O mnohoúhelnících a mnohostěnech

III. Úhly v prostoru, mnohohrany a mnohostěnové plochy

In: Bohuslav Hostinský (author): O mnohoúhelnících a mnohostěnech. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 23–38.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403150

III. ÚHLY V PROSTORU, MNOHOHRANY A MNOHOSTĚNOVÉ PLOCHY

14. Úhly v prostoru. Úhel dvou rovin. Odchylka přímky od roviny. a) V prostoru jsou dány dva polopaprsky OA a $O'B$. Úhel jimi sevřený stanovíme takto: Sestrojíme bodem O polopaprsek OC rovnoběžný k $O'B$; úhel AOC rovná se úhlu polopaprsků OA a $O'B$. Všechny souhlasně rovnoběžné paprsky mají stejný směr a smysl.

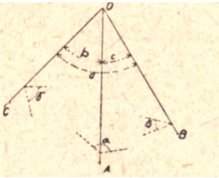
b) V prostoru jsou dány dvě roviny, jež se protínají v přímce p. Úhel α obou rovin stanovíme takto: Sestrojíme rovinu kolmou k p; tato rovina protíná obě dané roviny ve dvou přímkách a a a'. Jejich úhel rovná se úhlu α. Úhel α je určen dvojznačně, neboť přímky a a a' tvoří jeden úhel ostrý a druhý tupý (k vypuklým úhlům nepřihlížíme).

Úhel dvou rovin rovná se úhlu, jehož ramena jsou kolmice vztyčené v některém bodě průsečné přímky p k jedné a ke druhé rovině.

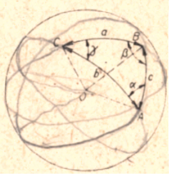
c) Odchylka přímky od roviny je úhel mezi přímkou a jejím kolmým průmětem do roviny. Je-li přímka k rovině kolmá, je jejím kolmým průmětem do roviny jediný bod; v tomto případě považujeme odchylku přímky od roviny za rovnou pravému úhlu. Přímka kolmá k rovině svírá pravý úhel s každou přímkou v té rovině ležící.

15. Trojhran a sférický trojúhelník. a) Tři polopaprsky OA, OB, OC, vedené daným bodem O, určují *trojhran*; O je jeho *vrchol*; OA, OB a OC jsou jeho *hrany*; část roviny BOA ležící mezi OA a OB nazývá se *stěna* mnohohranu, COB a AOC jsou další dvě stěny. Rovina stěny BOA, dělí prostor na dvě části; v jedné z nich je třetí hrana OC a tuto část nazveme kladnou částí prostoru vzhledem k rovině BOA, druhou pak nazveme zápornou. Podobně se dělí prostor na dvě části rovinou COB nebo AOC; kladná část je vždy ta, ve které leží třetí hrana. *Vnitřek trojhranu* obsahuje ty body, které leží vzhledem ke každé jeho stěně v kladné části prostoru. Pravíme, že každý trojhran je *vypuklý*, což znamená, že celý jeho vnitřek leží po jediné straně každé jeho stěny.

b) Úhel, jehož ramena jsou dvě hrany trojhranu na př. OA a OB, nazývá se *strana* trojhranu; je to vždy úhel dutý. Úhel dvou stěn, jež se protínají podél hrany trojhranu, nazývá se *úhel* trojhranu; každý úhel trojhranu je dutý a je jednoznačně určen takto: Libovolný bod M příslušné hrany je jeho vrchol a kolmice MP a MQ sestrojené k OA ve stěnách BOA, resp. AOC, jsou jeho ramena. V obr. 16 jsou naznačeny tři strany a, b, c a tři úhly α, β, γ trojhranu.



Obr. 16.



Obr. 17.

c) Opišme kolem vrcholu O trojhranu kulovou plochu o poloměru 1, která protne jeho hrany v bodech A, B, C. Stěny trojhranu protínají kulovou plochu v obloucích CB, AC, BA hlavních kružnic (t. j. kružnic, jichž poloměr se rovná poloměru kulové plochy). Obrazec utvořený těmito třemi oblouky se nazývá *sférický trojúhelník*. V obr. 17 je naznačen střed O koule a sférický trojúhelník ABC; strany a, b, c trojhranu jsou stranami sférického trojúhelníka a úhly α, β, γ trojhranu jsou vnitřní úhly sférického trojúhelníka.

Bereme v úvahu jen takové sférické trojúhelníky, jichž úhly i strany jsou duté úhly. Kulová plocha dělí se sférickým trojúhelníkem na dvě části: vnitřek trojúhelníka a vnějšek. Vnitřek leží ve vnitřku příslušného trojhranu s vrcholem v O.

16. Sférický obraz stěny trojhranu. Výplňkový trojhran. a) Směr v prostoru se zobrazuje na povrchu pomocné kulové plochy o středu O bodem M tak, že poloměr OM je s oním směrem souhlasně rovnoběžný. Bod M je *sférický obraz* daného směru. Zavádíme dále *sférický obraz roviny* (nebo stručně: *obraz roviny*) jakožto sférický obraz směru kolmého k rovině; aby zobrazení bylo jednoznačné, nutno voliti určitý smysl normály.

Vnější normála ke stěně AOB trojhranu je kolmice vztýčená k ní do *záporné* části prostoru vzhledem k AOB; podobně jsou určeny vnější normály ke stěnám BOC a COA a tím i sférické obrazy C', A', B' stěn, resp. AOB, BOC a COA. Střed pomocné kulové plochy volíme v O. Trojhran $OA'B'C'$ se jmenuje *výplňkový* neboli *polární trojhran* k trojhranu $OABC$. Tři body A', B', C' určují na kulové ploše *výplňkový* neboli *polární sférický trojúhelník* k trojúhelníku, ve kterém se kulová plocha protíná s původním trojhranem $OABC$.

Příklad: Jsou-li všechny úhly původního sférického trojúhelníka pravé, je vnitřek trojúhelníka jedna osmina (oktant) celé kulové plochy; vnitřek příslušného výplňkového trojúhelníka, jenž má také tři pravé úhly, je oktant protilehlý k předešlému.

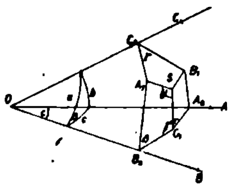
b) Jsou-li $a = BOC$, $b = COA$, $c = AOB$ strany daného sférického trojúhelníka a α, β, γ jeho úhly při A, B, C, jsou-li pak $a' = B'OC'$, $b' = C'OA'$, $c' = A'OB'$ strany a α', β', γ' úhly polárního trojúhelníka, platí šest rovnic

$$\begin{aligned} a + \alpha' &= \pi, & \alpha + a' &= \pi, \\ b + \beta' &= \pi, & \beta + b' &= \pi, \\ c + \gamma' &= \pi, & \gamma + c' &= \pi. \end{aligned}$$

K důkazu (viz obr. 18) sestrojíme tři kolmice ke stěnám daného trojhranu $OABC$ spuštěné z bodu S ležícího uvnitř trojhranu. První z nich SA_1, spuštěná na rovinu BOC, protíná ji v bodě A_1; druhá SC_1, spuštěná na AOB, protíná ji v bodě C_1. Obě tyto kolmice leží v rovině SA_1C_1 kolmé ke hraně OB trojhranu a protaté touto hranou v bodě B_2.

V rovinném čtyrúhelníku $A_1SC_1B_2$ jsou úhly při A_1 a C_1 pravé; úhel při S je b', úhel při B_2 je β, tedy $\beta + b' = \pi$. Třetí kolmice SB_1 spuštěná na rovinu OCA protíná ji v B_1. Rovina SC_1B_1 je kolmá k hraně OA a protíná ji v A_2. Čtyrúhelník $OA_2C_1B_2$ v rovině OAB má pravé úhly při A_2 a B_2; úhel při O je c a úhel při C_1 je γ', tedy $c + \gamma' = \pi$. Tím jsou dokázány dvě z hořejších šesti rovnic; zbývající čtyři se dokáží stejným postupem.

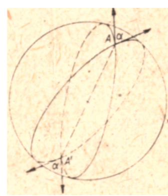
Z obr. 18 plyne, že hrana OA původního trojhranu je kolmá ke stěně SB_1C_1 polárního trojhranu a obdobnou vlastnost mají hrany OB a OC; původní trojhran $OABC$ je tedy polární k druhému. *Je-li jeden trojhran polární k druhému, je také druhý polární k prvnímu; je-li jeden sférický trojúhelník polární k druhému, je také druhý polární k prvnímu.*



Obr. 18.

17. Plošný obsah sférického dvojúhelníka a trojúhelníka. — a) Budiž A bod na kulové ploše o poloměru 1 a A' bod protilehlý. Spojme A a A' dvěma hlavními polokružnicemi; jejich tečny sestrojené v A a v A' protínají se v jednom i ve druhém bodě v úhlu α (viz obr. 19). Obsah P sférického dvojúhelníka omezeného oběma polokružnicemi má se k povrchu celé koule (který je roven 4π) jako úhel α k 2π, je tedy

$$P : 4\pi = \alpha : 2\pi,$$
$$P = 2\alpha. \qquad (1)$$



Obr. 19.

Obsah sférického dvojúhelníka rovná se dvojnásobku jeho úhlu měřeného v absolutní míře.

b) Budiž nyní dán sférický trojúhelník o úhlech α, β, γ na povrchu jednotkové kulové plochy. Abychom ustanovili jeho obsah P, prodlužme všecky jeho strany na úplné hlavní kružnice; těmito třemi hlavními kružnicemi dělí se celá kulová plocha na osm sférických trojúhelníků*). Daný trojúhelník doplňuje se s každým přilehlým (totiž s trojúhelníkem, který má s ním jednu společnou stranu) na dvojúhelník. Označme P_α, P_β, P_γ obsahy těchto přilehlých trojúhelníků, které mají s původním společné strany ležící po řadě proti úhlům α, β, γ. Podle (1) platí

$$P + P_\alpha = 2\alpha, \quad P + P_\beta = 2\beta, \quad P + P_\gamma = 2\gamma$$

a tedy

$$3P + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Dále je

$$P + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma = 2\pi,$$

neboť původní trojúhelník se doplňuje se třemi přilehlými na polovinu kulového povrchu. Z obou předešlých rovnic plyne, že

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{2}$$

Obsah sférického trojúhelníka rovná se sférickému nadbytku, t. j. veličině, o kterou je součet jeho úhlů větší než úhel přímý.

c) Jsou-li dvojúhelníky nebo trojúhelníky na kulové ploše o poloměru r, jsou jejich obsahy — srovnáváme-li je při neproměnných stranách a úhlech s trojúhelníky na kulové ploše o poloměru 1 — větší proti původním v poměru $r^2 : 1$, takže platí vzorce

$$P = 2\alpha r^2 \tag{1'}$$

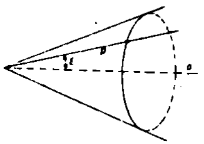
$$P = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\, r^2 \tag{2'}$$

pro obsah sférického dvojúhelníka resp. trojúhelníka na povrchu kulové plochy o poloměru r.

18. O tělesném úhlu. a) Přímka p, jež se otáčí kolem osy o ji protínající, vytvoří rotační kuželovou plochu (obr. 20). Je-li úhel ε mezi o a p malý, pravíme, že je kužel úzký; čím větší je ε, tím je kužel širší. Úhel ε (nebo 2ε) nazývá se *otvorem* kužele. Obecněji měří se šířka nebo otvor jakéhokoli

*) Srv. *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. třídu reálek, 6. vyd. 1935, str. 171.

kužele (nejen rotačního) *tělesným úhlem* takto: Obecná kuželová plocha je dána svým vrcholem O a řídící křivkou k; plocha je vytvořena přímkou, která se pohybuje tak, že stále prochází bodem O a protíná křivku k. Předpokládáme, že křivka k leží na kulové ploše o poloměru 1 opsané kolem O, že je uzavřená a že sama sebe neprotíná. Vnitřek křivky k (část kulové plochy) má obsah P, který se nazývá tělesný úhel kužele. Křivka k může býti na př. složena z několika kruhových oblouků.


Obr. 20.

b) Tělesný úhel trojhranu je roven obsahu příslušného sférického trojúhelníka. Jsou-li α, β, γ úhly trojhranu, je jeho tělesný úhel podle (2) odst. 17 roven

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Tělesný úhel trojhranu, jehož všechny tři úhly jsou pravé, rovná se tedy obsahu kulového oktantu, totiž $\frac{1}{2}\pi$. Tělesný úhel shora zmíněné rotační kuželové plochy (obr. 20) je roven obsahu kulového vrchlíku o výšce $1 - \cos \varepsilon$; poněvadž tento obsah se rovná obvodu 2π hlavní kružnice násobenému výškou vrchlíku, má tělesný úhel rotačního kužele velikost $2\pi (1 - \cos \varepsilon)$.

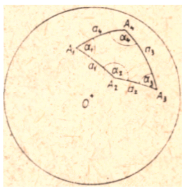
19. Mnohohran a sférický mnohoúhelník. a) n polopaprsků vedených bodem O a uspořádaných v určitém pořadí $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ definuje *n-hran* (mnohohran) o vrcholu O. Polopaprsky OA_k jsou *hrany* n-hranu. Rovina obsahující hrany OA_1 a OA_2 je *stěna* n-hranu; rovina obsahující OA_2 a OA_3 je jeho druhá stěna atd. Rovina hran OA_n a OA_1 je n-tá stěna. Úhel dvou sousedních hran je *strana* n-hranu; je celkem n stěn: $A_1OA_2, A_2OA_3, \ldots, A_nOA_1$. Podél každé hrany se protínají dvě stěny n-hranu v úhlu, jenž se nazývá *úhel* n-hranu.

b) Mnohohran je *vypuklý*, má-li každá jeho stěna tuto vlastnost: Mimo dvě hrany, které leží v dané stěně, leží všechny ostatní hrany po jedné a téže straně roviny obsahující danou stěnu. Podle této definice je trojhran vždy vypuklý (viz odst. 15a). Úhly vypuklého mnohohranu jsou vždy duté.

V dalším budeme se zabývati jen vypuklými mnohohrany, jichž úhly i strany jsou vesměs úhly duté.

Příklad mnohohranů, jež nejsou vypuklé, bude uveden jedině v odst. 25.

c) Stěny jakéhokoli mnohohranu protínají kulovou plochu, která má střed ve vrcholu O mnohohranu a poloměr rovný jednotce, v obrazci, jenž se nazývá *sférický mnohoúhelník*. Jeho *strany* rovnají se po řadě stranám mnohohranu; jsou to středové úhly $a_1, a_2, \ldots$ příslušné obloukům $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ hlavních kružnic (v obr. 21 je sférický čtyrúhelník $A_1A_2A_3A_4$ se stranami a_1, a_2, a_3, a_4 a úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$). Rovina oblouku A_1A_2 svírá s rovinou oblouku A_2A_3 *úhel* α_2 mnohoúhelníka; roviny oblouků A_2A_3 a A_3A_4 svírají úhel α_3 atd. Body $A_1, A_2, \ldots$ jsou *vrcholy* mnohoúhelníka.



Obr. 21.

V dalším jednáme vesměs o vypuklých sférických mnohoúhelnících, t. j. takových, které jsou vytvořeny průsekem kulové plochy s vypuklým mnohohranem. Každý úhel i každá strana vypuklého mnohoúhelníka je úhel dutý.

20. Tělesný úhel vypuklého mnohohranu a obsah sférického mnohoúhelníka. a) Každý vypuklý mnohohran má svůj tělesný úhel; podle definice podané v odst. 18a je tělesný úhel mnohohranu roven obsahu příslušného sférického mnohoúhelníka.

b) *Obsah P sférického n-úhelníka* je funkcí jeho úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vypočteme jej takto: Uvnitř mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ volíme na kulové ploše bod S, který spojíme oblouky hlavních kružnic s body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mnohoúhelník se tak rozdělí na n sférických trojúhelníků, takže

$$P = \triangle SA_1A_2 + \triangle SA_2A_3 + \ldots + \triangle SA_nA_1.$$

Součet všech vnitřních úhlů v těchto n trojúhelnících je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 2\pi;$$

podle vzorce (2) odst. 17 pro obsah trojúhelníka je tedy

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 2\pi - n\pi,$$

nebo, značíme-li součet zkráceně,

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n-2)\,\pi. \tag{1}$$

c) Tento vzorec upravíme zavedouce součet vnějších úhlů. Je-li α vnitřní úhel, je $(\pi - \alpha)$ příslušný vnější úhel mnohohranu. Výraz

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \ldots + (\pi - \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k)$$

rovná se tedy součtu vnějších úhlů. Patrně je

$$P = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k), \tag{2}$$

kteroužto rovnici vyjádříme větou: *Součet vnějších úhlů sférického mnohoúhelníka doplňuje se s jeho obsahem na povrch polokoule.*

d) Předchozí vzorce platí pro obrazce na kulové ploše o poloměru 1. Sférický n-úhelník o úhlech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sestrojený na kulové ploše o poloměru r má plošný obsah (srv. odst. 17c)

$$P = r^2 \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n-2)\,\pi\right]$$

nebo

$$P = r^2 \left[2\pi - \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k)\right].$$

21. Výplňkový neboli polární mnohohran. a) Budiž dán vypuklý n-hran T, jehož strany jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a jehož úhly jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (roviny stran a_n a a_1 svírají úhel α_1, roviny stran a_1 a a_2 úhel α_2 atd.). Předpokládáme, že

$$0 < a_k < \pi, \quad 0 < \alpha_k < \pi; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Kulová plocha Σ_1 o poloměru rovném 1, jež má střed ve vrcholu O n-hranu T, protíná se s jeho stěnami ve sférickém n-úhelníku T'. Podobně jako v odst. 15a v případě trojhranu tak i zde dělí se prostor každou stěnou n-hranu T na kladnou a zápornou část; kladná je ta, v níž jsou obsaženy další hrany (polopaprsky) n-hranu T. Bod, jenž je v kladné části prostoru vzhledem ke každé stěně mnohohranu T, leží, jak pravíme, uvnitř T; tak na př. všechny body na Σ_1, které leží uvnitř sférického n-úhelníka T', leží uvnitř T.

Normála (vnější) vztýčená ke stěně n-hranu T je kolmice, která míří z jeho vnitřku ven.

b) Sestrojme k jednotlivým stěnám n-hranu T normály $ON_1, ON_2, \ldots, ON_n$ ve smyslu právě vytčeném. Dostaneme tak n polopaprsků, které tvoří nový n-hran U; je to n-hran *výplňkový* neboli *polární* k danému T. Jeho strany označíme $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ a jeho úhly $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$; úhel α'_1 je utvořen jeho n-tou a první stěnou, jež se protínají v ON_1; úhel α'_2 první a druhou stěnou, jež se protínají v ON_2 atd. Strana a'_1 má ramena ON_n a ON_1, strana a'_2 ramena ON_1 a ON_2 atd.

Je-li U výplňkový n-hran k T, je T výplňkový k U a platí vztahy

$$a_k + \alpha'_k = \pi, \quad a'_k + \alpha_k = \pi; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Důkaz provede se právě tak jako obdobný důkaz o trojhranu v odst. 16b; pro lepší přehled užijeme zase pomocného bodu S, ležícího uvnitř T, jakožto vrcholu trojhranu výplňkového k T (T má vrchol O). Výplňkový n-hran U je vypuklý právě tak jako T.

T protíná Σ_1 ve sférickém n-úhelníku T' o stranách a_k a úhlech α_k; výplňkový n-hran U protíná Σ_1 ve *výplňkovém* neboli *polárním sférickém n-úhelníku* U' o stranách a'_k a úhlech α'_k. Budiž P obsah n-úhelníka T' a L' obvod výplňkového U', vzhledem k (1) a k rovnici (2) odst. 20 je

$$P + L' = 2\pi,$$

kde

$$L' = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} a'_k.$$

Tedy: *Obsah vypuklého sférického mnohoúhelníka doplňuje se s obvodem polárního na plný úhel.*

Z toho plyne dále: *Obvod vypuklého sférického mnohoúhelníka je menší než 2π.* Jinými slovy: *Součet stran vypuklého n-hranu je menší než plný úhel.*

c) Hrany n-hranu U protínají plochu Σ_1 v bodech N_1, $N_2, \ldots, N_n$, jež jsou vrcholy sférického n-úhelníka U'; U' se nazývá *sférickým obrazem* daného n-hranu T. Vrchol N_k sférického n-úhelníka U' odpovídá k-té stěně n-hranu T; ON_k je kolmice k té stěně.

22. Věta o deformaci vypuklého mnohohranu. Budiž T vypuklý n-hran a U' jeho sférický obraz. Má-li T strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a U' úhly $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, je podle (1) odst. 20 obsah P' n-úhelníka U' roven

$$P' = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k - (n - 2)\,\pi.$$

Podle (1) odst. 21 je

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k = \sum_{k=1}^{n} (\pi - a_k) = n\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

takže

$$P' = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

P' nezávisí tedy na úhlech n-hranu T, nýbrž jen na součtu jeho stran. Představme si, že T je zhotoven na př. z dřevěných desek, jež jsou podél hran opatřeny závěsy, takže se

mohou kolem nich volně otáčeti; pravíme, že se T může takto „deformovat". Rovnice (1), kterou znal již Descartes, má pak tento smysl: *Deformuje-li se mnohohran beze změny svých stran, nemění se obsah jeho sférického obrazu.* Jinými slovy: nemění se tělesný úhel mnohohranu polárního.

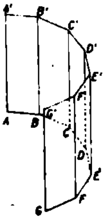
Poznamenejme, že nelze deformovati trojhran, neboť trojhran je jednoznačně určen svými třemi stranami. Deformovati lze n-hran, je-li $n > 3$.

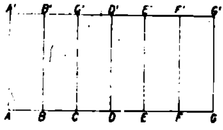
23. Mnohostěnové plochy. Jednoduché příklady. a) Spojíme-li několik mnohoúhelníků (srv. odst. 4a) tak, že každý z nich má se sousedním společnou jen stranu, vznikne *mnohostěnová plocha.* Mnohostěnová plocha je *otevřená*, je-li omezena jednou nebo více lomenými čarami, které tvoří její *kraj*. Mnohostěnová plocha je *uzavřená*, dělí-li prostor na dvě části, t. j. vnějšek a vnitřek plochy, tak že z jedné části nelze do druhé přejíti aniž by se prošlo plochou; uzavřená plocha nemá kraje. Mnohoúhelníky, z nichž se skládá mnohostěnová plocha, jsou její *stěny*; jejich vrcholy jsou *vrcholy* plochy a jejich strany jsou *hrany* plochy.

Příkladem otevřené plochy omezené jedinou uzavřenou lomenou čarou je plášť jehlanu; obvod podstavy jehlanu je krajem plochy. Příkladem otevřené plochy, jejíž kraj se skládá ze dvou oddělených uzavřených lomených čar, je plocha složená ze čtyř stěn krychle; dostaneme ji vynechajíce ze šesti stěn krychle dvě protější. Uzavřené mnohostěnové plochy (mnohostěny) jsou na př. čtyrstěn, krychle atd. O vlastnostech mnohostěnů jedná se v kap. IV.

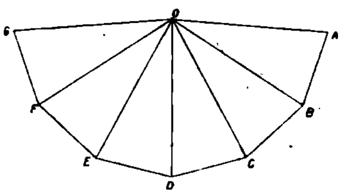
b) Ohýbáme-li kus tenkého a původně rovného papíru, nabývá tvaru buď válcové plochy, nebo kuželové plochy a j. Sledujeme-li blíže způsob, kterým se tyto nové plochy obyčejně odvozují z původní roviny, shledáme, že se ohýbání papíru děje vždy podél přímky. Přechází-li na př. rovina do tvaru kuželové plochy, ohýbá se ovšem kolem nekonečně mnohých přímek (kuželová plocha má nekonečně mnoho hran) a podobně i v ostatních případech ohybu. Ohýbání roviny do tvaru křivé plochy dá se *přibližně* nahraditi ohýbáním, při kterém z roviny vznikne ne křivá nýbrž mnohostěnová plocha. Uveďme tři příklady:

Plášť kolmého hranolu má, rozvineme-li jej do roviny, síť složenou z několika obdélníků o stejné výšce. V obr. 22a je znázorněna část hranolového pláště složená ze šesti stejných obdélníků; v obr. 22b je táž část pláště rozvinutá do roviny.

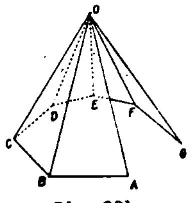

Obr. 22a.


Obr. 22b.

Plášť pravidelného jehlanu má, rozvineme-li jej do roviny, síť složenou z několika rovnoramenných trojúhelníků o stejně dlouhých ramenech.



Obr. 23a.



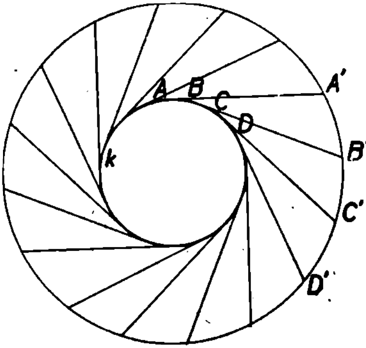
Obr. 23b.

V obr. 23a je znázorněna část jehlanového pláště složená ze šesti shodných rovnoramenných trojúhelníků; v obr. 23b je táž část pláště rozvinutá do roviny.

Na kruhový list tuhého papíru narýsujeme kružnici k, jejíž obvod rozdělíme na šestnáct stejných dílů; v dělících bodech narýsujeme tečny, které jsou stranami pravidelného šestnáctiúhelníka o vrcholech ABC ... opsaného kružnici k (obr. 24). Na jeho obvodě volme určitý smysl oběhu na př. od A přes B k C atd. Každou stranu prodlužme v tomto smyslu, až protne kraj papíru. AB prodloužena protne kraj papíru v A', BC v B' atd.

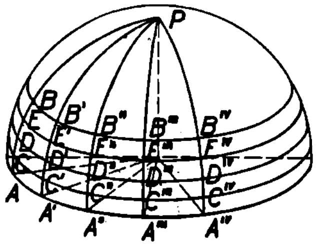
Nařízněme pak papír, podél úseček BB', CC', ... tak, aby se mohl podél nich ohýbati. Podél AA' jej prořízneme a vystřihneme vnitřek šestnáctiúhelníka. Oddalme jeden „břeh" řezu AA' od druhého tak, že se list papíru ohýbá kolem úseček BB', CC', ... šestnáct trojúhelníků $BA'B'$, $CB'C'$, $DC'D'$, ..., které původně byly v rovině, rozloží se v prostoru.

Body, které původně byly vrcholy šestnáctiúhelníka, budou rozloženy podél šroubovice. Deformace mnohostěnové plochy složené ze šestnácti trojúhelníků dává obraz o deformaci roviny v plochu, kterou vytvořují tečny obyčejné šroubovice.



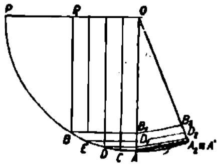
Obr. 24.

24. Mnohostěn vepsaný do kulového pásu. Budiž dán kulový pás omezený hlavní kružnicí koule a kružnicí s ní rovnoběžnou; vzdálenost obou kružnic budiž rovna polovině poloměru koule. Rozdělme pás na několik na př. na šestnáct stejných dílů oblouky hlavních kružnic (meridiánů) AB, $A'B'$, $A''B''$ atd. (obr. 25). Rozdělme mimo to vzdálenost mezi rovinami obou kružnic, které omezují pás, na čtyři stejné díly a dělícími body veďme roviny (tři) rovnoběžné s rovinami kružnic. Tak se rozdělí pás na 64 *křivočarých lichoběžníků*. Volme jejich vrcholy za vrcholy mnohostěnové plochy, která je omezena 64 *obyčejnými lichoběžníky*.



Obr. 25.

Čtyři lichoběžníky (obyčejné), jichž ramena AC, CD, DE, EB, resp. $A'C', C'D', D'E', E'B'$ jsou vepsána do oblouku AB, resp. $A'B'$ (obr. 25), sestrojíme takto: Narýsujeme kvadrant AOP hlavní kružnice, rozpůlíme jeho poloměr OP bodem P_1 a úsečku OP_1 rozdělíme na čtyři stejné díly. Dělícími body vedeme rovnoběžky k poloměru OA ($OA \perp OP$); tak dostaneme na oblouku AP body C, D, E, B. Tětivy AC, CD, DE, EB jsou hledaná ramena lichoběžníků (obr. 26). Promítněme nyní body C, D, E, B kolmo do OA a buďte C_1, D_1, E_1, B_1 příslušné průměty. V kruhové výseči OAA', která má za jeden krajní poloměr OA a středový úhel rovný $\frac{1}{16}$ plného úhlu, t. j. $\frac{1}{8}\pi$, vedeme tětivu AA' a k ní rovnoběžky body C_1, D_1, E_1, B_1. Jejich průsečíky s OA' buďte C_2, D_2, E_2, B_2. Úsečky $C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2, B_1B_2$ jsou hledané základny lichoběžníků.



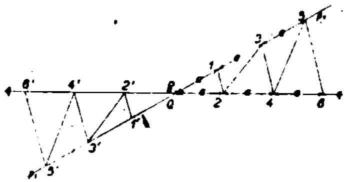
Obr. 26.

Vystřihněme z tuhého papíru čtyři lichoběžníky $AA'C'C$, $CC'D'D, DD'E'E, EE'B'B$ a spojme podél společných hran buď závěsy nebo přilepenými proužky plátna; připojme pak podle obr. 25 další stejné skupiny po čtyrech lichoběžnících. Tak dostaneme mnohostěnovou plochu o 64 stěnách, model kulového pásu, a můžeme na ní sledovati různé tvary, do kterých lze zohýbati kulový pás *proříznutý podél AB*. Mnohohrany při vrcholech této mnohostěnové plochy jsou všechny vypuklé.

Na rozdíl od příkladů uvedených v odst. 23 *není možno rozvinouti tento pás do roviny;* takové rozvinutí stává se možným teprve když provedeme v pásu další řezy podél vhodně volených hran.

25. Příklad mnohostěnové plochy, jejíž mnohohrany při vrcholech nejsou vypuklé. Otáčí-li se přímka rovnoměrně kolem pevné osy, kterou kolmo protíná, a pošinuje-li se zároveň podél ní, vytvoří *kolmou šroubovou plochu* neboli *helikoid*. Helikoid je (pravotočivý) *pravý*, souhlasí-li otáčivý pohyb přímky, pozorovaný ve smyslu jejího postupného pohybu, s pohybem hodinových ručiček; v opačném případě je helikoid (levotočivý) *levý*. Část helikoidu vytvořená otočením přímky o plný úhel nazývá se *závit* helikoidu.

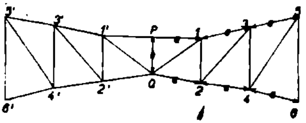
Mnohostěnovou plochu vepsanou do závitu helikoidu sestrojíme tak, že rozdělíme celý závit na dvanáct stejných dílů, vepíšeme mnohostěnovou plochu (složenou z trojúhelníků) do jedné dvanáctiny závitu a pak spojíme dvanáct takovýchto ploch.



Obr. 27.

Budiž p počáteční poloha tvořící přímky a q poloha, do které se přímka dostane po otočení o dvanáctinu plného úhlu (o 30°); současně s tímto otočením pošine se přímka podél osy otáčení o délku h. V obr. 27 je průmět p_1 přímky p do průmětny kolmé k ose otáčení a přímka q, jež leží v průmětně. Průmět P_1 bodu P, v němž osa protíná přímku p, a bod Q, v němž protíná přímku q, se ztotožňují. Na přímku p naneseme počínajíce bodem P stejně dlouhé úsečky o délce a (v obr. 27 jsou naneseny tři na jednu stranu a tři na druhou). Jejich koncové body označíme po řadě *1, 3, 5* (na jedné straně) a *1′, 3′, 5′* (na druhé). Podobně naneseme stejně dlouhé úsečky a na přímku q počínajíce od bodu Q; jejich koncové body jsou *2, 4, 6* resp. *2′, 4′, 6′*. Spojme Q s *1*, *1* s *2*, *k* s *3* atd. Dostaneme celkem dvanáct trojúhelníků *456*, *345*, *234*, *123*, *Q12*, *Q1P*, *Q1′P*, *Q1′2′*, *1′2′3′*, *2′3′4′*, *3′4′5′*, *4′5′6′*, *2*teré tvoří mnohostěnovou plochu vepsanou do dvanáctiny závitu pravého helikoidu.

Skutečné délky hran *P1*, *13*, *35*, *24* atd. jsou stejné, každá se rovná a. Skutečná délka hrany na př. *34* rovná se přeponě pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je úsečka *34* jevící se v obrazci 27; druhá odvěsna má délku h. Sestrojíme-li ze skutečných délek všech hran síť oné dvanáctistěnné mnohostěnové plochy, dostaneme obrazec 28. Ohneme-li stěnu *456* podél hrany *45* dozadu (za rovinu nákresu), stěnu *345* podél hrany *34* dopředu atd, srovnají se do přímky jednak hrany *5′3′*, *3′1′*, ..., *35*, jednak hrany *6′4′*, *4′2′*, ..., *46* a dostaneme mnohostěnovou plochu vepsanou do jedné dvanáctiny pravého helikoidu (kdybychom ohýbali všude dopředu místo dozadu a dozadu místo dopředu, dostali bychom plochu vepsanou do levého helikoidu).



Obr. 28.

Spojíme-li dvanáct takových stejných ploch, dostaneme plochu vepsanou do jednoho závitu pravého helikoidu (výška závitu je 12 h). Spojení se provede tak, že hrana *6′4′* jedné plochy splyne s hranou *5′3′* následující plochy, hrana *4′2′* jedné s hranou *3′1′* následující atd. *Ani jediný mnohohran při vrcholech mnohostěnové plochy vepsané do závitu helikoidu není vypuklý*, neboť na př. při vrcholu *4′* jsou v obrazci 28 tři úhly α, β, γ (strany), jež mají součet větší než 180°, a podobně při vrcholu *3′* tři úhly $\delta, \varepsilon, \eta$ se součtem větším než 180°. Plocha, jež vznikne právě popsaným spojením dvanáctistěnových ploch (obr. 28), bude míti tedy při jednom vrcholu šest hranových úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ se součtem větším než 360°.