Jaká je logická výstavba matematiky?

7. Definice

In: Miroslav Katětov (author): Jaká je logická výstavba matematiky?. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 79–84.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403139

7·1. Co je to definice. Termín (výraz, pojem) je definován, když je stanoven jeho význam. To je sice jasné, musíme však říci přesně, co to znamená „stanovit význam".

Můžeme říci, že známe význam nějakého výrazu, když známe význam každého výroku, ve kterém se tento výraz vyskytuje, t. j. když dovedeme každý takový výrok převést na ekvivalentní výrok, ve kterém již není uvažovaný výraz obsažen. Tak význam výrazu „rovnoběžný" je v geometrii roviny určen definicí „přímky, které nemají žádný společný bod, nazýváme rovnoběžnými", neboť na základě této definice můžeme všude nahradit výraz „rovnoběžný", výrazem „... které nemají žádný společný bod". Můžeme tedy říci krátce: definice je výrok, kterým je úplně určen význam definovaného výrazu. Řečeno podrobněji a přesněji, definice výrazu je výrok, na jehož základě můžeme převést libovolný předložený výrok, který obsahuje tento výraz, na ekvivalentní výrok, který jej již neobsahuje.

Definice je tedy charakterisována pouze svou logickou funkcí (úkolem) — totiž tím, že umožňuje eliminaci definovaného výrazu. Není však vůbec předepsáno, jaký logický tvar má definice mít. Tak není naprosto nutné, aby definice byla utvořena podle známého pravidla „definitio fit per genus proximum et differentiam specificam", t. j. pomocí pojmu nejblíže nadřaděného a druhového rozdílu. Ostatně často není vůbec možné uvést definici na tento tvar.

Tentýž termín lze definovat různým způsobem, neboť smíme považovat za definici termínu každý výrok, který umožňuje jeho eliminaci. Tak na příklad každý z následujících výroků můžeme zvolit (v planimetrii) za definici výrazu „přímky jsou rovnoběžné": 1. dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, když nemají žádný společný bod; 2. dvě přímky nazýváme rovnoběžnými, když mají společnou kolmici; 3. dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, když se dotýkají aspoň tří kružnic o stejném poloměru. Tyto výroky jsou navzájem ekvivalentní; jakmile zvolíme jeden z nich za definici, stanou se ostatní dva dokazatelnými větami. O tom, který z nich skutečně zvolíme za definici, rozhodují pouze metodická hlediska — jednoduchost, názornost atd. Zde bychom na příklad zvolili za definici první výrok, možná také druhý, ale jistě nikoliv třetí.

Než půjdeme dále, je nutná jedna poznámka, týkající se slovního tvaru definice.

Definice se vyslovuje obvykle asi tímto způsobem: „Nazveme funkci spojitou, když ... (má ty a ty vlastnosti)". Kdybychom chtěli vyslovit tuto definici zcela korektním způsobem, museli bychom říci „funkce je spojitá, když a jen když ..." Je však zvykem říkat v definici místo „když a jen když" pouze „když"; zmíněné definici máme tedy — což je ostatně samozřejmé — rozumět tak, že funkce je spojitá, když má určité vlastnosti, ale také naopak, když tyto vlastnosti nemá, pak spojitá není. Kromě toho, v obvyklém tvaru definice se vyskytuje slovo „nazýváme" a pod. Tento výraz není ovšem logickou součástí definice, nýbrž má naznačovat, že nejde o dokázanou větu, nýbrž o zavedení a definici nového termínu.

Uvedeme nyní dva příklady definice: 1. Přímky, které nemají žádný společný bod, nazýváme rovnoběžnými; 2. existuje součet řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$; tento součet označíme e. Tyto příklady representují dva typy definic. V prvním příkladě zavádíme výraz „rovnoběžné" jako zkratku za výraz „... nemají žádný společný bod". V druhém případě předchází definici logická konstrukce, která zde spočívá v důkaze, že existuje právě jedno číslo, které je součtem řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$; vlastní definice pak spočívá v pojmenování tohoto čísla. Pro první typ definice je tedy charakteristické to, že definovaný výraz má ráz zkratky za určitý jiný výraz. Definici tohoto druhu můžeme nazvat **nominální.** Pro druhý typ definice je pak charakteristické to, že je těsně spojena s logickou konstrukcí; můžeme ji nazvat **konstruktivní.**

7·2. Úloha definicí v matematice. Když se ptáme, jaká je úloha definicí v matematice, pak si musíme všimnout dvou důležitých okolností: Za prvé, v zásadě by se dal každý matematický obor vybudovati bez definicí, tedy tak, že bychom užívali pouze základních termínů, které se vyskytují v axiomech. Můžeme totiž postupně eliminovat všechny definované termíny, až bychom nakonec převedli všechny matematické věty na věty, které obsahují pouze základní nedefinované pojmy (na příklad v geometrii výrazy „bod", „přímka", „leží na..." a pod.). Mohli bychom tímto způsobem třeba převést integrální a diferenciální počet na výroky o celých číslech a jejich vlastnostech. Dostali bychom ovšem takto nepředstavitelně složité výroky, s kterými bychom vůbec nedovedli operovat. — Za druhé; nové matematické objekty zavádíme logickou konstrukcí, t. j. buď přímým udáním, nebo důkazem existence; definice pak znamená vlastně jen pojmenování takového objektu.

Nyní již můžeme říci, jaký význam má v matematice definování nových termínů. Za prvé, definice nového termínu je nerozlučně spojena s logickou konstrukcí a doplňuje ji; když jsme totiž dokázali, že existuje jediný prvek s určitou vlastností (na příklad jediné číslo, které je součtem řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$), pak musíme mít pro tento prvek určité označení, chceme-li jej učinit samostatným předmětem zkoumání. To, že zavedeme a definujeme termín (název) pro nějaký matematický objekt, znamená zpravidla právě to, že se stává předmětem systematického studia. Z tohoto hlediska znamená definice v matematice často důležitý krok kupředu.

Za druhé, definice má často význam jako z k r a t k a za složitý výraz. To se týká především pomocných definic, které zavádíme během důkazu.

7·3. Nominální definice. Přejdeme nyní k jednotlivým typům definice podle jejího logického tvaru. Probereme nejdříve definice, které mají nominální ráz, tedy definice takové, že definovaný termín je zkratkou za jiný složitější výraz.

1. Nejdříve p ř í k l a d: „Označíme a spojnici bodů B a C". Zde definujeme označení „a" pomocí logické identity „$a = \ldots$", kde na pravé straně stojí složitější označení (v našem příkladě „spojnice bodů B a C"). Definice má zde zřejmě ráz pouhé zkratky. Definice tohoto druhu se vyskytují hlavně v průběhu důkazů, když potřebujeme mít jednoduché označení pro nějaký prvek.

Další p ř í k l a d y tohoto typu definice: „Označme c součin všech prvočísel, menších než 100"; „poloměr kruhu k označíme r".

2. Zcela obdobná definici právě uvedeného typu je definice označovacího vzorce pomocí identity, na příklad při zavedení zkratky za složitou funkci: „Položme $f(x) = \log \sin x$". Zde má definice tvar obecné identity „pro každé x je $f(x) = \ldots$", kde na pravé straně stojí označovací vzorec, za který je $f(x)$ zkratkou.

3. P ř í k l a d y: „Nazveme přirozené číslo n p r v o č í s l e m, když neexistují žádná přirozená čísla a a b, různá od 1 a n tak, aby $ab = n$"; „říkáme, že přirozené

číslo m je dělitelem přirozeného čísla n, když číslo $\frac{n}{m}$ je celé". Definice má zde tvar obecné ekvivalence „pro každé x platí: x má vlastnost P, když a jen když..." nebo „pro libovolná x a y platí: x a y jsou ve vztahu R, když a jen když..."; na pravé straně ekvivalence stojí složitější výrokový vzorec, za který právě zavádíme zkratku.

Pro všechny tři uvedené typy definice je charakteristické to, že mají tvar identity nebo ekvivalence, takže za definovaný výraz, čili **definiendum**, můžeme všude dosazovat rovnocenný s ním výraz, pomocí kterého je definován, t. j. t. zv. **definiens**. Tak místo výrazu „přímky p a q jsou rovnoběžné" (definiendum), můžeme všude dosadit výraz „přímky p a q nemají žádný společný bod" (definiens).

7'4. Konstruktivní definice. Příklad definice označení: „Existuje jedno jediné číslo, které je řešením rovnice $f(x) = 0$; toto číslo označíme a". Zde musí předcházet vlastní definici konstrukce, t. j. důkaz existence jediného čísla s uvažovanou vlastností, po případě přímo jeho sestrojení; definice pak spočívá v „pojmenování" tohoto čísla. Měli bychom tedy logicky korektně vyslovit celou definici asi tímto — dosti komplikovaným — způsobem: „(1) pro libovolná x a y platí: když x má vlastnost P a také y má vlastnost P, pak $x = y$; existuje x, které má vlastnost P; (2) $x = a$, když a jen když x má vlastnost P". Zde je (1) konstrukce, (2) vlastní definice.

Definice tohoto typu se dá vyslovit také ve stejném tvaru jako nominální definice, totiž „označíme a to jediné x, které má vlastnost P". Zde je „a" definiendum, „to jediné x, které má vlastnost P" je definiens. Této definici musí ovšem stejně předcházet důkaz, že takové x existuje a je jediné, takže rozdíl je jen zdánlivý.

Další *příklady*: „Označíme e číslo x takové, že $\int_1^x \frac{dt}{t} = 1$"; „označíme e limitu výrazu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro n rostoucí nade všechny meze".

Konstruktivní definice označovacího vzorce. *Příklad*: „Pro každé kladné x existuje jedno jediné reálné číslo y tak, že $e^y = x$; toto číslo nazveme přirozeným logaritmem x". Definice tohoto typu je zcela obdobná konstruktivní definici označení. Formulujeme-li takovou definici přesněji, zní takto: „(1) ke každému x existuje právě jedno y tak, že x a y jsou ve vztahu R; (2) $y = f(x)$, když a jen když x a y jsou ve vztahu R". Zde je (1) konstrukce, (2) je vlastní definice.

Velmi důležitým zvláštním případem takové konstruktivní definice je definice **rekurentní.** Jednoduchým příkladem takové definice je definice násobení při axiomatickém vybudování aritmetiky přirozených čísel, která zní takto: „položíme (1) $a \,.\, 1 = a$, (2) pro každé n je $a \,.\, (n + 1) = a \,.\, n + a$". Tato na pohled jednoduchá definice je logicky poměrně velmi komplikovaná. Skládá se zase z konstrukce a vlastní definice (pojmenování). Při konstrukci jde zde vlastně o existenční důkaz úplnou indukcí, totiž o důkaz toho, že při každém daném a lze přiřadit — a to jediným způsobem — každému n číslo $a \,.\, n$ tak, že jsou splněny podmínky (1) $a \,.\, 1 = a$, (2) $a \,.\, (n + 1) = a \,.\, n + a$. O tomto druhu existenčního důkazu jsme již mluvili v kap. 6.

Další *příklady*: Rekurentní definice mocniny „položme $a^1 = a$ a pro $n = 1, 2, \ldots, a^{n+1} = a^n \,.\, a$"; rekurentní definice derivace n-tého řádu (pro polynomy) „pro libovolný polynom $P(x) = a_0 \,.\, x^n + \ldots + a_n$ budiž
(1) $P'(x) = n \,.\, a_0 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$, (2) $P^{(n+1)}(x) = [P^{(n)}(x)]'$".