Geometrické hry a zábavy

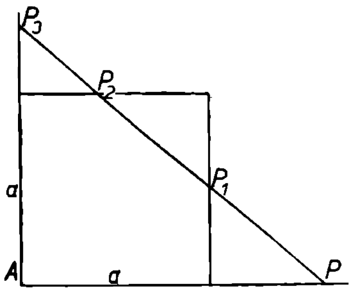
III. Grafické řešení některých úloh z foronomie

In: Karel Čupr (author): Geometrické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 32–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403187

III. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH Z FORONOMIE

A. (Srovnej Aritmetické hry a zábavy, odstavec 10). Čtenáři snad jest divno, že v předchozím odstavci byly pominuty konstruktivní úlohy z planimetrie. Jsou jistě mezi nimi příklady velmi zajímavé, snadné i nesnadné, úlohy, jimiž se zabýval starověk, jež potřeboval kamenický mistr při konstrukci gotických kružeb i oken, i úlohy data mnohem mladšího. K první skupině patří proslulý problém *Apoloniův*: Sestrojiti kružnici, jež se dotýká tří daných kružnic. Některé z těchto kružnic mohou přejíti v body i přímky a tak docházíme k desíti různým úlohám: K, K, K; K, K, P; K, P, P; P, P, P; K, K, b; K, b, b; b, b, b; K, P, b; P, P, b; P, b, b, z nichž první jest značně nesnadná (viz č. 4 této sbírky: *Holubář*: O methodách rovinných konstrukcí), kdežto jiné, na př. b, b, b, patří mezi elementární úlohy. K těmto desíti úlohám *Apoloniovým* již starověk přidružil šest úloh *Pappusových*, v nichž jest dán bod dotyku hledané kružnice buď na kružnici nebo na přímce: $K(b), K$; $K(b), P$; $K(b), b$; $P(b), K$; $P(b), P$; $P(b), b$. Téměř o dva tisíce let mladší jest úloha *Malfattiova*: Do daného trojúhelníku vepsati tři kružnice, jež se dotýkají dvou stran a zároveň po dvou mezi sebou. (Viz *Vil. Rychlík*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. XL.). V poslední době se častěji projevil zájem o tuto úlohu: Jest sestrojiti čtverec, jehož strany jdou čtyřmi danými body. Není to úloha právě snadná, řešení velmi jednoduše se dovodí, leží-li tyto čtyři body na přímce. Pak jest (obr. 29)

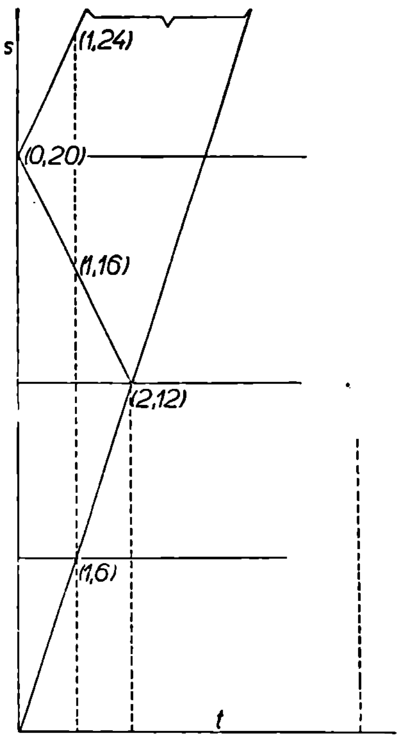


Obr. 29.

$\overline{PA} : a = \overline{PP_3} : \overline{P_1P_3}$, $\overline{P_3A} : a = \overline{PP_3} : \overline{PP_2}$, odkudž $\overline{AP}$: : $\overline{AP_3} = \overline{PP_2} : \overline{P_1P_3}$; při tom jest a strana hledaného čtverce, $\overline{PP_3}$ průměr kružnice, na jejímž obvodě leží jeden vrchol čtverce. Jest tedy nad danou přeponou sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru známých úseček.

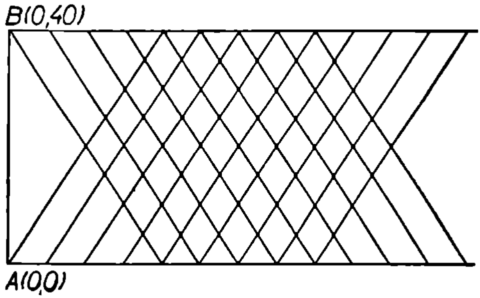
B. Než na tom dosti; ukažme raději, jak možno nejjednodušším konstrukcemi řešiti některé lineární rovnice.

Narýsujme dvě k sobě kolmé přímky; na přímku vodorovnou nanesme čas v určitých jednotkách, jmenujme ji osou času t, na přímku kolmou nanášejme vykonanou dráhu, jmenujme ji osou dráhy s. Pak pohyb rovnoměrný bude znázorněn přímkou, jejíž směrnice jest dána rychlostí tohoto rovnoměrného pohybu. Rozřešme dvě základní úlohy o pohybu: 1. Dvě tělesa počnou se současně pohybovati proti sobě ze vzdálenosti 20 km, a to první rychlostí 6 km a druhé 4 km, kde a kdy se setkají? 2. Táž tělesa z téže vzdálenosti a o týchž rychlostech se pohybují za sebou (první za druhým), kdy se setkají? (Obr. 30.)



Obr. 30.

První těleso za hodinu dostihne bodu (1; 6), tím jest určena přímka znázorňující pohyb prvního tělesa. Druhé těleso počne se pohybovati z bodu (0; 20) a za první hodinu dostihne v prvním případě bodu (1; 16), v druhém pak bodu (1; 24). Tyto body určují přímky znázorňující pohyb druhého tělesa. Jejich průsečíky s přímkou znázorňující pohyb prvního bodu svými úsečkami udávají dobu setkání obou těles, svými pořadnicemi pak vzdálenost, ve které se setkají; tedy v prvním případě se setkají za dvě hodiny 12 km od místa, z něhož se počalo pohybovat první těleso, v druhém případě se setkají za 10 hodin 60 km od tohoto bodu. To jest základní myšlenka, jež nám umožní řešiti úlohy mnohem složitější.

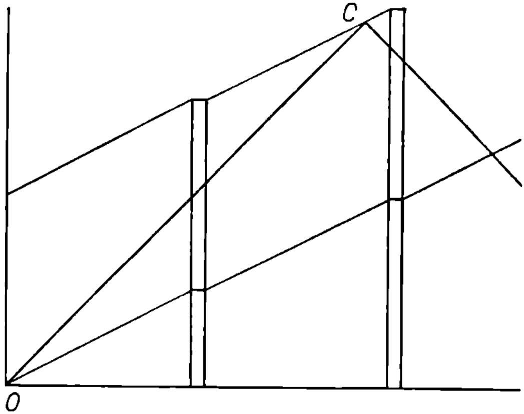


Obr. 31.

a) Z místa A vyjíždějí v každou půlhodinu vlaky do místa B vzdáleného 40 km; současně s každým tímto vlakem vyjíždí z místa B toutéž rychlostí vlak do A. Je-li tato rychlost 20 km za hodinu, kolik který vlak potká vlaků vyjíždějících z protější stanice? Odpověď vyčte čtenář z obrázku 31. Místo A jest vyznačeno počátkem, místo B bodem (0; 40). Dráhy vlaků vyjíždějících z A jsou dány přímkou $s = 20t$ a rovnoběžkami k této přímce, dráhy vlaků vyjíždějících z B přímkou $s = 40 - 20t$ a rovnoběžkami v bodech, jichž úsečky jsou tytéž jako dříve. (Obr. 31.)

b) Oddíl vojska 20 km dlouhý táhne po silnici rychlostí 5 km za hodinu, po hodině pochodu následuje vždycky pět minut oddechu. Velitel kolony, jenž jest na konci skupiny, vyšle na čelo skupiny cyklistu jedoucího rychlostí 20 km za hodinu, kdy se cyklista vrátí zpět? (Obr. 32.)

Tento obrázek vyznačuje dráhu čela i zádě kolony, vodorovná úsečka vyznačuje oddech. Přímka znázorňující dráhu cyklistovu protne v jistém bodě dráhu čela; úsečka tohoto

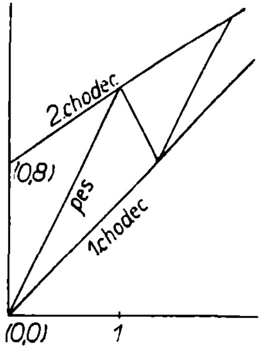


Obr. 32.

bodu udává čas, kdy cyklista dojel k čelu kolony. Vedeme-li nyní přímku bodem C souměrně položenou k přímce OC dle přímky určující pořadnici bodu, obdržíme cestu cyklisty zpět, která nám protne dráhu zádě kolony v bodě o úsečce asi 2 hod. 32 min.

c) Dva přátelé vyšli z míst, jež si znázorníme body (0; 0) a (0; 8), první jde rychlostí 6 km a druhý 4 km za hodinu.

S prvním chodcem vyběhne zároveň pes rychlostí 10 km a běží k druhému chodci, od něho zase k prvnímu atd. Kdy



Obr. 33.

dobíhá pes k oběma chodcům? Jakou dráhu urazí celkem? Řešení snadno srozumitelné udává obr. 33. Jak se úloha změní, vyběhne-li pes nejdříve od chodce druhého? Co se týče délky dráhy proběhnuté psem, není nutno snad počítati délku lomené čáry. Uvažujme takto: pes běhá, pokud první chodec nedostihne druhého, to se stane za 4 hodiny (proč?), uběhne pes tedy celkem dráhu 4 . 10 km = 40 km.

Řešte touto methodou některé úlohy z Aritm. her a zábav (této sbírky č. 21, kapitola 10) zejména př. *g*.