Jaká je logická výstavba matematiky?

4. Logická dedukce

In: Miroslav Katětov (author): Jaká je logická výstavba matematiky?. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 29–44.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403136

4. LOGICKÁ DEDUKCE

4·1. Odvození a důkaz. Důkazem rozumíme logické odvození výroku z jiných správných výroků. Termín **odvození** má tedy širší význam než důkaz, neboť můžeme logicky odvozovat důsledky také z nesprávných výroků (takové odvození, t. zv. „reductio ad absurdum" tvoří součást nepřímého důkazu) nebo z výroků, o nichž nevíme, zda jsou správné (na př. když odvozujeme důsledky z nějaké hypothesy). Důkazem však nazýváme pouze odvození ze správných výroků.

Výroky, z nichž při odvození (důkazu) vycházíme, nazýváme **premisami**; výrok, k němuž nakonec dospějeme, nazýváme **závěrem** odvození (důkazu).

Premisami důkazu mohou být výroky různého druhu: výroky bezprostředně založené na zkušenosti, na příklad „tato tužka je červená" (v matematice se však takovéto výroky nevyskytují); axiomy a definice; věty v užším smyslu, totiž výroky, logicky odvozené z jiných správných výroků; konečně tautologicky správné výroky, na příklad „buď některé x má vlastnost P, nebo žádné x ji nemá". Takové tautologicky správné výroky však zpravidla mezi premisy nepočítáme.

Každé odvození (důkaz), ať je jakkoliv složité, se dá vždy rozložit v řetěz jednoduchých kroků — říkejme jim termínem obvyklým v tradiční logice **úsudky** — jimiž bezprostředně odvozujeme jeden výrok z jednoho nebo několika jiných. Tyto úsudky se dají redukovat na několik málo základních typů. Uvedeme nyní hlavní typy úsudků.

4·2. Implikační úsudek. Začneme příklady.

P ř í k l a d 1. Dejme tomu, že chci dokázat, že určitý roztok je zásaditý. Vím, že každý roztok, který barví reakční papírek modře, je zásaditý. Z toho vyplývá, že

(1) „barví-li náš roztok reakční papír modře, pak je tento roztok zásaditý". Provedu nyní pokus a zjistím, že skutečně (2) „náš roztok barví reakční papírek modře". Z těchto dvou výroků vyplývá bezprostředně důsledek (3) „náš roztok je zásaditý".

P ř í k l a d 2. V tomto příkladě smíme dosazovat za neurčité pouze c e l á č í s l a. Premisy jsou tyto: (1) „pro každé n je buď n nebo $n^4 - 1$ dělitelné 5"; (2) „když buď n nebo $n^4 - 1$ je dělitelné 5, pak $n^5 - n$ je dělitelné 5". Z toho vyplývá závěr (3) „pro každé n je číslo $n^5 - n$ dělitelné 5".

Schematisujeme si nyní první příklad. Premisy jsou tyto: (1) když **A**, t. j. když náš roztok barví..., pak **B**, t. j. náš roztok je zásaditý; (2) **A**, t. j. náš roztok barví...; závěr: (3) **B**, t. j. roztok je zásaditý. Máme zde tedy následující schema (v němž **A** a **B** jsou zkratky za určité výroky):

když **A**, pak **B** . . . . } premisy
A . . . . }
tedy **B** . . . . závěr

Podobné schema má druhý příklad, jen s tím rozdílem, že v prvním příkladě jsme měli individuální výroky, kdežto zde máme výroky obecné:

pro každé n platí: když $P(n)$, pak $Q(n)$ } premisy
pro každé n platí $P(n)$ . . . . . }
tedy pro každé n platí $Q(n)$ . . . . . závěr

Konečně může úsudek téhož typu mít za závěr také existenční výrok.

P ř í k l a d: (1) Když x má vlastnost V, pak má také vlastnost W; (2) některé x má vlastnost V; tedy (3) některé x má vlastnost W.

Zde má úsudek následující schema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro každé } x \text{ platí: když } P(x)\text{, pak } Q(x)\\ \text{pro některé } x \text{ platí } P(x) \;.\;.\;.\;.\;.\end{array}\right\}\text{premisy}$$

$$\text{tedy pro některé } x \text{ platí } Q(x) \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{závěr}$$

Uvedená tři schemata representují tři druhy úsudku, kterému budeme říkat **úsudek implikační.** V prvním jsou závěr a premisy individuální výroky, v druhém jsou to obecné výroky, v třetím je závěr existenční výrok, jedna premisa je existenčním, druhá obecným výrokem. Z těchto tří typů je základním typ první.

Druhý typ shrnuje v jistém smyslu neomezeně mnoho úsudků prvního typu, obdobně jako obecný výrok shrnuje všechny individuální výroky, které lze vytvořit z daného výrokového vzorce. Třetí typ nemá základního významu, neboť se dá nahradit — použijeme-li ještě zásady nepřímého důkazu (a ovšem také tautologicky správných vět) — implikačními úsudky druhého typu.

Provedeme tímto způsobem jako p ř í k l a d odvození výroku „existuje x, které má vlastnost Q" z premis „každé x, které má vlastnost P, má vlastnost Q" a „existuje x, které má vlastnost P". Podle zásady nepřímého důkazu stačí k tomu odvodit z jedné premisy a negace závěru druhou premisu. To právě provedeme: odvodíme z výroků (1) „neexistuje žádné x, které by mělo vlastnost Q", (2) „každé x, které má vlastnost P, má také vlastnost Q" výrok (3) „neexistuje žádné x, které by mělo vlastnost P". Výrok (1) je tautologicky ekvivalentní s výrokem (4) „pro každé x platí: x nemá vlastnost Q"; výrok (2) je tautologicky ekvivalentní s výrokem (5) „pro každé x platí: když x nemá vlastnost Q, pak také nemá vlastnost P". Z výroků (4) a (5) plyne implikačním úsudkem 2. typu výrok (6) „pro každé x platí: x nemá vlastnost P". Tento výrok je však tautologicky ekvivalentní s výrokem (3). Tím jsme provedli žádaný důkaz. Kromě zásady nepřímého důkazu použili jsme při tom pouze implikačního úsudku 2. typu a tautologických úprav — to znamená zase implikačního úsudku 2. nebo 1. typu a tautologicky správných ekvivalencí.

4'3. Sylogismus. Sylogismy, o nichž se mluví v tradiční logice, lze pokládat za zvláštní typ úsudku, příbuzný úsudku implikačnímu. Uvedeme zase nejdříve příklady takového úsudku.

P ř í k l a d 1. Premisy: (1) každá látka, jejíž roztok barví reakční papír modře, je zásaditá; (2) každá látka, která je zásaditá, slučuje se s některou kyselinou; závěr: každá látka, jejíž roztok barví reakční papír modře, slučuje se s některou kyselinou.

P ř í k l a d 2. Premisy: (1) rostliny, k nimž nemá světlo přístup, nevytvářejí chlorofyl; (2) rostliny, které nevytvářejí chlorofyl, nejsou zelené; závěr: rostliny, k nimž nemá světlo přístup, nejsou zelené. — Tytéž premisy a závěr lze vyslovit v jiném slovním tvaru takto: (1) nemá-li k rostlině světlo přístup, pak rostlina nevytváří chlorofyl; (2) nevytváří-li rostlina chlorofyl, pak není zelená; závěr: nemá-li k rostlině přístup světlo, pak není zelená.

Úsudek, který máme v těchto příkladech, můžeme schematisovat takto: premisy: (1) každé x, které má vlastnost P, má také vlastnost Q; (2) každé x, které má vlastnost Q, má také vlastnost R; závěr: každé x, které má vlastnost P, má také vlastnost R. Schematisujeme-li jej ještě více, dostáváme následující s c h e m a s y l o g i s m u:

$$\left.\begin{array}{l}\text{když } P(x)\text{, pak vždy také } Q(x)\\ \text{když } Q(x)\text{, pak vždy také } R(x)\end{array}\right\}\text{premisy}$$

$$\text{tedy když } P(x)\text{, pak vždy také } R(x) \qquad \text{závěr}$$

To je schema základního typu sylogismu. Premisy i závěr jsou zde obecné výroky; obdobný úsudek je možný ovšem také pro individuální výroky.

Kromě toho existuje celá řada jiných úsudkových schemat, která se dají redukovat na sylogismus právě popsaného základního typu, používáme-li ještě zásady nepřímého důkazu (viz odst. 4·6) a tautologicky správných vět. Takové úsudky rovněž nazýváme sylogismy. Uvedeme jeden příklad: (1) někteří živočichové, žijící ve vodě, jsou ssavci; (2) všichni ssavci dýchají plicemi; tedy (3) někteří živočichové, žijící ve vodě, dýchají plicemi. Řadu dalších příkladů může čtenář najít v každé učebnici tradiční logiky.

Uvedeme ještě příklad zmíněné redukce sylogistického úsudku na sylogismus základního typu. Mějme sylogismus (v schematickém tvaru): (1) „některé x je P a také Q"; (2) „každé x, které je Q, je také R"; tedy (3) „některé x je P a také R". Máme nyní odvodit tento závěr z premis (1) a (2) takovým způsobem, že použijeme pouze sylogismu základního typu, zásady nepřímého důkazu a tautologicky platných vět.

Podle zásady nepřímého důkazu stačí k tomu odvodit z jedné premisy a negace závěru negaci druhé premisy, tedy z premis (4) „není pravda, že existuje x, které je P a současně také R"; (2) „každé x, které je Q, je také R" odvodit negaci výroku (1). Z výroku (4) dostaneme tautologickou úpravou (to znamená: implikačním úsudkem za pomoci tautologicky platných ekvivalencí) výrok (5) „pro každé x platí: když x je R, pak není P". Z výroků (5) a (2) vyplývá sylogistickým úsudkem základního typu výrok (6) „pro každé x platí: když x je Q, pak není P"; tautologickou úpravou vyplyne z toho výrok (7) „není pravda, že existuje x, které je P a také Q". To však je právě negace premisy (1).

Obdobným způsobem jako v tomto příkladě lze převést každý sylogismus na základní typ. Neznamená to samozřejmě, že bychom to snad měli skutečně provádět na příklad v našich matematických a jiných důkazech; znamená to pouze, že rozmanité tvary bezprostředního odvození dají se vyvodit z několika málo základních typů úsudku.

Charakterisovali jsme sylogistické úsudky tím, že se dají pomocí tautologických úprav, případně za použití zásady nepřímého důkazu, redukovat na sylogismus základního typu, jehož schema jsme uvedli. Lze je charakterisovat ještě takto: v sylogismu jsou premisy a závěr vybudovány ze tří členů — výrokových vzorců *I, II, III*. Premisy spojují *I* a *II*, *II* a *III*; závěr pak spojuje *I* a *III*. Je to zřejmé z následujícího schematu: „když (*I*)x je P, pak (*II*)x je Q"; „když (*II*)x je Q, pak (*III*)x je R"; tedy „když (*I*)x je P, pak (*III*)x je R". Výrokovému vzorci, který je obsažen jako část v obou premisách (zde je to výrokový vzorec „x je Q"), se někdy říká **střední člen.**

Sylogistický a implikační úsudek jsou si velmi podobné a jeden se dá snadno převést na druhý; tím se však zde nebudeme zabývat. Sylogismus bývá často považován za základní typ úsudku vůbec. Otázka, jaké úsudky budeme považovat za základní, je ovšem především věcí konvence, je však vhodnější považovat implikační úsudek za fundamentální. Je totiž jednak formálně jednodušší než sylogismus, jednak lépe odpovídá způsobu usuzování, který se nejčastěji vyskytuje ve vědeckých úvahách i v praktickém životě: zjistíme, že za určité podmínky nastává určitá okolnost; pak zjistíme, že tato podmínka vskutku nastává, a z toho usoudíme, že nastává uvažovaná okolnost — toto je právě implikační úsudek.

4·4. **Substituční úsudek.** Začneme zase příklady.

Příklad 1. Premisa: „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$"; závěr: „$(10+1)(10-1) = 10^2 - 1^2$". Tento úsudek je tak samozřejmý, že si jej zpravidla ani neuvědomujeme.

Příklad 2. Premisa: „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$"; závěr: „pro každé α je $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$".

Úsudkům tohoto druhu, kde dosazujeme (substituujeme) za neurčitou (nebo několik neurčitých) buď označení nebo označovací vzorec, říkáme **substituční úsudky.** Liší se navzájem podle toho, zda dosazujeme za neurčitou označení nebo označovací vzorec. V prvním případě je závěr individuální výrok, v druhém případě výrok obecný; premisou je však při substitučním úsudku vždy obecný výrok. Uvádíme nyní schema tohoto úsudku (pro případ, že dosazujeme individuální označení).

Schema substitučního úsudku:

každé x má vlastnost V	premisa
tedy a má vlastnost V	závěr

Substituční úsudek se liší, jak vidíme, od implikačního úsudku a sylogismu mimo jiné tím, že má jen jednu premisu, nikoliv dvě. Zde je nutná jedna poznámka: mohlo by se snad namítat, že druhou — nevyslovenou — premisou je konstatování, že za x smíme dosadit a. To však není správné: kdykoli „každé x má vlastnost V" a „a má vlastnost V" jsou skutečně správně utvořené výroky, vyplývá vždy z prvního druhý. Kdybychom chtěli pokládat za druhou premisu konstatování, že za x smíme dosadit a, pak bychom museli důsledně na př. při implikačním úsudku považovat za třetí premisu konstatování, že jedna z premis má tvar implikace.

Uvedeme nyní příklad úsudku, který je obrácením úsudku substitučního. Premisa: „číslo π není řešením žádné algebraické rovnice"; závěr: „existuje číslo, které není řešením žádné algebraické rovnice". Tento úsudek má následující schema:

a má vlastnost V	premisa
tedy existuje x, které má vlastnost V	závěr

Tento úsudek je zase tak samozřejmý, že si jej ani neuvědomujeme. Spočívá však na něm existenční důkaz pomocí konstrukce, t. j. důkaz existence prvku s určitou vlastností přímým udáním určitého takového prvku.

Úsudek tohoto typu se dá převést za použití zásady nepřímého důkazu pomocí tautologické úpravy na substituční úsudek. Provedeme to jako příklad. Z premisy „a má vlastnost V" máme odvodit závěr „existuje x, které má vlastnost V". Stačí k tomu odvodit z negace závěru negaci premisy. Z negace závěru vyplývá tautologickou úpravou výrok „žádné x nemá vlastnost V". Z toho plyne substitučním úsudkem: „a nemá vlastnost V"; to je právě negace premisy.

4·5. **Identifikační úsudek.** Substitučnímu úsudku se podobá úsudek, jehož příklady nyní uvedeme.

Příklad 1. Premisy: „bezprostřední představený pana A. B. bydlí v Dejvicích"; „bezprostřední představený pan A. B. je pan C. D."; závěr: „pan C. D. bydlí v Dejvicích".

Příklad 2. Premisy: „pro každé x je $(x-1)^2 \geqq 0$"; „pro každé x je $(x-1)^2 = x^2-2x+1$"; závěr: „pro každé x je $x^2-2x+1 \geqq 0$.

Úsudek tohoto typu budeme nazývat úsudkem podle zásady identity nebo krátce **identifikačním úsudkem.** Je charakterisován tím, že jednou z premis je logická identita (individuální nebo obecná), t. j. výrok tvaru „a je totožné s b" nebo „pro každé x je $f(x)$ totožné s $g(x)$".

S c h e m a i d e n t i f i k a č n í h o ú s u d k u:

a) pro případ individální identity

a má vlastnost V	premisy
a je totožné s b	
tedy b má vlastnost V	závěr

b) pro případ obecné identity

pro libovolné x má $f(x)$ vlastnost V	premisy
pro libovolné x je $f(x)$ totožné s $g(x)$	
tedy pro libovolné x má $g(x)$ vlastnost V	závěr

Identifikační úsudek je velmi podobný úsudku substitučnímu, neboť v obou případech jde o dosazení. Rozdíl mezi těmito dvěma typy úsudku je mimo jiné v tom, že úsudek podle zásady identity lze obrátit, t. j., že ze závěru a jedné premisy (totiž identity) vyplývá druhá premisa, kdežto při substitučním úsudku premisa zpravidla není důsledkem závěru.

4·6. Nepřímý úsudek. Přímý důkaz je ten, v němž vycházíme z premis a od nich postupujeme k závěru. Při nepřímém důkaze vycházíme naopak z výroku, který chceme dokázat, odvodíme z jeho negace výrok, který odporuje premisám nebo je vůbec nesprávný (čili, jak se říká, o d v o d í m e s p o r), a na základě toho pokládáme náš výrok za odvozený z daných premis. **Nepřímým úsudkem** (nebo z á s a d o u n e p ř í m é h o d ů k a z u) nazýváme právě tuto „inversi" (obrácení): z non **B** vyplývá non **A** — tedy z **A** vyplývá **B**.

V příkladech, které jsme uváděli, vyskytl se již několikrát nepřímý úsudek. Uvedeme ještě jeden příklad. — Chceme dokázat výrok **A** „počet prvočísel je nekonečný". Odvodíme tedy důsledky z jeho negace „počet prvočísel je konečný". Označme a součin všech prvočísel (podle našeho předpokladu to má smysl).

Pak číslo a je dělitelné každým prvočíslem. Z toho a z věty (1) „pro libovolná celá čísla x a y platí: když x je dělitelné y a y se nerovná 1 nebo —1, pak $x+1$ není dělitelné y" vyplývá výrok „číslo $a+1$ není dělitelné žádným prvočíslem", z něhož ihned plyne negace správného výroku (2) „každé celé číslo, které se nerovná 1 nebo —1, je dělitelné některým prvočíslem". Odvodili jsme tedy z věty (1) a negace výroku **A** negaci věty (2). Z toho usoudíme (toto je právě nepřímý úsudek), že výrok **A** je správný.

Jak jsme již řekli, zní nepřímý úsudek ve svém nejjednodušším tvaru takto: z non **B** lze odvodit non **A**; tedy naopak **B** je důsledkem **A**. Jiná, užší formulace je tato: z non **B** vyplývá nesprávný výrok; tedy výrok **B** je správný. V obecnějším případě, kdy máme několik premis (tak v právě uvedeném příkladě) má nepřímý úsudek tento tvar: z non **B**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n$ lze odvodit non **A**; tedy naopak **B** je důsledkem **A**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n$.

Je zřejmé, že nepřímý úsudek má komplikovanější ráz než úsudky přímé; jsou proti němu také jiné námitky, jimiž se budeme ihned zabývat, takže vzniká otázka, můžeme-li se tomuto úsudku vyhnout. Lze ukázat, že to je možné. Každé odvození je totiž řetězem úsudků; nepřímý úsudek je pak inversí (obrácením) přímého odvození. Můžeme tedy zřejmě vždy nahradit nepřímý úsudek řetězem inversí přímých úsudků. To znamená, že stačí přibrat k základním typům přímých úsudků, které jsme uvedli (implikační úsudek, sylogismus, substituční a identifikační úsudek), jejich inverse — na příklad přímý existenční úsudek („a je P", tedy „existuje x, které je P"), který je inversí substitučního úsudku — abychom nemuseli používati nepřímého úsudku.

Obraťme se nyní k jednotlivým námitkám proti nepřímému důkazu.

Jedna námitka proti němu je tato: nepřímý důkaz (odvození) se nezdá tak přesvědčivým, jako odvození přímé, na příklad odvození skládající se z implikačních úsudků. Nepřímé odvození vzbuzuje totiž dojem, že, drasticky řečeno, jsme byli nuceni po ztroskotání jedné možnosti uchýlit se k druhé („buď **A** nebo non **A**; non **A** je nesprávné; tedy **A**"). Tato námitka má zřejmě psychologický, skoro „citový" ráz a postrádá logického významu.

Druhá námitka popírá platnost nepřímého úsudku *v některých případech*, na příklad popírá, že z nesprávnosti výroku „každé x je V" můžeme usoudit na výrok „některé x není V". Nesměřuje tedy vlastně proti nepřímému úsudku, nýbrž jen proti některým tautologicky platným ekvivalencím, — přesněji řečeno, proti ekvivalenci existenčního výroku a negace výroku obecného. Touto námitkou jsme se tedy již zabývali (viz str. 25).

Konečně, třetí námitka má *metodologický ráz*. Praví totiž, že při přímém odvození výroku z určitých premis víme, při kterém kroku musíme přibrat kterou premisu, a tak poznáváme jejich roli v důkazu a jejich vztah k závěru. Tím získáváme hlubší poznatky než při nepřímém důkazu, kdy odvozujeme negaci některé premisy z ostatních premis a negace závěru, a vůbec nepoznáváme přímo, jaký je význam jednotlivých premis pro závěr.

Tato námitka je nejzávažnější a je v podstatě správná. Naprosto se však netýká *logické platnosti* nepřímého odvození; říká pouze, že v některých případech nám poskytuje přímý důkaz více znalostí a spíše ulehčuje objevování a chápání nových důkazů a vět než důkaz nepřímý. Proto je dosti často s metodického hlediska výhodné nahradit nepřímý důkaz přímým. Nemělo by však žádný účel, abychom se vždy snažili vyhnout se nepřímému úsudku (ač v zásadě je to vždy možné); bylo by to prakticky nesnadné a mimo to nepřímé důkazy jsou většinou zcela přirozené a „názorné".

4·7. Formální a obsahová správnost výroků. V euklidovské geometrii roviny, t. j. obyčejné planimetrii, které se vyučuje ve škole, platí, jak známo, věta „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°". Existují však také, jak čtenář asi ví, různé neeuklidovské geometrie, tak na příklad tak zvaná hyperbolická geometrie roviny. Tato geometrie je založena na stejných axiomech jako euklidovská geometrie s tím jediným rozdílem, že tak zvaný euklidovský postulát (axiom) o rovnoběžkách „k dané přímce lze daným bodem vésti jedinou rovnoběžku" je nahrazen jiným axiomem, totiž „k dané přímce lze daným neležícím na ní bodem vésti aspoň dvě různé rovnoběžky". V této hyperbolické geometrii je výrok „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°" nesprávný (ba dokonce platí v této geometrii věta „součet úhlů každého trojúhleníka je menší 180°"). Zdá se tedy, že tentýž výrok může být správný (pravdivý) nebo nesprávný (nepravdivý) podle toho, jaké jsme zavedli axiomy a definice.

Ve skutečnosti se má věc takto: je jasné, že správnost nebo nesprávnost výroku závisí na definici termínů, které se v něm vyskytují, neboť jsou-li tyto definice různé, pak musíme považovat také výroky za různé a jen zdánlivě shodné. To však platí nejen o definicích, nýbrž také o axiomech, neboť je můžeme považovat za jakési nepřímé (implicitní) definice termínů, které se v nich vyskytují. V našem příkladě jde tedy v podstatě o dva různé výroky, čili jak se říká, jde o výroky ve dvou různých „řečech". — Abychom si lépe ujasnili tyto otázky, musíme nyní rozlišit mezi t. zv. „formální správností" výroků a jejich pravdivostí čili „obsahovou správností".

Správné výroky, které se vyskytují v nějakém matematickém oboru (na příklad v planimetrii) lze roztřídit na tyto skupiny: matematické věty v užším slova smyslu (na příklad „součet úhlů rovnoběžníka rovná se 360°"), definice (na příklad „dvě přímky jsou rovnoběžné, když se neprotínají") a axiomy (na příklad „dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod") ; k tomu přistupují ještě tautologicky platné věty, na příklad „libovolné dvě přímky buď se protínají nebo se neprotínají". Věty (teorémy) považujeme za správné proto, že jsou logicky dedukovány z výroků, které již byly uznány za správné. Naproti tomu správnost axiomů a definicí nespočívá na logické dedukci; tyto výroky jsou pro určitý matematický obor již dány jako správné. Totéž platí o základních tautologicky správných větách, jako na př. „$p \vee \sim p$", z nichž se pak logicky dedukují ostatní tautologicky správné věty. Takové výroky, jež jsou pro uvažovaný obor dány jako správné (tedy axiomy, definice a základní tautologicky správné věty) budeme souhrnně nazývat **základními větami.** — Poznamenáme ještě, že ve fysice počítáme mezi základní věty především t. zv. protokolární věty, t. j. výroky, které jsou bezprostředně založeny na zkušenosti, na příklad „tento list papíru je bílý", „ručička na ciferníku ukazuje teď nulu".

Za správné považujeme tedy jednak základní věty, jednak ty výroky, které se z nich dají logicky dedukovat. Smluvíme se nyní, že nadále budeme používat termínu „správný" jen v tomto smyslu. **Správným** („formálně správným") čili **platným** výrokem určitého matematického oboru nebo určité fysikální theorie a pod., budeme tedy nazývat výrok, který lze logicky dedukovat ze základních vět tohoto oboru; **nesprávným** nazýváme výrok, jehož negace je správná. Naproti tomu **pravdivým** („obsahově správným") budeme nazývat výrok, jehož obsah odpovídá skutečnosti; pravdivé jsou tedy na příklad protokolární věty. — Mluvit o správnosti výroku můžeme tedy vždy pouze vzhledem k určitému systému základních vět.

Je zřejmé, že správný („formálně správný") výrok může být nepravdivý a naopak; tak může být nepravdivým správný výrok nějaké fysikální theorie, t. j. výrok, který můžeme logicky odvodit z jejích základních předpokladů; v takovém případě ovšem zavrhneme celou theorii jako odporující zkušenosti. Podrobněji se tím zabývat nemusíme, neboť matematika si všímá pouze správnosti výroků, t. j. otázky, zda lze určitý výrok odvodit z daného systému axiomů. Vztah axiomů ke skutečnosti, jakož i ten fakt, že axiomy vznikají abstrakcí ze zkušenosti, mají ovšem nesmírný význam, avšak netýkají se vlastní logické výstavby matematiky.

4·8. **Logické zásady.** Učebnice tradiční logiky uvádějí čtyři logické zásady: zásadu dostatečného důvodu, zásadu totožnosti, zásadu sporu a zásadu o vyloučeném třetím. Pro logickou dedukci mají význam dvě z těchto zásad, totiž zásada sporu, která říká, že nemůže být pravdivý výrok i jeho negace a zásada o vyloučeném třetím, která říká, že musí být pravdivý buď výrok nebo jeho negace. Takto formulovány, mluví tyto zásady o pravdivosti čili obsahové správnosti. Nás však v této knížce zajímá hlavně formální správnost výroků; ptáme se proto, platí-li též pro ni obdobné zásady.

Aplikujeme-li zásadu sporu na formální správnost výroků, pak tato zásada praví: není možné, aby dva odporující si výroky byly správné, t. j. daly se odvodit z téhož systému základních vět. To však je v podstatě jistý požadavek, který klademe na základní věty. Zásadu sporu musíme tedy interpretovat jako požad a v e k b e z e s p o r n o s t i, kterému musí vyhovovat axiomy (viz odst. 8'6). Obdobně když aplikujeme na správnost výroků zásadu o vyloučeném třetím, pak tato zásada praví: buď výrok nebo jeho negace musí být správná; to znamená: ať je předložen jakýkoli výrok **A** (rozumí se, skládající se pouze z výrazů, které se vyskytují v axiomech a definicích uvažovaného oboru), lze vždy logicky dedukovat ze základních vět buď výrok **A** nebo jeho negaci. Zde máme zase jistý požadavek, totiž t. zv. p o ž a d a v e k ú p l n o s t i, který klademe na základní věty. Tento požadavek nemusí býti vždy splněn (tak nesplňuje jej systém axiomů, který dostaneme, když z axiomů euklidovské geometrie vypustíme postulát o rovnoběžkách; vrátíme se k tomu v 8. kapitole). Když pro určitý systém základních vět splněn není, pak ovšem některé výroky uvažovaného oboru nejsou ani s p r á v n é ani n e s p r á v n é — jsou (vzhledem k danému systému základních vět) **nerozhodnutelné.**

Ani zásadu sporu ani zásadu o vyloučeném třetím nelze tedy přímo aplikovat na formální správnost výroků. Všimněme si nyní toho, jakou úlohu mají tyto zásady při dokazování výroků. Používáme jich v těchto dvou případech: (1) Zjistíme, že výrok **A** je správný a na základě toho usoudíme, že výrok non **A** je nesprávný; (2) zjistíme, že výrok non **A** je nesprávný a na základě toho usoudíme, že výrok **A** je správný. Pro účely logické dedukce úplně stačí, když se řídíme těmito pravidly; nemusíme se pak starat o zásadu sporu nebo zásadu vyloučeného třetího. — Shrneme nyní tato pravidla a pravidlo nepřímého úsudku (odst. 4'6), jakož i uvedenou v odstavci 4'7 definici formální správnosti jako následující z á s a d y l o g i c k é d e d u k c e: (1) v ý r o k, k t e r ý l z e o d v o d i t z e s p r á v n ý c h v ý r o k ů, je s p r á v n ý; (2) v ý r o k, j e h o ž n e g a c e j e s p r á v n á, j e n e-správný; (3) výrok, jehož negace je nesprávná, je správný; (4) výrok, z něhož lze odvodit nesprávný výrok, je nesprávný. Tyto zásady (první a druhou z nich lze považovat za definice správnosti a nesprávnosti, třetí a čtvrtá vyjadřují postup při nepřímém úsudku) spolu s úsudkovými schematy, které jsme uvedli v odstavcích **4·2** až **4·5**, shrnují celý postup při logickém odvozování (důkaze) výroků.