Zborcené plochy

III. Obecné plochy zborcené

In: Josef Kounovský (author): Zborcené plochy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 43–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403175

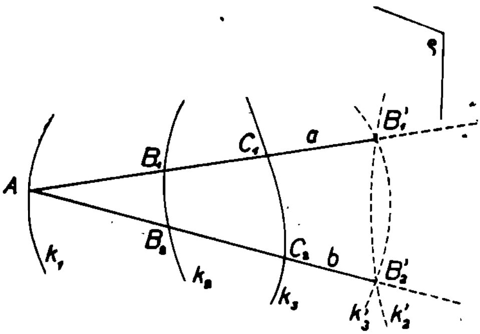
Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

9. Vytvoření a základní vlastnost obecné plochy zborcené. Souhrn přímek v prostoru je mohutnosti 4; všechny přímky v prostoru zachytíme totiž spojnicemi všech bodů dvou rovinných bodových polí mohutnosti 2. Tedy přímky, jež vyhovují třem jednoduchým podmínkám v mohutnosti 1 vyplňují přímkovou plochu. Jednoduchou podmínkou pro přímku na příklad jest, aby protínala danou křivku v jednom bodě.



Obr. 27.

Zborcená plocha vznikne obecně pohybem tvořící přímky tak, že přímka stále protíná tři pevné řídící křivky. Povrchové přímky určíme pomocnými kuželovými plochami. Jsou-li dány řídící křivky k_1, k_2 a k_3 (obr. 27), zvolíme na křivce k_1 bod A, sestrojíme kuželové plochy o vrcholu A a řídících křivkách k_2 a k_3 a určíme jejich průsečné povrchové přímky $a, b, \ldots$, jež jsou žádanými povrchovými přímkami zborcené plochy, jdoucími bodem A. Konstrukce se provede průseky kuželových ploch pomocnou rovinou ϱ v křivkách k'_2 a k'_3, jejichž průsečíky $B'_1, B'_2, \ldots$ procházejí tvořící přímky $a, b, \ldots$

Je-li některá z daných řídících křivek rovinná k_3, jest pomocnou rovinou ϱ její rovina a pak se sestrojí jen průsek rovinou ϱ kuželové plochy $[Ak_2]$.

Ze tří řídících křivek může býti jedna (k_1) nekonečně vzdálena a určena kuželovou plochou, tedy *zborcená plocha může býti určena řídící kuželovou plochou a dvěma řídícími křivkami.* Povrchové přímky zborcené plochy se určí průsekem pomocných ploch válcových procházejících danými řídícími křivkami, vždy rovnoběžně s některou povrchovou přímkou řídící plochy kuželové (tedy bodem ${}_{\infty}A$ na ní).

Je-li úběžný řídící útvar přímkou, jest určen řídící rovinou.

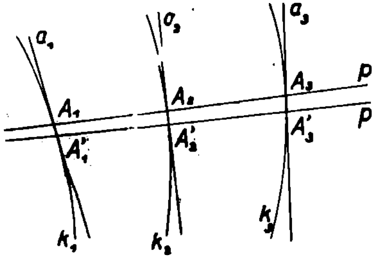
Řídící křivky mohou býti nahrazeny *řídícími plochami, jichž se tvořící přímky dotýkají* (jednoduché podmínky pro přímku). Je-li dána aspoň jedna řídící křivka (a dvě řídící plochy), sestrojíme bodem řídící křivky dotykové kuželové plochy obou řídících ploch; jejich průsečné povrchové přímky jsou plošnými přímkami zborcené plochy.

Nejsložitější by byl případ tří řídících ploch. Zvolíme ještě přímku a určíme zborcenou plochu stanovenou touto řídící přímkou a dvěma danými řídícími plochami. Určíme průsečnou křivku zborcené plochy s třetí řídící plochou; její tečny, které jsou zároveň přímkami pomocné zborcené plochy, jsou povrchovými přímkami hledané plochy zborcené. Pomocnou přímku lze voliti jako úběžnou, tedy nahraditi pomocnou rovinou řídící, s níž jsou povrchové přímky rovnoběžny.

Zborcenou plochu lze také vytvořiti *příčkami dané délky dvou řídících křivek.* Přímky plochy jdoucí bodem jedné křivky se určí pomocnou plochou kulovou, mající v tom bodě střed a danou délku za poloměr.

Plochu zborcenou sestrojíme také příčkami dvou křivek řídících za podmínky, že svírají s jednou danou křivkou úhel stálé velikosti, jenž je dán. Povrchové přímky jdoucí bodem jedné křivky leží na rotační kuželové ploše, jejíž osou je tečna sestrojená v tom bodě ke křivce a jejíž přímky svírají s tečnou daný úhel.

Dané řídící útvary mají zcela obecnou polohu, nemají ani společných bodů ani dotyku. Tvořící přímka je dána podmínkami protínání nebo dotyku s danými řídícími útvary, což geometricky stačí; jinak ovšem bývá možno příslušný pohyb vytvořující přímky uzákonit.



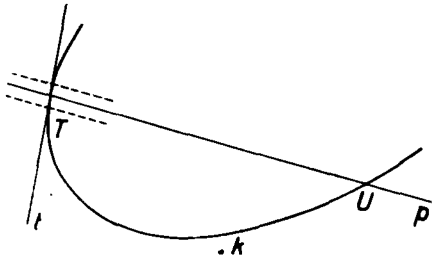
Obr. 28.

Jsou-li řídící křivky algebraické, jest vytvořená plocha také *algebraickou*, je-li některá řídící křivka transcendentní, pak také zborcená plocha je *transcendentní*. Nemají-li řídící útvary výtvarných zákonů, čili jsou-li křivkami empirickými nebo plochami grafickými, vytvořená zborcená plocha je také *grafickou*.

Že sestrojené plochy jsou zborcené, plyne z pozorování dvou blízkých poloh povrchových přímek p a p' (obr. 28); obě určují na řídících křivkách blízké body, tedy přímky $a_1 = A_1A'_1$, $a_2 = A_2A'_2$ a $a_3 = A_3A'_3$ jsou blízké tečnám řídících křivek, které obecně neleží v téže rovině, protože řídící křivky zvoleny docela libovolně. Plošný prvek mezi p a p' je zborcený, nelze ho převésti do roviny (čl. 2).

10. Tečné roviny zborcených ploch. Libovolná rovina protíná zborcenou plochu v křivce, souhrnu to průsečíků s povrchovými přímkami. Tečná rovina obsahuje tečny ke všem křivkám, které procházejí na ploše zvoleným dotykovým bodem. U plochy zborcené zastupuje jednu takovou křivku povrchová přímka, na níž byl dotykový bod zvolen. Tedy *každá rovina, jež prochází tvořící povrchovou přímkou zborcené plochy, jest její tečnou rovinou. Tečná rovina v bodě zborcené plochy je* *určena povrchovou přímkou tím bodem procházející a tečnou některé křivky (třeba rovinné) na ploše sestrojenou v tomto bodě.*

Nechť libovolná rovina τ, procházející povrchovou přímkou p, protíná plochu ještě v křivce k, přímka p a křivka k tvoří dohromady průsečný útvar $p + k$ a mají vzájemné průsečíky $T, U, \ldots$ (obr. 29). Jejich průsečík T budiž ten bod, v kterém přechází křivka k povrchovou přímku p, když pohybující se povrchová přímka (jejímiž průsečíky s rovinou τ vzniká křivka k) přechází polohu p. Obecně existují ještě



Obr. 29.

další průsečíky podle tvaru průsečné křivky. *Rovina tečná τ má dotykový bod T a je určena přímkou p a tečnou t v bodě T křivky k.* Bod T je totiž dvojným bodem úplného řezu $p + k$ plochy rovinou τ, t. j. každá přímka jdoucí v rovině τ bodem T je tečnou plochy.

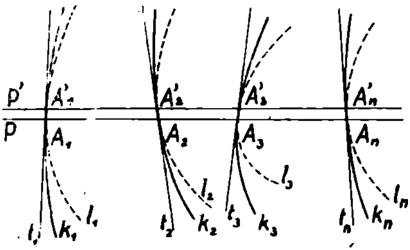
Tečna t je speciálně tečnou v dvojném bodě průsečné křivky. Druhou tečnou v dvojném bodě průseku je povrchová přímka p.

Dvě zborcené plochy, které mají společnou povrchovou přímku a dotyk ve třech různých bodech na ní, dotýkají se podél celé povrchové přímky ve všech jejích bodech. Buďtež to body A_1, A_2 a A_3 na společné povrchové přímce p (obr. 30). Sestrojme jimi tři libovolné roviny a jejich průsečné křivky k_1, k_2, k_3 a l_1, l_2, l_3 s oběma plochami; i dotýkají se vzájemně k_1 a l_1 v bodě A_1, k_2 a l_2 v bodě A_2 a k_3 a l_3 v bodě A_3; společné tečny jsou

$t_1 \equiv A_1A'_1$, $t_2 \equiv A_2A'_2$ a $t_3 \equiv A_3A'_3$; A'_1, A'_2 a A'_3 jsou blízké body bodů dotykových a určují blízkou společnou povrchovou přímku p' obou ploch, kteráž jest jedinou příčkou, kterou lze sestrojiti na př. bodem A'_1 k tečnám t_2 a t_3. Libovolná jiná rovina protíná útvary v bodech A_n, A'_n, k_n a l_n, $t_n \equiv A_nA'_n$ je společnou tečnou křivek k_n a l_n v bodě A_n; obě plochy mají v tomto bodě společnou tečnou rovinu (p, t_n).

Zborcené plochy mající ve všech bodech přímky p společné tečny a tečné roviny a tedy dotýkající se podél přímky, mají společný t. zv. plošný prvek.

Tečny t_1, t_2 a t_3 určují jako řídící přímky *zborcený hyperboloid t. zv. dotykový, protože ve třech bodech dané přímky a tedy v každém jejím bodě se dotýká dané zborcené plochy.* Každá rovina procházející přímkou p je tečnou rovinou hyperboloidu pro určitý bod přímky a tedy také tečnou rovinou obecné zborcené plochy v tomto jediném bodě.



Obr. 30.

Dotykových zborcených hyperboloidů podél určité povrchové přímky obecné plochy zborcené je nekonečné množství. Každý takový hyperboloid zvolíme třemi řídícími přímkami, jež jsou tečnami ve třech bodech přímky p. Protože v každém bodě lze sestrojiti paprskový svazek ∞^1 tečen plochy, jest souhrn dotykových hyperboloidů mohutnosti 3.

Zvolíme-li tečny t_1, t_2 a t_3 rovnoběžné s danou rovinou ϱ, obdržíme *dotykový hyperbolický paraboloid* dané plochy zborcené. K jeho určení stačí dvě tečny t_1 a t_2 ve dvou bodech přímky p k ploše a tečná rovina v dalším třetím bodě přímky p.

Tečná rovina v nekonečně vzdáleném bodě na povrchové přímce p je t. zv. *rovina asymptotická*. Asymptotická rovina se sestrojí pomocným dotykovým hyperbolickým paraboloidem; dostaneme ji jako jeho druhou řídicí rovinu procházející přímkou p.

Zvolíme-li $t_1 \perp p$ a $t_2 \perp p$ v rovinách kolmých na p, jest také řídící rovina dotykového hyperbolického paraboloidu kolmá k přímce p a též všechny povrchové přímky s ní rovnoběžné. Otočením této soustavy o 90° kolem přímky p stanou se z přímek dotykového hyperbolického paraboloidu normály uvažované zborcené plochy. Tedy:

Normály zborcené plochy v bodech její povrchové přímky vyplňují hyperbolický paraboloid (t. zv. *hyperbolický paraboloid normál*).

Vlastnosti a konstrukce tečných rovin zborceného hyperboloidu se přenášejí ihned na obecnou zborcenou plochu. Tedy důležitá věta:

Svazek tečných rovin zborcené plochy procházejících její obecnou tvořící přímkou jest projektivní s řadou jejich dotykových bodů na ploše.

Ze tří družin tohoto projektivního vztahu lze sestrojovati další družiny, z bodů tečné roviny a obráceně. Protneme rovinový svazek přímkou v bodové řadě a sestrojujeme body dotyku nebo tečné roviny na základě projektivnosti této bodové řady s řadou dotykových bodů.

Dotykový hyperboloid zborcené plochy je určen tečnami t_1, t_2 a t_3 plochy ve třech bodech dotykové povrchové přímky, (na př. tečnami křivek řídících). Sestrojíme-li příčky q a r těchto tečen, t. j. přímky druhé soustavy, sestrojíme v bodě A_n na přímce p tečnou rovinu pomocí přímky t_n hyperboloidu, která je příčkou přímek q a r.

Pro libovolnou rovinu τ procházející přímkou p sestrojíme dotykový bod zase přímkou t_n, jež je určena průsečíky Q a R roviny s přímkami q a r; $t_n \equiv QR$.

Protože asymptotické roviny se dotýkají zborcené plochy v úběžných bodech povrchových přímek, obaluje souhrn asymptotických rovin zborcené plochy její *asymptotickou rozvinutelnou plochu*, dotýkající se zborcené plochy podél její křivky nekonečně vzdálené.

Obě plochy, daná zborcená a její asymptotická plocha rozvinutelná mají tutéž řídící kuželovou plochu, která jest zorem jejich společné úběžné křivky. Tečné roviny této řídící kuželové plochy jsou rovnoběžny s rovinami asymptotickými, povrchové přímky rovnoběžné s povrchovými přímkami plochy zborcené i asymptotické plochy rozvinutelné. Tedy platí: *V asymptotické rovině jsou spolu rovnoběžny povrchová přímka zborcené plochy a povrchová přímka asymptotické plochy rozvinutelné.*

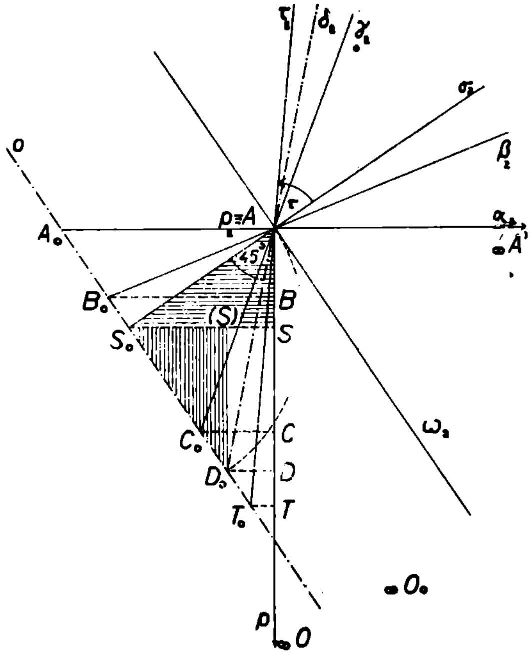
Centrální bod povrchové přímky zborceného hyperboloidu i obecné zborcené plochy jest dotykový bod t. zv. *centrální roviny* přímky zborcené plochy, jež je kolmá k asymptotické rovině. *Souhrn centrálních bodů je strikční křivka zborcené plochy.*

Centrální bod a centrální rovina mají na povrchové přímce důležitou úlohu pro jednoduché určení dotykových bodů svazku tečných rovin, jenž má svou osu v přímce, nebo obráceně.

Zvolme v obr. 31 povrchovou přímku p zborcené plochy v půdorysně kolmo k nárysně, takže tečné roviny svazku p jsou nárysně promítací a v nárysně se jeví jejich vzájemné odchylky ve vrcholu p_2. Volíme dále tři roviny tečné α, β a γ a jejich dotykové body A, B, C, aby $\alpha \equiv \pi$ byla půdorysnou a dotykový bod $A \equiv p_2$ v nárysně.

Označíme-li ${}_{\infty}A'$ úběžný bod na paprsku α_2, jest zor ${}_{\infty}A'$ $(A, B, C, \ldots)$ paprsková osnova perspektivní se svazkem p_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$, protože ${}_{\infty}A'A \equiv \alpha_2$ je jejich samodružným paprskem. Perspektivní osou o je spojnice $o \equiv B_0C_0$ průsečíků dvou paprskových družin ${}_{\infty}A'B$ a β_2, ${}_{\infty}A'C$ a γ_2. Pomocí této perspektivní osy lze sestrojovati další družiny, buď z dotykového bodu T nárys τ_2 tečné roviny τ nebo obráceně z daného τ_2 dotykový bod.

Sestrojme ve svazku asymptotickou rovinu ω. Protože její dotykový bod $_\infty O$ je úběžným, je i O_0 úběžným a tedy $\omega_2 \parallel o$.



Obr. 31.

Rovina centrální $\sigma \perp \omega$ má $\sigma_2 \perp \omega_2$, z bodu S_0 odvozen centrální bod S.

Sestrojme nyní rovinu ϑ, která má odchylku 45° od centrální roviny v kladném smyslu, $\overline{S_0D_0} = \overline{S_0A}$. Odvodíme-li dotykový bod D této roviny a učiníme ještě $D_0(S) \parallel p$, plyne ze vztahu $\triangle S_0(S)D_0 \cong \triangle ASS_0$, že $\overline{SD} = \overline{(S)D_0} = \overline{SS_0}$, což je pro $\overline{SD}$ stálou hodnotou na přímce p. Délka $\overline{SD}$ se zove *parametrem distribuce*; je to vzdálenost od centrálního bodu dotykového bodu roviny, jež má od centrální roviny odchylku 45°. Pro libovolnou rovinu τ, jejíž odchylku od centrální roviny σ označíme také literou τ, platí

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{S_0T_0}}{\overline{S_0D_0}} = \frac{\overline{S_0T_0}}{\overline{S_0A}} = \operatorname{tg} \tau;$$

tedy $\overline{ST} = \overline{SD} \,.\, \operatorname{tg} \tau$; slovně vyjádřeno:

Vzdálenost dotykového bodu tečné roviny, jež prochází obecnou tvořící přímkou zborcené plochy, od jejího centrálního bodu, se rovná součinu parametru distribuce přímky a tangenty odchylky uvažované tečné roviny od centrální roviny.

11. Stupeň, třída a řád zborcené plochy. Řídící křivky i přímky. Přímky torsální a body kuspidální. Nechť libovolná přímka p protíná algebraickou zborcenou plochu v n-bodech, t. j. nechť plocha je n-ho *stupně*. Každým průsečíkem přímky s plochou prochází povrchová přímka a ta určuje s přímkou p tečnou rovinu procházející přímkou p; dotykový bod není ovšem v tom průsečíku. Jiné tečné roviny přímkou p neprocházejí, tečná rovina přímkou p musí obsahovati povrchovou přímku, jež protíná p. Souhlasí tedy počet tečných rovin přímkou p ku ploše procházejících s počtem n průsečíků, t. j. plocha je n-*té třídy*. Někdy se říká také, že plocha je n-ho *řádu*; častěji se užívá při stejném stupni a třídě jen výrazu n-ho stupně. (Tedy na př. plochy druhého stupně, plochy zborcené třetího stupně a pod.)

V každém bodě obecné přímky zborcené plochy existuje jedna tečná rovina plochy. V různých bodech přímky zborcené plochy jsou tečné roviny tedy obecně různé. Může se však státi, že přímka plochy je taková, že tečné roviny plochy sestrojené v různých bodech přímky splývají. V tomto případě (zvláštním) projektivita mezi řadou bodů na přímce a svazkem tečných rovin přímkou zborcené plochy degeneruje tak, že existuje určitý bod K přímky a určitá rovina přímkou o těchto vlastnostech: Každé rovině $\alpha \neq \tau$ přímkou procházející odpovídá bod K; každému bodu $T \neq K$ na přímce odpovídá rovina τ. V tomto zvláštním případě tečná rovina τ se dotýká plochy podél celé povrchové přímky. Přímka se zove *torsální přímka* zborcené plochy; zborcená plocha má podél ní povahu rozvinutelné plochy (jež se zove také *torsí*).

Torsální rovinou zborcené plochy jest její tečná rovina podél torsální přímky. (Viz rovinu τ.)

Kuspidální bod je dotykový bod každé netorsální roviny procházející torsální přímkou. (Viz bod K.) Rovina procházející kuspidálním bodem protíná zborcenou plochu v křivce, jež má tento bod za bod vratu. Je-li dána zborcená plocha řídícími křivkami a řídící přímkou, je rovina sestrojená řídící přímkou jako tečná rovina jedné řídící křivky rovinou torsální a určí na druhé řídící křivce kuspidální bod.

Meze vlastních stínů a obrysové křivky na zborcené ploše procházejí jejími kuspidálními body a dotýkají se v nich torsálních přímek.

Řídící křivka zborcené plochy jest její *vícenásobnou křivkou*. Jsou-li na př. křivky k_1, k_2 a k_3 stupňů n_1 resp. n_2 a n_3, prochází každým bodem křivky k_1 zborcené plochy $n_2 n_3$ povrchových přímek. Řídící křivky jsou tudíž postupně $n_2 n_3$ resp. $n_3 n_1$, resp. $n_1 n_2$-násobné křivky.

Jsou-li řídící křivky k_1, k_2, k_3 zborcené plochy stupňů n_1, n_2 a n_3 a neprotínají-li se žádné dvě z nich, pak stupeň vytvořené zborcené plochy jest $n = 2n_1 n_2 n_3$.

Budiž za účelem důkazu zvolen zborcený hyperboloid přímkami p_1, p_2, p_3; víme, že je stupně druhého. Křivka k_1 protíná hyperboloid ve $2n_1$ bodech, t. j. k_1, p_1, p_2, p_3 mají $2n_1$ příček, což znamená, že zborcená plocha $[k_1 p_2 p_3]$*) je

*) Lomenou závorkou $[k_1 p_2 p_3]$ označujeme plochu, jejíž řídící útvary jsou křivka k_1 a přímky p_2, p_3.

stupně $2n_1$. Tato zborcená plocha jest proťata křivkou k_2 ve $2n_1n_2$ bodech, t. j. k_1, k_2, p_2, p_3 mají $2n_1n_2$ příček, což znamená, že zborcená plocha $[k_1k_2p_3]$ jest stupně $2n_1n_2$. Tato zborcená plocha jest proťata křivkou k_3 ve $2n_1n_2n_3$ bodech, t. j. k_1, k_2, k_3, p_3 mají $2n_1n_2n_3$ příček, což znamená, že uvažovaná zborcená plocha $[k_1k_2k_3]$ jest stupně $2n_1n_2n_3$.

Protínají-li se dvě řídící křivky k_1 a k_2 v jednom bodě V, pak se rozpadá zborcená plocha na dvě části; jednou z nich je kuželová plocha o vrcholu V a řídící křivce k_3, tedy řádu n_3. Tedy stupeň druhé části (zborcené) je $2n_1n_2n_3 - n_3$. Mají-li křivky k_1 a k_2 společných s_3 bodů, k_2 a k_3 společných s_1 bodů, a konečně křivky k_3 a k_1 společných s_2 bodů, pak stupeň zborcené plochy po odečtení všech kuželových ploch je

$$2n_1n_2n_3 - s_1n_1 - s_2n_2 - s_3n_3.$$

Čísla určující mnohonásobnost řídících křivek jsou pak postupně

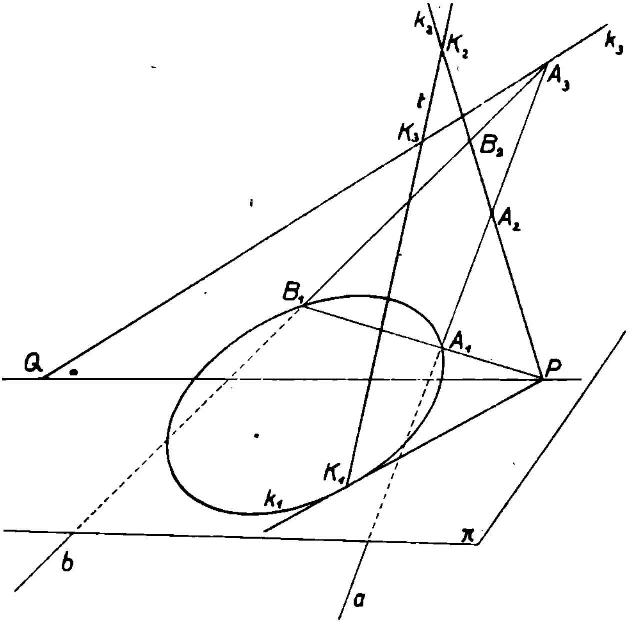
$$n_2n_3 - s_1,\quad n_3n_1 - s_2,\quad n_1n_2 - s_3.$$

Pro zborcenou plochu určenou třemi řídícími kuželosečkami, z nichž dvě a dvě ve dvou bodech se protínají (*spjatými* kuželosečkami) byl by dle toho stupeň $2 \,.\, 2^3 - 2 \,.\, 2 - 2 \,.\, 2 - 2 \,.\, 2 = 4$; jest to však plocha druhého stupně a zdánlivý rozpor se vysvětlí tím, že jsme hledali počet přímek plochy, které protínají danou přímku, a víme, že plocha druhého stupně skutečně takové čtyři přímky obsahuje.

Základní tyto vztahy znázorněny jsou v obr. 32 na zborcené ploše stupně čtvrtého, dané řídící kuželosečkou k_1 v rovině π a řídícími přímkami k_2 a k_3 se stopníky P a Q na π. Libovolná rovina položená přímkou k_2 určí na kuželosečce k_1 body A_1 a B_1, na k_3 bod A_3, $a \equiv A_1A_3$, $b \equiv B_1A_3$ jsou přímky zborcené plochy. Je patrno, že přímka k_3 a obdobně k_2 jest *dvojnou* (*dvojnásobnou*) *přímkou* plochy. Řídící kuželosečka k_1 jest *jednoduchou křivkou* na ploše, každým jejím bodem probíhá jediná příčka řídících přímek k_2 a k_3.

Spojnice stopníků PQ jest *dvojnou povrchovou přímkou zborcené plochy*, není to však řídící přímka. Jsou-li společné body přímky PQ s řídící kuželosečkou k_1 sdruženě imaginární, pak jest přímka *isolovanou přímkou na ploše.*

Sestrojíme-li stopníkem P tečnu ke k_1, splynou v tomto případě povrchové tvořící přímky v přímce torsální t a její průsečík s dvojnou řídící přímkou k_3 je kuspidální bod K_3.

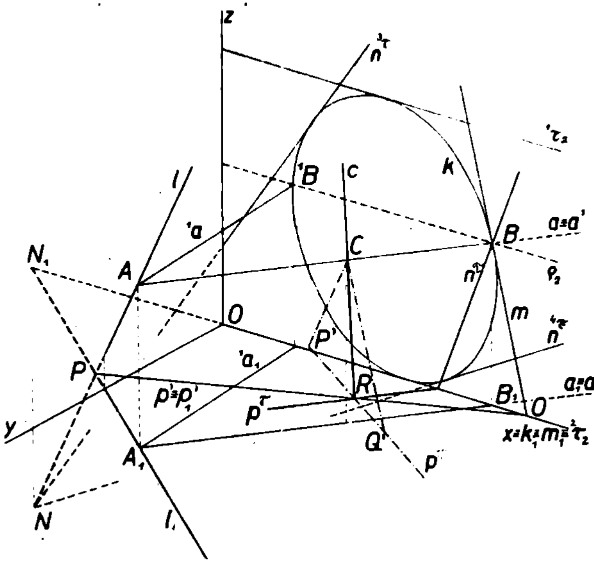


Obr. 32.

Seče-li řídící přímka k_2 křivku k_1 v bodě P, pak se rozpadá zborcená plocha v rovinu (P, k_3) a v *zborcenou plochu třetího stupně.* Pak k_3 je toliko jednoduchou přímkou plochy.

Protínají-li obě řídící přímky křivku k_1, pak se plocha rozpadá na dvě roviny (P, k_3) a (Q, k_2) a na zborcený hyperboloid stupně druhého.

12. Konoid je zvláštním případem zborcené plochy o dvou řídících přímkách, je-li jedna řídící přímka v nekonečnu. I jest *konoid určen řídící přímkou, řídící křivkou* (nebo plochou, jíž se tvořící povrchové přímky dotýkají) *a řídící rovinou.* Je-li stupeň řídící křivky n_1, jest stupeň konoidu $2n_1$.



Obr. 33.

Je-li řídící přímka kolmá k řídící rovině, jmenuje se konoid *pravoúhlý* (*přímý*), jinak *kosoúhlý konoid.*

Řídící křivka jest jednoduchou křivkou plochy (každým jejím bodem jde jedna její tvořící povrchová přímka), řídící přímka jest jejím útvarem n-násobným (každým jejím bodem jde n přímek na ploše); jiných vícenásobných čar není.

Hyperbolický paraboloid je také konoidem.

Kosoúhlý konoid kuželosečkový, zborcená plocha čtvrtého stupně, je dán axonometrickým průmětem v obr. 33. Řídící elipsa k leží v nárysně, řídící přímka l má obecnou polohu a zvolena axon. průmětem a axon. půdorysem, řídící rovinou jest půdorysna π. Sestrojena libovolná povrchová přímka a procházející bodem A na řídící přímce l pomocnou rovinou $\varrho \parallel \pi$, $\varrho_2 \parallel x$, $z_\varrho = z_A$. Je-li B průsečík křivky k a roviny ϱ, jest $a \equiv AB$. Úkolem jest *sestrojiti v libovolném bodě C přímky a tečnou rovinu τ konoidu.*

Jako při obecné zborcené ploše řešíme tento úkol převedením na dotykový zborcený hyperboloid, jejž stanovíme tečnami v bodech příslušné povrchové přímky k ploše, při čemž řídící přímky mohou zastupovati tyto tečny, právě tak použijeme u konoidu pomocného *dotykového hyperbolického paraboloidu*. V našem případě je určen řídící přímkou l, tečnou m řídící elipsy v bodě B a řídící půdorysnou. Označme přímku $a \equiv a'$ a spojnici půdorysných stopníků P a O přímek l a m jako druhou přímku p' čárkované soustavy. Tím je dán dotykový paraboloid jako zborcený čtyrúhelník $ABOP$, i lze sestrojiti přímku c nečárkované soustavy, procházející daným bodem C podle čl. 8; v obr. sestrojena bodem C řídící rovina π' nečárkované soustavy, $\overline{CP'} \# \overline{AP}$, $\overline{CQ'} \# \overline{BO}$, stopa roviny je $P'Q'$ a protíná přímku p' v půdorysném stopníku R přímky $c \equiv CR$. Tím je tečná rovina τ určena, její stopa $p^\tau \parallel a$ a prochází stopníkem R, nárysná stopa prochází stopníkem B.

13. Oskulační hyperboloidy zborcené plochy. Připojíme ještě jen několik hlavních poznámek k dotyku zborcených ploch.

Již v čl. 10 uvažovali jsme o libovolné tečné rovině zborcené plochy. Každá rovina τ procházející její tvořící povrchovou přímkou p protíná plochu ještě v křivce k, která je geom. místem průsečíků přímek zborcené plochy s rovinou τ. Tato rovina je tečnou rovinou plochy pro ten průsečík T křivky k a přímky p, který vzniká přecházíme-li spojitě přímku zborcené plochy v okolí přímky p přes přímku p.

Každá přímka roviny τ, jež prochází dvojným bodem průseku $p + k$ plochy rovinou τ, jest tečnou plochy. Tečna t

křivky k a přímka p jsou *asymptotickými tečnami* zborcené plochy majíce s ní tři společné splývající body; jsou tečnami obratu (inflexními) normálných řezů plochy jimi procházejících. Plocha leží v okolí bodu T po obou stranách tečné roviny τ a má v něm t. zv. hyperbolické zakřivení.

Otáčí-li se rovina τ kolem osy p, posunuje se dotykový bod T na p a mění se i asymptotická tečna t. Souhrn těchto asymptotických tečen ve všech bodech povrchové přímky p zborcené plochy tvoří zborcený svazek (jednu soustavu) povrchových přímek t. zv. *oskulačního hyperboloidu.* Patrně takové tečny t, t', t'' ve třech bodech T, T', T'' určují zmíněný hyperboloid oskulující danou zborcenou plochu podél povrchové přímky p. Neboť t, t', t'' hyperboloidu protínají ještě dvě sousední přímky p' a p'' zborcené plochy a p, p', p'' jsou společnými přímkami obou zborcených ploch.

K oskulačnímu hyperboloidu podél povrchové tvořící přímky p dospějeme též, sestrojíme-li hyperboloid ze tří od sebe různých povrchových přímek p, q, r zborcené plochy a pak měníme na ploše přímky q a r až splynou s přímkou p. Pak každá povrchová přímka hyperboloidu ze soustavy t, t', t'' je asymptotickou tečnou zborcené plochy, majíc s ní tři splývající společné body.

Jsou-li přímky p, q, r rovnoběžné s toutéž rovinou, nastává případ oskulačního paraboloidu.

Z těchto asymptotických tečen podél povrchové přímky p mají dvě zvláštní vlastnost. Průsečná křivka zborcené plochy s libovolným hyperboloidem a tedy také s oskulačním hyperboloidem podél povrchové přímky p má na každé přímce zborcené plochy dva body, tedy i na přímce p. Obě asymptotické tečny v těchto bodech U_1 a U_2 mají pak se zborcenou plochou čtyři splývající body společné. Potom tečné roviny v těchto bodech protínají zborcenou plochu ještě v křivkách, jež mají body U_1 a U_2 za body obratu. Body slují *fleknody* a jejich tečny dotyku čtyrbodového *fleknodálními tečnami*. I procházejí každou povrchovou přímkou zborcené plochy dvě roviny — *fleknodální roviny* — jejichž dotykové body jsou na příslušných průsečných křivkách s plochou zborcenou body obratu.

Obsahuje-li zborcená plocha takovou tvořící povrchovou přímku p, že oskulační hyperboloid podél ní má ještě tři splývající tvořící povrchové přímky s plochou společné (v přímce p), nazývá se tento dotykový hyperboloid *stacionárním oskulačním hyperboloidem.* Přímka p se zove *hyperboloidickou.*