AXIOM NEKONEČNA

Aritmetika celých čísel se neobejde tedy bez pomoci nebo doplnění axiomem nekonečna. Nejjednodušší jeho vyjádření je asi toto: je-li ‚a' libovolné racionální číslo celé, pak platí ‚$a \neq a + 1$'. Axiom nekonečna je takto jen zdánlivě úzce vyjádřen. Vzpomeňme, že racionální čísla jsou definována pomocí čísel celých, ostatní reálná čísla se vyjadřují opětným užitím axiomu nekonečna zase množinami racionálních čísel a na theorii reálných čísel je vybudována veliká část matematiky. Ukazuje se tedy, že vyjádření axiomu nekonečna v naší uvedené zdánlivě úzké formě stačí. Nuže, tento axiom je právě proto axiomem, že se z logických základních vět dokázati *nedá*. Nedá se dokázati ani z jiných logických soustav než jsme my uvedli, protože není tautologií. Platnost tohoto axiomu se v matematice mlčky předpokládala, ví se však již delší dobu, že teprve jím se umožňuje matematická úvaha o nekonečnu a že je nutno také axiom výslovně vyjádřiti. Abychom se vrátili zpět k tvrzení Poincaréově o závěru z ‚n' na ‚$n + 1$': tento závěr je možno formalisovati jako větu logickou; tak jak býval tento závěr pojímán, předpokládal mlčky axiom nekonečna a tento axiom je právě onou tvůrčí složkou, již tak výstižně charakterisoval Poincaré.

Dějinami matematiky se táhne dlouhá řada pokusů *dokázati* axiom nekonečna z logických principů. O jednom z nich si řekneme ihned, druhý si ponecháme na pozdější poznámky k theorii množin a kardinálních čísel.

Zkusme dokázati axiom nekonečna takto: předpokládejme, že je předložen konečný počet předmětů, obecně ‚n' (na příklad tři).

Skupinu těchto tří předmětů označme přechodně pouze v této souvislosti $\{a_1; a_2; a_3\}$. Z těchto tří předmětů můžeme utvořiti nové předměty, ve větším počtu. Budou to jisté skupiny tvořené tak, že předmět a_i je ve skupině zastoupen anebo není. Není-li zastoupen, označíme místo, které v našem znázornění v původní skupině předmětu zaujímal, znakem ‚$*$'.

První nová skupina bude naše původní $\{a_1; a_2; a_3\}$, druhá $\{*; a_2; a_3\}$, třetí $\{*; *; a_3$, čtvrtá $\{*; a_2; *\}$, další skupiny pak

$$\{*; *; *\}, \{a_1; *; *\}, a_1; a_2; *\}, \{a_1; *; a_3\}.$$

(Poznamenejme, že v theorii množin je to známý způsob tvoření podmnožin k dané množině.) Dostali jsme tak 8 nových skupin (2^3, obecně 2^n), 8 nových předmětů. Opakováním postupu bychom dostali 2^{2^3} předmětů nových, celkem tedy 256 předmětů. Opakujeme-li i s nimi naznačený postup, vytvoříme si konstrukcí 2^{256} předmětů — číslo již značně vysoké, psané asi 150 číslicemi. Mohli bychom si teď sečísti všechny jednotky, odpovídající počtu předmětů v každém stadiu vývoje, mohli bychom si postup myslit opakovaný do nekonečna; axiom nekonečna by byl dokázán.

Není jistě potřebí zvláště upozorniti, že myslíme-li si postup opakovaný do nekonečna, říkáme zakrytě totéž, co bychom chtěli dokázati a tím že důkaz padá. To je argument, jenž leží na snadě. Axiom takto dokázati nelze. Jsou však ještě důvody jemnější, s nimiž nebude na škodu se seznámiti.

1. Dá se sice dokázati, pro každé pevné ‚n' že platí $n < 2^n$. Důkaz se provede tak, že vyjdeme z definice

čísla ‚2' a čísla ‚n', zavedeme relaci ‚<' a logickým mechanismem jako v případě rovnice $1 + 1 = 2$ vztah potvrdíme. Nedá se však dokázati, že uvedená relace platí *pro všechna ‚n'*. Kdyby tomu tak bylo, získali bychom podstatnou oporu pro důkaz axiomu nekonečna.

2. Nejsme totiž v situaci o nic lepší, než v případě přímého vyslovení axiomu nekonečna. Logistický přepis zní: $(n)[n \neq n + 1]$. A podstatný je na této formulaci právě operátor „pro všechny". Pro každý konkrétní případ totiž nerovnost $n \neq n + 1$ dokázati lze. Nelze však před tento vztah postaviti operátor „pro všechny". Mohlo by se zdáti, že nás k tomu opravňuje obecná logická věta, jíž jsme si své doby uvedli: je-li odvoditelná formule s volnou proměnnou, na př. ‚$A(x)$', pak je také odvoditelná formule ‚$(x) A(x)$'. Pak by se operátor dal postaviti před relaci, jež je pro každé určité ‚n' dokazatelná. Tato úvaha selže z tohoto důvodu: v definici každého určitého ‚n' hrají podstatnou roli oba druhy operátorů — existančních i operátorů „pro všechny". *Počet* těchto operátorů, jak je patrno již na definici čísel 0, 1, 2, se od čísla k číslu mění. Není tedy možno považovati tak jednoduše číslo ‚n' za volnou proměnnou, protože jeho logický ekvivalent je složitý výraz, v němž vystupují operátory a proměnné, ale nikoli číslo ‚n' samo.

3. Je tu ještě důvod další, jejž jenom naznačíme. Předměty, tvořené nově z nějakých předchozích způsobem, jenž vyžaduje náš zdánlivý důkaz axiomu nekonečna, tvoří soubor. Od tohoto souboru se postoupí zase k vyššímu souboru. Počet členů tohoto souboru vyššího typu, jak se pro stručnost vyjádříme, je vyjádřen číslem 2, povýšeným na exponent, rovný počtu členů souboru nižšího typu. Tímto výrokem však vnášíme do ú-

vahy nový moment, velmi skrytý. Umožnili jsme tak, soubory po stránce počtu členů vůbec srovnati. A přece v nižším z nich jsou nějaké členy souboru, ve vyšším pak již složitější předměty, soubory těchto členů. S odpovědí na otázku, jsme-li k takovému srovnání oprávněni v případě dvou souborů typově rozdílných, se potkáme později.

Závěrem lze říci o axiomu nekonečna asi tolik: logickou analysou tohoto axiomu byla odkryta jeho povaha, je to myšlenkový postulát matematický, jenž není tautologií a tím také padá možnost, odvoditi celou matematiku pouze z logických principů. Je to sice zvláštní shoda okolností, že pravá povaha tohoto axiomu byla odkryta právě při pokusu, matematiku z logiky odvoditi, ale tím není nikterak zmenšena zásluha nynější analytické techniky logické, že tuto pravou podstatu objevila.