8. AXIOMY

8·1. Co jsou to axiomy. Zpravidla se říká, že axiom je výrok, který není třeba dokazovat. Tak na příklad v elementární geometrii je axiomem výrok „libovolné dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod". V geometrii tento výrok nedokazujeme, nýbrž naopak z tohoto výroku a ostatních axiomů můžeme logicky odvodit celý obsah geometrie, t. j. všechny geometrické věty, aniž bychom se opírali o názorné představy nebo o zkušenost.

Představujeme si při tom sice názorné geometrické objekty, jako přímky, kružnice atd. (případně je znázorňujeme také nákresem), potřebujeme to však spíše z psychologických důvodů — jako oporu paměti, představivosti atd. K vybudování geometrie, t. j. k odvození geometrických vět, nejsou však již tyto představy nutné, jakmile jsou nám dány axiomy. Nepotřebujeme pak dokonce ani vědět, co je to bod, přímka atd., neboť můžeme r y z e f o r m á l n ě, t. j. aniž bychom dbali významu jednotlivých termínů, které se vyskytují v axiomech, odvodit z nich logicky celý obsah určitého oboru, v našem případě elementární geometrie.

Najdeme-li v určitém oboru skupinu vět, z níž můžeme logicky odvodit všechny ostatní věty tohoto oboru, aniž bychom při tom užili nějakých jiných prostředků, jako třeba odvolání na zkušenost nebo názor, pak můžeme tyto věty prohlásit za a x i o m y uvažovaného oboru. Říkáme potom, že jsme tento obor vybudovali **axiomaticky (deduktivně).** Ve volbě axiomů, t. j. skupiny vět, z nichž odvozujeme ostatní věty, je ovšem značná libovůle. — Axiomaticky můžeme vybudovat na příklad mechaniku. Některé věty mechaniky, založené na zkušenosti, na příklad „zrychlení tělesa je přímo úměrné síle, která na něj působí, a nepřímo úměrné jeho hmotě", si zvolíme za axiomy a z nich odvozujeme ostatní věty mechaniky, aniž se dále odvoláváme na zkušenost.

Charakterisujeme nyní axiomy přesněji. Především je jasné, že nelze mluvit o axiomu vůbec, nýbrž jen o axiomu určitého oboru, neboť, jak uvidíme, axiom jednoho oboru může být dokazatelnou větou oboru jiného. **Axiomy** určitého oboru (jak se někdy říká, určité „řeči" — třeba „geometrické řeči") jsou tedy věty, které se v tomto oboru neodvozují z jiných vět. To ovšem platí také o definicích a tautologických větách (a také o větách protokolárních), takže musíme ještě říci, čím se axiomy od nich liší.

Tautologické věty se liší od axiomů tím, že jejich správnost je dána již jejich tvarem, t. j. nezávisle na tom, z jakých výrazů se skládají, což ovšem o axiomech neplatí. Přesněji řečeno, tautologické věty se vyznačují na rozdíl od axiomů vlastností, kterou teď popíši. Utvoříme-li z tautologické věty nový výrok tak, že každý výraz (výrokovou funkci a pod.), který se v ní vyskytuje, s výjimkou logických spojek a logických operátorů (jež právě určují „tvar" výroku ve smyslu, který je zde míněn), nahradíme libovolným jiným přípustným výrazem, pak takto vzniklý výrok je nutně správný.

Logický rozdíl mezi axiomem a definicí je někdy nezřetelný, protože v některých případech je věcí konvence, zda považujeme danou větu za axiom nebo za definici. Zpravidla je však rozdíl zřejmý. Spočívá v tom, že každá definice stanoví význam jednoho určitého výrazu a umožňuje jeho eliminaci; naproti tomu nedá se mluvit o tom, že by axiom umožňoval eliminaci výrazů, které se v něm vyskytují (t. zv. **základních výrazů**). Význam těchto výrazů je určován — ovšem jen nepřímo — zpravidla pouze celým souborem axiomů, nikoli axiomem jednotlivým.

Tak jako jsou možné různé, ale navzájem rovnocenné definice téhož výrazu, stejně tak lze do značné míry libovolně zvolit axiomy určitého oboru; tak v elementární geometrii lze nahradit euklidovský axiom „daným bodem k dané přímce lze vést jednu jedinou rovnoběžku" axiomem „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°"; tím se na obsahu geometrie nic nezmění. Máme-li se rozhodnout pro některý z možných, navzájem rovnocenných, systémů axiomů, pak se řídíme metodologickými hledisky: jednoduchostí, přehledností, názorností atd. zvoleného systému. Při tom ovšem musí systém axiomů splňovati jisté podmínky; především musí být bezesporný (viz odst. 8·5). Význam základních výrazů a tedy také význam axiomů nemůže ovšem být určen logickou definicí uvnitř oboru, který na těchto axiomech budujeme, neboť jinak by to právě nebyly základní výrazy. Může však být dán názorně, jak to vidíme v elementární geometrii, nebo na základě zkušeností anebo pomocí pojmů (výrazů) z jiného matematického oboru. Můžeme však také postupovat ryze formálně a nepřisuzovat základním výrazům předem žádný určitý význam. V tom je rozdíl dvou možných pojetí axiomatiky, obsahového a formálního.

8·2. Obsahové pojetí axiomů. Když budujeme axiomaticky na příklad mechaniku, jak jsme se o tom zmínili v předešlém odstavci, pak jako axiomy vystupují pravdivé čili obsahově správné věty (srov. odst. 4·7) a formálně správné věty, odvozené z těchto axiomů, jsou zároveň pravdivé, t. j. ve shodě se zkušeností. To je jeden druh obsahového pojetí axiomů, který však pro matematiku celkem nemá význam.

Jiný typ obsahového pojetí axiomů vidíme v geometrii.

V elementární geometrii, jak ji známe ze střední školy, mají základní výrazy, jako „bod", „přímka", „. . . leží na . . .", označovat určité objekty, které si názorně představujeme a které jsme získali abstrakcí ze zkušenosti, t. j. „ideální bod", „ideální přímka" a různé jejich vztahy. Axiomy pak vyjadřují ty vlastnosti těchto představovaných objektů, které jsou názorně evidentní; jsou tedy jakýmsi jejich popisem. Mluvíme zde o názorně evidentních vlastnostech: když říkáme, že nějaká vlastnost nebo — lépe řečeno — nějaký výrok je názorně evidentní, pak tím míníme toto: nedovedeme si názorně představit (nikoliv snad jen nenázorně, abstraktně myslet), že by platil jejich opak. Tak si nedovedeme názorně představit dvě různé přímky, které by se protínaly ve dvou bodech; to právě znamená: je názorně evidentní, že dvě přímky mají nejvýše jeden společný bod.

Elementární geometrie je příkladem **názorného pojetí** axiomatiky (je to speciální případ pojetí obsahového). Toto pojetí spočívá, jak vidíme v tom, že 1. pojímáme základní výrazy jako označení jistých názorných objektů, vlastností a vztahů, získaných abstrakcí ze zkušeností; 2. jako axiomy vystupují názorně evidentní výroky.

Poznamenáme ještě, že termín „názorně evidentní" je dosti nejasný a zřejmě nepatří přímo do logiky, aspoň ne do logiky formální. Je samozřejmé, že také při názorovém pojetí musí axiomy vyhovovat všem logickým požadavkům. T. zv. „názorná evidence" není žádnou zárukou „správnosti" axiomů nebo jejich bezespornosti a slouží jen jako vodítko při zavedení axiomů.

Tytéž axiomy, které známe z obvyklé elementární geometrie, platí však také tehdy, když dáme základním výrazům zcela jiný význam, čili když zvolíme, jak se říká, jinou jejich interpretaci. To nyní ukážeme.

Zaveďme si následující definice. Každou dvojici reálných čísel nazveme **b o d e m**. Každou lineární rovnici tvaru $ax + by + c = 0$, v níž není současně $a = 0$ a $b = 0$ (tedy na příklad $3x + 2y — 4 = 0$ nebo $x + 2y = 0$, nebo $5x — 6 = 0$), nazveme **p ř í m k o u**; při tom však považujeme rovnice, které se navzájem liší pouze tak, že se jedna dostane z druhé vynásobením vhodným pevným číslem (na příklad rovnice $2x + 3y — 1 = 0$ a $4x + 6y — 2 = 0$), za tutéž přímku. Je-li A určitý bod, t. j. dvojice čísel (x_1, y_1), a p určitá přímka, t. j. rovnice $a x + by + c = 0$, pak říkáme, že **b o d A l e ž í n a p ř í m c e p**, když čísla $x, y,$ jsou řešením rovnice $ax + by + c = 0$, t. j. když $ax_1 + by_1 + c = 0$; tak na příklad bod (2,3) leží na přímce $x — 2y + 4 = 0$. Podobným způsobem si zavedeme také všechny ostatní základní výrazy geometrie. Všechny tyto výrazy jsou pak logicky definovány, a to pomocí algebraických termínů. Platí pro ně, jak se snadno zjistí, všechny axiomy elementární geometrie. Tak na příklad výrok „dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod" znamená pak „jestliže koeficienty rovnic $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ nejsou si navzájem úměrné, pak tyto rovnice mají nejvýše jedno společné řešení". To však je správná věta algebry, jak se čtenář sám může snadno přesvědčit.

Z těchto axiomů můžeme pak odvodit všechny věty elementární geometrie. Dostaneme tak elementární geometrii, v níž však termín „bod" nebo „přímka" nebude již označovat názorný bod nebo přímku, nýbrž dvojici čísel nebo lineární rovnici.

Na tomto příkladě vidíme jiný typ **obsahového pojetí** axiomatiky. Základní výrazy označují při tomto pojetí určité matematické objekty (v našem případě objekty algebraické: dvojice čísel, rovnice a pod.). Axiomy jsou pak dokazatelnými větami o těchto objektech. Při tomto pojetí se tedy dají základní výrazy definovat a axiomy dokázat, jenže ovšem nikoli v oboru, který má teprve být axiomaticky vybudován, nýbrž v jistém oboru, který byl vybudován již dříve (v našem příkladě je to algebra).

Jak vidíme z těchto příkladů, můžeme tentýž systém základních výrazů a axiomů interpretovat zcela různým způsobem: v našem případě se vztahuje jednou na názorné body a přímky, po druhé na dvojice čísel a rovnice. Při vlastní logické výstavbě oboru, daného těmito axiomy, nehraje však volba jejich významu, čili jejich **interpretace**, žádnou roli. Tato okolnost vede k formálnímu pojetí axiomatiky, které nyní vyložíme.

8·3. Formální pojetí axiomů. Při tomto pojetí jsou dány především základní výrazy, z nichž se tvoří výroky. Tyto základní výrazy nejsou logicky definovány, ani není jejich význam nějak jinak předem vysvětlen. Dále je dána řada výroků, utvořených z těchto výrazů, které prohlásíme za správné, t. j. za axiomy. Všechny další výrazy potom již definujeme; výroky považujeme za správné jen tehdy, když se dají logicky odvodit z axiomů (a definicí a tautologických vět).

Jako příklad uvedeme nyní jeden takový axiomatický systém*), jenž slouží k axiomatickému vybudování aritmetiky.

Základní výrazy jsou dva (nepočítáme-li značku identity „$=$"): označovací vzorec „následovník x" (krátce „x'") a označení „nula" (krátce „0"). Za axiomy prohlásíme tyto výroky: (1) „pro žádné x není $x' = 0$"; (2) „když $x' = y'$, pak $x = y$" a kromě toho (3) každý výrok následujícího tvaru: „když 1. 0 má

*) Uvádím zde systém axiomů, který se liší od obvyklého Peanova systému tím, že vynechávám axiomy „0 je číslo", „když x je číslo, pak x' je číslo", které není nutné explicitně vyslovovat. Viz na př. Hilbert-Bernays: Grundlagen der Mathematik, I. sv., str. 220.

vlastnost P a 2. když x má vlastnost P, pak ji má také x', potom každé x má vlastnost P".

Zde není vůbec řečeno, co znamenají termíny „následovník", „nula". Zacházíme s nimi čistě formálně jako s pouhými značkami, u nichž nezáleží na tom, zda mají nějaký smysl. Můžeme tak logicky odvodit z axiomů celý systém vět a pak interpretovat — ať již názorně nebo jinak — základní výrazy a axiomy, a tím i všechny odvozené věty.

Ač význam základních výrazů není při formálním pojetí předem určen, lze tyto výrazy v jistém smyslu považovat za nepřímo definované dodatečně pomocí axiomů. Tím se míní někdy prostě to, že teprve po zavedení axiomů má smysl říkat o výrocích, které jsou utvořeny z daných základních výrazů, že jsou správné nebo nesprávné. Lze to však pojímat také hlubším způsobem. Axiomy nedefinují sice přímo základní výrazy, avšak axiomy je c h a r a k t e r i s o v á n a určitá l o g i c k á s t r u k t u r a (systém vztahů), v níž ovšem záleží jen na vzájemných vztazích prvků, nikoli však na těchto prvcích samotných. Axiomy popisují „roli" základních výrazů v této logické struktuře a tak stanoví jejich význam. Můžeme to říci poněkud obrazně takto: Otázka „co je to přirozené číslo?" nemá smysl, neboť pro přirozené číslo je charakteristická pouze jeho „role" v určité logické struktuře. Smysl má jen otázka „co jsou to přirozená čísla?"; odpoví se na ní popisem určité logické struktury, tedy udáním určitého systému axiomů. (Je to ostatně právě ten systém axiomů, který jsme uvedli jako příklad v tomto odstavci.)

8·4. Interpretace axiomů. Najdeme-li určité objekty, pro něž platí (zavedeme-li vhodné definice) daný systém axiomů, pak říkáme, že jsme tento systém **interpretovali**, a že tyto objekty tvoří **model** čili **interpretaci** daného systému axiomů. Interpretovali jsme již axiomy geometrie a to dvojím způsobem: jednak pomocí algebraických objektů — dvojic čísel, rovnic atd., jednak pomocí názorných bodů, přímek atd. Systém axiomů, který jsme uvedli v předešlém odstavci, je základem pro vybudování aritmetiky; kdybychom však aritmetiku již vybudovali dříve jiným způsobem, mohli bychom interpretovat tento systém pomocí celých nezáporných čísel tímto způsobem: „nulou" nazveme číslo 0, „následovníkem" čísla x nazveme číslo $x + 1$, načež jsou, jak se snadno zjistí, splněny všechny axiomy.

Jak jsme viděli, může tentýž systém axiomů připouštět řadu interpretací ve zcela různých oborech. Metodologický význam formálního pojetí axiomů spočívá právě v tom, že se neomezujeme předem na určitý pevný model. Věty, které byly logicky odvozeny z formálně pojímaných axiomů, zůstávají totiž v platnosti pro libovolnou interpretaci, a tak získáváme dík formálnímu postupu současně věty z nejrůznějších oborů podle toho, který model si zvolíme. (Tak na příklad vedle názorných geometrických vět získáme věty z theorie rovnic.) Důležité je při tom také to, že při vlastní logické výstavbě se soustřeďujeme na to, co je podstatné — totiž na logickou strukturu vztahů, danou axiomy, a ponecháváme stranou to, co je vedlejší — totiž případný „konkretní" význam základních výrazů a axiomů.

Na druhé straně je však nutno říci, že je velmi obtížné provádět úvahy, a zvlášť hledat nové důkazy a věty, když zůstáváme v rámci formální axiomatiky a nezvolíme si žádnou interpretaci. Proto zpravidla stále myslíme, třeba že často dosti neurčitě, na nějaký model uvažovaného systému axiomů.

8'5. Bezespornost. Systém axiomů musí být především bezesporný. To znamená, že z axiomů se nesmějí dát odvodit odporující si výroky. Je zřejmé, že tento požadavek má naprosto základní význam.

Prokázat bezespornost daného axiomatického systému lze dvěma způsoby: 1. můžeme přímo prokázat, že když vycházíme z tohoto systému axiomů, nedostaneme se nikdy logickým odvozováním k odporujícím si výrokům. To znamená, že si musíme nejdříve „pořídit katalog" všech možných logických úsudků a tím i všech výroků, které se dají odvodit z daného systému axiomů, a pak prokázat, že se mezi těmito výroky nevyskytuje současně s nějakým výrokem také jeho negace.

2. Můžeme však také prokázat bezespornost tak, že udáme interpretaci daného systému v některém oboru, který považujeme za bezesporný. Říkáme pak, že uvažovaný axiomatický systém je **splnitelný**. Tak bezespornost axiomů elementární (euklidovské) geometrie můžeme považovat za prokázanou tím, že jsme pro ně udali algebraický model. Kdyby se totiž z těchto axiomů dal odvodit spor, pak by se při této interpretaci objevil spor také v algebře, to však p o k l á d á m e za vyloučené. Zde pozorujeme také jednu okolnost, která se zpravidla objevuje při důkaze bezespornosti druhou metodou (na základě splnitelnosti). Volíme si totiž pro důkaz bezespornosti jiný, v nějakém ohledu pohodlnější, model než jakého jinak skutečně užíváme. Tak zde užijeme algebraické interpretace, jinak však interpretujeme daný systém axiomů názorně — geometricky.

Je zřejmé, že touto druhou metodou nerozřešíme, nýbrž pouze odsuneme problém důkazu bezespornosti, neboť musíme vždy předpokládat bezespornost oboru, v němž jsme si sestrojili model (tak v našem příkladě jsme předpokládali bezespornost algebry). Zpravidla se při tom postupuje tak, že touto metodou sestoupíme od analysy, algebry atd. až k aritmetice přirozených čísel. Teprve pro ni musí být proveden vlastní důkaz bezespornosti, který pak znamená zabezpečení základů celé matematiky. Tím se však budeme zabývat až v další kapitole.

O další vlastnosti axiomatických systémů, totiž **splnitelnosti**, jsme se již stručně zmínili. Poznamenáme jen, že může jít buď o splnitelnost vůbec, t. j. jakýmkoli modelem, nebo o splnitelnost modelem určitého druhu, na příklad algebraickým modelem nebo názorným modelem, v němž se vyskytuje jen konečný počet objektů. Tak systém axiomů, který jsme uvedli na str. 90, je splnitelný, ale není splnitelný konečným modelem.

8·6. Úplnost. Když mluvíme o úplnosti systému axiomů, musíme rozlišovat dva významy tohoto slova. První význam je tento: systém axiomů určitého oboru nazýváme úplným, když se z něho dá odvodit každý správný (pravdivý) výrok tohoto oboru. Řekneme-li v tomto smyslu na příklad, že daný systém axiomů mechaniky je úplný, pak to znamená, že se z něho dají logicky odvodit bez použití názoru nebo zkušenosti všechny věty mechaniky (získané původně ze zkušenosti). O úplnosti v tomto smyslu lze tedy mluvit pouze při obsahovém pojetí axiomů, a to především tam, kde jde o axiomatické podložení již vybudovaného oboru.

Jiný význam má úplnost při formálním pojetí axiomatiky. Systém axiomů nazýváme v tomto smyslu úplným, když k němu nelze přidat žádný nový axiom, aniž by vznikl spor. Řečeno jinak, nazýváme systém axiomů úplným, když každý výrok, utvořený ze základních výrazů, vyskytující se v těchto axiomech, buď se dá logicky odvodit z axiomů nebo je s nimi ve sporu. Řečeno ještě jinak, systém axiomů není úplný v tom případě, že se dá najít nějaký výrok **P** (složený z daných základních výrazů) takový, že k danému systému axiomů můžeme připojit buď **P** anebo non **P**, aniž by se tím porušila bezespornost. Tak na příklad vynecháme-li ze systému axiomů obyčejné rovinné geometrie euklidovský axiom „daným bodem k dané přímce prochází jedna jediná rovnoběžka", pak není vzniklý systém axiomů úplný, neboť můžeme k němu připojit buď znovu tento axiom, nebo jeho negaci (čímž vznikne jakási obecná neeuklidovská geometrie), aniž v jednom nebo v druhém případě vznikne spor. O tom, že spor skutečně nevzniká, můžeme se přesvědčit na algebraickém modelu.

8'7. Nezávislost. Na rozdíl od zmíněných vlastností axiomatických systémů má nezávislost především metodologický a nikoliv čistě logický význam.

Nazýváme systém axiomů **nezávislým**, když žádný z axiomů tohoto systému nelze logicky odvodit z ostatních. Tak na příklad systém axiomů uvedený na str. 90 je, jak můžeme snadno zjistit, nezávislý. Nezávislost systému axiomů je s metodického hlediska velmi významným požadavkem, neboť ty axiomy, které se dají odvodit z ostatních, jsou zřejmě zbytečné. Jejich odstraněním získá systém axiomů na přehlednosti a jednoduchosti; na obsahu daného oboru se tím ovšem nic nezmění.

Je-li systém axiomů nezávislý, pak zřejmě nelze žádný z nich ani dokázat, ani vyvrátit na základě ostatních axiomů. Nahradíme-li tedy některý axiom jeho negací, pak je vzniklý axiomatický systém bezesporný. Této okolnosti užíváme při důkazu nezávislosti systému axiomů, který provádíme následujícím způsobem: Nahradíme jeden z axiomů jeho negací a hledáme interpretaci takto vzniklého axiomatického systému v nějakém oboru, který považujeme za bezesporný. Podaří-li se nám takovou interpretaci najít, pak to znamená, že uvažovaný axiom je nezávislý na ostatních axiomech daného systému.