úsečkou $\overline{CC'}$ sestro-



Obr. 35.

jený jako nad průměrem; délka druhého útvaru jest polovina obvodu dané kružnice. Podobně se téměř o dva tisíce let později podivoval italský matematik *Viviani* tomu, že plocha, jež z polokoule o poloměru *r* zbude vytnutím dvou



Obr. 36.

okének (po něm zvaných Vivianiho) s pomocí dvou rotačních válců majících podstavu na společné hlavní kružnici o poloměru rovném polovině poloměru daného kruhu, jest rovna čtverci nad průměrem tohoto kruhu. (Důkaz se provádí integrálním počtem). (Obr. 36.)

I vinuly se snahy matematiků od nejstarších dob až po naše dvěma směry; někteří snažili se číselně co nejpřesněji určiti tento poměr, druzí hledali souvislost mezi obsahem kruhu a obsahem jiného útvaru, jemuž starověká mystika a středověká romantika rovněž přiřkla vyšší dokonalost, totiž se čtvercem; nalézti čtverec, jenž by svým obsahem rovnal se obsahu daného kruhu, bylo předmětem úvah nesčetných matematiků; jest to t. zv. kvadratura kruhu nelišící se podstatně od rektifikace kružnice nebo její části. Toto usilování vyvrcholilo koncem století šestnáctého, kdy (na př. *Vieta*) vypočetli hledaný poměr na deset, dvacet i více desetinných míst. Stanovení tohoto poměru i jeho pojmenování zůstane spjato s jménem holandského matematika a vojenského stavitele *Ludolfa van Ceulen* (též *Keulen*, *Collen*). Poměru tomu se dostalo označení π a názvu číslo *Ludolfovo*. *Ludolf* sám vypočetl toto místo na 35 desetinných míst.

Poznamenejme, že tento vědecký zápas o stanovení čísla π našel odezvy i v *J. A. Komenského* Labyrintu světa a lusthausu srdce v 10. odstavci XI. kapitoly: „Kteří mezi nimi nejučenější byli sestupovali se do prostřed a pokoušeli se očsi velmi úsilně, načež viděl jsem, že jiní všichni s otevřenými ústy očekávají; a bylo o tom řečí mnoho, jak by to nade všeho světa subtilnosti divnější bylo, a kdyby se vynalezlo, že by již nic nebylo nemožného. Já tedy, co to jest, věděti žádostiv jsa, přistoupil jsem a spatřil, že kolo mezi sebou mají, o něž otázka jest, jak by z něho quadrát udělán býti mohl .... Tožť po malé chvíli nenadále jeden vyskočí volaje: Mám, mám tajemství odkryté, mám! I shlukli se k němu všichni, viděti a diviti se chvástajíce. A on vynesa velikou knihu in folio, ukazoval jim. I stali se hlasové a pokřikování, jakéž po vítězství bývá. Ale tomu plesání jiný hned brzy přítrž učinil, co hlasu měl, křiče, aby se mámiti nedali, že quadrát není, a postaviv ještě větší knihu, všecky onoho domnělé quadráty zase v kola obrátil, mocně to provodě, že, oč se onen pokusil, toho člověku dovésti možno není. I sklopili všichni hlavy a navrátili se k čarám svým“.

Výpočet *Ludolfův* udává číslo s přesností pro praktické potřeby až zbytečnou, vždyť použijeme-li pouze prvních

pěti desetinných míst $\pi = 3{,}14159$, dopustíme se, počítajíce obvod kružnice o poloměru 1 km, chyby pouze asi 15 mm. *Ludolfův* výpočet se stal jakýmsi pravzorem početního ne-li matematického výkonu vůbec a celé generace učily se těchto třicet pět desetinných míst zpaměti. Aby se tato dlouhá řada číslic snáze pamatovala, byly vymyšleny — a to ve všech jazycích — různé mnemotechnické pomůcky. Jedna z nich založena jest na tom, že se tvoří věty složené ze slov, jež mají stejný počet hlásek jako má jednotek odpovídající číslice, na příklad: Mám, ó Bože, ó věčný, *Ludolfovo* pí paměti
3 1 4 1 5 9 2 6
slabé své podat atd.
5 3 5

Ovšem tato pomůcka má svoji vadu, nelze jí použít přes 31. desetinné místo, jelikož na dalším místě stojí 0 a recitátor musí zmlknout. Proto pomůcka podati věty, jichž slova začínají touž hláskou jako příslušná číslice, jest poněkud lepší: slova počínající písmenou ř značí 9: Takto jednou člověk jeden pěknou řadu dlouhou špatné
3 1 4 1 5 9 2 6
paměti, tvrdošíjné, připomněl: Opakoval řádně slov řadu
5 3 5 8 9 7 9
tuto, došel této odměny: Čas šťastně drahý šetřil. Člověk ten
3 2 3 8 4 6 2 6 4 3
totiž opět třetího dne sumu řekl. Pak délku nezapomněl
3 8 3 2 7 9 5 2 0
obvodu, obsah.
8 8

Výpočet čísla na 35 míst byl mnohokráte a znamenitě předstižen; před sedmdesáti lety byl proveden na více než sedm set míst (u nás dokonce před několika lety byl uveřejněn výpočet čísla π na více než tisíc míst, ale ten již v prvních desíti místech se lišil od správného výpočtu). Vytrvalost těchto počtářů opravdu lepší věci hodná snad tkvěla v touze podati něco bližšího o aritmetické povaze čísla π, není-li přece jen vyjádřeno číslem konečným nebo periodickým zlomkem; v obou případech by bylo číslem racionálním, t. j. takovým, že by je bylo možno znázorniti podílem dvou čísel celistvých kladných; pak by ovšem kvadratura kruhu nebo rektifikace obvodu aspoň theoreticky byla možná. Souběžně s těmito výpočty (a již dlouho před nimi) usilují praktikové aspoň o různé přibližné konstrukce, z nichž velmi jednoduchá a zároveň postačitelně přesná jest konstrukce *Kochańskiho* (viz *Hruška*: Konstrukce s omezenými prostředky, této sbírky č. 7, str. 53), udávající $\pi = 3{,}141533$; ještě lepší (avšak složitější, takže přesnost výsledku jest ohrožena složitostí konstrukce) jest návod *Spechtův* (viz *Sobotka*, Deskriptivní geometrie promítání parallelního, Sborník Jednoty č. matematiků a fysiků, X., str. 612) podávající $\pi = 3{,}1415919$. Avšak tímto jednoduchým způsobem nebylo možno dosíci vědomosti o aritmetických vlastnostech čísla π, to stalo se methodami vyššími: *Lambert* (1770) ukázal, že π jest číslo irracionální; totéž pro π^2 odvodil *Legendre* (1794). *Lindemann* pak před šedesáti lety ukázal, že *Ludolfovo* číslo nemůže býti kořenem žádné algebraické rovnice, jejíž koeficienty jsou čísla celistvá, tedy že jest číslo, jak se stručně říká, transcendentní. A tím byl vlastně vynesen rozsudek o domnělé správnosti laických konstrukcí kvadratury i rektifikace. Škoda, že nedolehl až ke stolům a rýsovacím prknům pilných počtářů a konstruktérů i naší doby, kteří své objevy sdělují i na korespodenčních lístcích i na rysech někdy o ploše i několika čtverečních metrů a není pro ně dost přesvědčivých slov.

Ale přece moderní doba dala starým v něčem za pravdu, ovšem otázky, které si kladli oni, poněkud pozměnila. Nikoliv kruh, nýbrž poměr jeho obvodu k jeho průměru, jest číslem podivuhodným a objevujícím se při nesčetných příležitostech a matematických úvahách. Jest vyjádřeno řadami i součiny, podivuhodnými pro jejich pravidelnou vnitřní stavbu, na př. *řadou Leibnizovou*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

nebo z ní plynoucí řadou

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{5\,.\,7} + \frac{1}{9\,.\,11} + \ldots$$

Jiné řady jsou:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 + \ldots$$

Uveďme ještě nekonečný součin *Wallisův*:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2} \cdot \frac{3\,.\,5}{4\,.\,4} \cdot \frac{5\,.\,7}{6\,.\,6} \ldots$$

S jakou přesností určuje *Leibnizova* řada π, sečteme-li 50 000 jejích členů? Pro skutečný výpočet se proto užilo jiných řad, z této řady odvozených.

Rovněž myšlenka starých, že kruh jest figura capacissima, útvar nejobsažnější, ozvala se v moderním pojetí isoperimetrického problému, který hledá obrazec největšího obsahu při daném obvodě, ovšem za jistých předpokladů. Jeden z nich jest, že obrazec jest uzavřeným útvarem konvexním (oválem); každá přímka, která jej protíná, činí tak jen ve dvou bodech. Vyloučíme-li ze vztahů určujících obvod O a obsah P kruhu poloměr r, obdržíme vztah $O^2 = 4\pi P$. Pro jiné konvexní útvary rovinné pak platí $O^2 > 4\pi P$. Podobně pro povrch a krychlový obsah koule P a K platí $P^3 = 36\pi K^2$, kdežto pro ostatní konvexní tělesa (podobně definovaná jako konvexní rovinné útvary) jest $P^3 > 36\pi K^2$. Soustavně o tomto problému pojednal na př. *Blaschke*: Kreis und Kugel, 1916.

a) Uveďme ještě několik příkladů o kruhu a kouli. Súčastněme se tohoto myšlenkového pokusu: Rovník má délku 40 000 km = 40 000 000 m; načechráme-li nit o délce o 10 m větší než jest rovník všude stejně vysoko nad rovníkem, vznikne jistá mezera; stačí její šířka, aby jí proklouzla myš? Šířka této mezery (mezikruží) jest

$$\frac{40000010}{2\pi} - \frac{40000000}{2\pi} = 10 \text{ m} : 2\pi \doteq 1{,}6 \text{ m},$$

tedy projde jí i prostředně velký člověk. Řešte tutéž úlohu v tom případě, že o 10 m delší nit načechráváme kol hrachu, jehož poloměr jsou 3 mm. Jinou úpravu téže úlohy lze čísti u *Jul. Vernea*: O kolik delší dráhu vykoná hlava dvoumetrového obra, obejde-li zeměkouli po rovníku?

b) Do kopacího míče o poloměru r vpravíme ještě k cm³ vzduchu, oč se zvětší jeho povrch, je-li k vůči původnímu krychlovému obsahu dosti malé? Je-li poloměr původní koule r, jest její krychlový obsah $\frac{4}{3}\pi r^3$, poloměr koule po vpuštění k cm³ jest určen rovnicí

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + K = \tfrac{4}{3}\pi r_1{}^3,$$

odkud

$$r_1 = \left(r^3 + \frac{3K}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq r + \frac{K}{4\pi r^2}.$$

Plošný povrch této koule jest přibližně $4\pi\left(r^2 + \frac{K}{2\pi r}\right)$, takže se proti původnímu stavu zvětšil o $\frac{2K}{r}$.

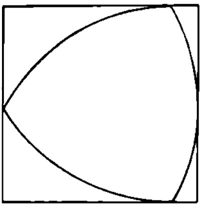
c) Podél rovníku nasypeme násep o šířce 5 m a výšce 2 m; oč se zvětšila váha zeměkoule? Krychlový obsah tohoto prstence lze počítati jako rozdíl dvou válců; než bude čtenář pokračovati v řešení této úlohy, ať si rozmyslí, odkud vezmeme stavivo na tento násep.

d) Narýsujeme-li v každém vrcholu čtverce o straně a kružnici o poloměru $\frac{1}{2}a$, ohraničí tyto kružnice plochu o obsahu $a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2(1 - \frac{1}{4}\pi) \doteq 0{,}215a^2$; vedeme-li kružnice z vrcholů kosočtverce o ostrém úhlu 60°, vznikne tak plocha o obsahu $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi) \doteq 0{,}081a^2$. V prvním případě pravíme, že jsou kružnice uloženy nejvolněji, v druhém případě pak nejtěsněji.

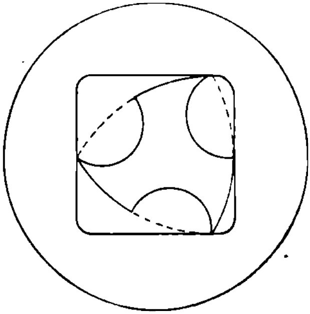
e) Obdobná úloha v prostoru o krychli a osmi koulích sestrojených ve vrcholech krychle a o poloměru rovném polovině hrany vede k objemu $a^3 - \frac{4}{3}\pi (\frac{1}{2}a)^3 = a^3 (1 - \frac{1}{6}\pi) \doteq \doteq 0{,}476a^3$. Uvažujeme-li klenec omezený šesti shodnými kosočtverci o ostrém úhlu 60°, vznikne mezera $a^3 (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\pi) \doteq \doteq 0{,}173a^3$. Opět mluvíme o nejvolnějším a nejtěsnějším uložení koulí v prostoru. Zejména druhý případ zajímá i praxi, jde totiž o uložení drobného písku, jímž prochází voda nebo o složení z drobných částiček různých kalů v cukrovarnictví (na př. *Burmester*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik IV., str. 33., *Dr. J. Hrubíšek*, Kolloidbeihefte, Bd. LIII., str. 385). Při nejtěsnějším uložení (stejných) koulí se každá vnitřní dotýká dvanácti vnějších, body dotyku pak určují kubooktaeder, v němž ve velmi vzácných případech krystalisuje galenit čili leštěnec olovnatý. Těchto dvanáct bodů lze však též považovat za body dotyku dvanáctistěnu kosočtvercového, v němž krystaluje granát, odsud jiný název tohoto tělesa — **granátotvar.**

f) Nejprve malou poznámku z logiky. Čtenář, jenž se jí na střední škole zabýval, ví, že obrátíme-li soud „z S plyne P“, obdržíme soud „z P plyne S“; méně učeněji a na výstižném příkladě: Každý sextán jest student, není však každý student sextánem. Správně obraceti soudy v geometrii jest velmi důležito i prospěšno; tak mnohé věty se dostávají teprve do pravého světla. Na př. Obvodové úhly v kružnici nad touž tětivou jsou stejné, ale platí opačně: Geometrickým místem bodů, z nichž lze danou úsečku viděti pod týmž úhlem, jsou dva kruhové oblouky. Jest tedy věta o úhlech obvodových výrokem do jisté míry charakterisujícím kružnici, podobné vlastnosti žádná jiná křivka nemá.

Tažme se, zda vlastnost kružnice, že jest všude stejně „široká“, t. j. že má všechny průměry stejně dlouhé, jest jejím charakteristickým znakem. K svému nemalému překvapení zjistíme, že nikoliv, že existují i jiné křivky, které mají vesměs stejnou „šířku“. Nutno si především pojem šířky podrobněji definovat. Omezme se jen na útvary konvexní omezené (ovály). Vytkněme si mimo tuto křivku směr S a promítněme do přímky kolmo stojící k tomuto směru všechny body obvodu našeho oválu. Paty těchto promítajících rovnoběžek vyplní úsečku, její délku pak nazýváme šířkou křivky dle směru S. Tato šířka jest na př. u kružnice pro všechny směry rovna průměru této kružnice, u elipsy o poloosách a, b kolísá mezi $2a$ a $2b$. Sestrojme si nyní obrazec omezený oblouky téhož polo-



Obr. 37.



Obr. 38.

měru a patřícími k středovým úhlům 60°. Snadno ukážeme, že tento ovál má rovněž touž šířku rovnou poloměrům kružnic, jejichž oblouků jsme užili k sestrojení tohoto obrazce. Vyrobíme-li si na př. dřevěnný model tohoto trojúhelníka a uložíme-li jej do čtvercové krabice o straně rovné šířce tohoto oválu, můžeme tímto trojúhelníkem pohybovati uvnitř čtverce právě tak bez závady jako s kruhem. Této myšlenky bylo užito k sestrojení vrtáku vrtajícího čtvercové otvory; vrcholy čtverce pak jsou poněkud zaobleny*). (Obr. 38.)

Ukažte, že i pětiúhelník i sedmiúhelník atd. jsou křivky stejné šířky.

*) *Rud. Beyer:* Technische Kinematik, 1931, str. 18 a 19.