Numerické řešení rovnic

Rovnice o jedné neznámé

In: Karel Čupr (author): Numerické řešení rovnic. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1945. pp. 5–61.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403109

ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ.

1.

NĚKTERÉ JEDNODUCHÉ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ.

Čtenář již zná řešení některých jednoduchých rovnic. Lineární rovnice

$$ax + b = 0$$

má jediné řešení (čili kořen)

$$x = -\frac{b}{a};$$

kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pak má kořeny dva určené vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

jež jsou $\left\{\begin{matrix}\text{reálné různé}\\ \text{reálné stejné}\\ \text{komplexní}\end{matrix}\right\}$ podle toho, je-li diskriminant $\Delta^2 = b^2 - 4ac \gtreqless 0$.

Jistě poznal i řešení rovnic binomických stupně 3., 4. i vyššího; na př. rovnice

$$x^3 - 1 = 0$$

psána ve tvaru

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

dává tři kořeny

$$x_1 = 1,\ x_2 = \tfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$$

(viz Schwarz, str. 58); rovněž rovnice poněkud obecnější, zvané reciproké, byly již předmětem jeho studia. Reciproká rovnice stupně třetího zní

$$a_0x^3 + a_1x^2 \pm a_1x \pm a_0 = 0$$

a řeší se tímto obratem:

$$(x \pm 1)\,[a_0x^2 + (a_1 \mp a_0)\,x + a_0] = 0.$$

Rovnice reciproká stupně čtvrtého jest tvaru

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 \pm a_1x + a_0 = 0$$

a řeší se po úpravě do tvaru

$$a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0$$

substitucí

$$x \pm \frac{1}{x} = y, \ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

(Schwarz, str. 62).

I jiné rovnice se dají vhodnými obraty snadno řešiti, na př. rovnici

$$(x^2 + ax + b)^2 + c\,(x^2 + ax) + d = 0$$

pišme ve tvaru

$$(x^2 + ax + b)^2 + c\,(x^2 + ax + b) + (d - bc) = 0$$

a tato rovnice substitucí $X = x^2 + ax + b$ přejde v kvadratickou rovnici

$$X^2 + cX + d - bc = 0.$$

Levé strany dosud uvažovaných rovnic jsou mnohočleny 1., 2., 3. a 4. stupně a nazýváme je algebraickými rovnicemi stupně 1., 2., 3. a 4. Obecně algebraickou rovnicí stupně n-tého nazýváme rovnici, jejíž levá strana jest mnohočlen stupně n-tého o koeficientech ať reálných či komplexních; v dalším budeme předpokládati — jako jsme dosud mlčky činili — koeficienty pouze reálné. Algebraická rovnice stupně n-tého tedy zní:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1,1)$$

Nauka o algebraických rovnicích jest již od dávna pěstována s různých hledisek. Nás bude tentokráte zajímati otázka, které jsou to hodnoty, jež dosazeny do levé strany dané rovnice identicky ji splňují; pravíme, že hledáme **řešení** čili **kořeny** dané rovnice. Tuto úlohu exaktně rozřešiti, t. j. určiti přesně velikost kořenů, nelze pro všechny algebraické rovnice; počátkem minulého století bylo dokázáno (viz Schwarz, str. 67), že exaktně a pomocí konečného počtu odmocnin lze z rovnic algebraických řešiti pouze rovnice prvních čtyř stupňů. Rovnice vyššího stupně než čtvrtého pomocí konečného počtu odmocnin lze řešiti jen v některých případech; na př. binomickou rovnici stupně šestého

$$x^6 - 1 = 0$$

lze řešiti, píšeme-li ji ve tvaru

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0.$$

Úloha 1. Ukažte, že reciprokou rovnici stupně šestého

$$ax^6 + bx^5 + (3a + b)x^4 + (a + 2b)x^3 + (3a + b)x^2 + bx + a = 0$$

lze převésti substitucemi

$$x + \frac{1}{x} = y, \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

na reciprokou rovnici stupně třetího!

Avšak algebraické rovnice nejsou jedinými, jež se předkládají k řešení. Uvedeme některé rovnice nealgebraické, jež vhodnými obraty lze převésti na rovnice algebraické.

a) Rovnice iracionální. Vyskytuje-li se neznámá pod odmocninami, nazýváme takovou rovnici iracionální, na př.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = 2, \qquad \sqrt[3]{x^2 - 1} = 7;$$

na střední škole bývají některé obraty odstraňování odmocnin v takových rovnicích zvláště probírány. Uveďme jeden z méně známějších. Jest řešiti rovnici:

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)}.$$

Umocněme rovnici třemi a upravme na levé straně:

$$x^2 - 4x + 4 - 3\sqrt[3]{(x-2)^2(x-3)^2}\left[\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}\right] -$$
$$- (x^2 - 6x + 9) = x^2 - 5x + 6.$$

Do lomené závorky dosaďme z první rovnice, levá strana po úpravě zní:

$$(2x - 5) - 3(x-2)(x-3) = -3x^2 + 17x - 23,$$

takže dojdeme rovnice

$$4x^2 - 22x + 29 = 0$$

o kořenech

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Úloha 2. Řešte týmž způsobem

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = 1. \qquad \left[x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right]^{*)}$$

Lze tuto rovnici ještě jinak převésti na rovnici kvadratickou?

$$\left[\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = t\right]$$

b) Rovnice exponenciální obsahují neznámou v mocniteli; některé z těchto rovnic dovedeme řešiti měníce je logaritmováním na algebraické; na př.

$$2 \cdot 3^x = 5 \cdot 4^x;$$

přejde v rovnici

$$\log 2 + x \log 3 = \log 5 + x \log 4,$$

čili

$$x(\log 3 - \log 4) = \log 5 - \log 2,$$

a odtud

$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 3 - \log 4} = \frac{\log 2{,}5}{\log 0{,}75} \doteq -3{,}18.$$

---

*) V závorce lomené za textem úlohy je uveden výsledek příp. také návod.

Jindy jest možno pravou i levou stranu vyjádřiti jako mocniny o témž mocněnci; na př.

$$\log 2^{\sqrt{2^x+1}} + \log 2^{3\sqrt{2^x+1}} = 4\,(1 - \log 2{,}5).$$

Levá strana jest vlastně $\log 2^{4\sqrt{2^x+1}}$ a pravá pak $4 \log \frac{10}{2{,}5} = \log 4^4 = \log 2^8$, takže máme

$$2^{4\sqrt{2^x+1}} = 2^8,$$

a odtud

$$4\sqrt{2^x + 1} = 8, \text{ t. j. } 2^x = 3,$$

a konečně

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58.$$

c) Jiný druh rovnic jsou rovnice logaritmické, na př.

$$1 - \log x + (\log x)^2 - (\log x)^3 + \ldots = \frac{1}{a}.$$

Je-li řada vlevo konvergentní, jest její součet

$$\frac{1}{1 + \log x} = \frac{1}{a},$$

odkudž

$$\log x = a - 1, \qquad x = 10^{a-1};$$

avšak aby řada konvergovala, musí býti $-1 < \log x < 1$ čili $-1 < a - 1 < +1$ a posléze $0 < a < 2$, jinak úloha nemá řešení.

d) Velmi důležité rovnice jsou ony, které obsahují goniometrické funkce neznámé x. I ty jsou předmětem podrobných úvah střední školy; uvedeme pouze tři rovnice.

α) Rovnici

$$a \sin x + b \cos x = c$$

umocněme dvěma a vpravo užijme známé identity:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; dostaneme

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

a dále

$$(a^2 - c^2) \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + (b^2 - c^2) \cos^2 x = 0;$$

nyní dělme rovnici $\cos^2 x$ a obdržíme kvadratickou rovnici pro $\operatorname{tg} x$

$$(a^2 - c^2) \operatorname{tg}^2 x + 2ab \operatorname{tg} x + b^2 - c^2 = 0.$$

Kdy má tato rovnice různé kořeny reálné, kdy stejné, kdy komplexní? ($a^2 + b^2 \gtreqless c^2$)

β) Mějme za úkol řešiti rovnici:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = a.$$

Tato rovnice je totožná s rovnicí

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = a$$

a ta po odstranění zlomků zní

$$\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 1 = a \sin^2 x \cos^2 x.$$

Poněvadž

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

lze poslední rovnici psáti

$$2 = (a + 1) \sin^2 x \cos^2 x \quad \text{čili} \quad 4 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{8}{a + 1},$$

a posléze

$$\sin 2x = \pm \sqrt{\frac{8}{a + 1}}.$$

(Proč musí býti $a \geq 7$, aby úloha měla reálné řešení?)

γ) Zdánlivě jednodušší rovnice

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a$$

jest obtížnější. Převedeme-li všechny funkce na $\sin x$ a $\cos x$, obdržíme

$$\sin x + \cos x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = a,$$

čili po odstranění zlomků

$$(\sin x + \cos x) \sin x \cos x + (\sin x + \cos x + 1) = \\ = a \sin x \cos x.$$

Použijeme-li vztahu $\sin x \cos x = \frac{1}{2} [(\cos x + \sin x)^2 - 1]$ a položíme-li $\sin x + \cos x = u$, dostaneme

$$\frac{u(u^2 - 1)}{2} + u + 1 = \frac{a(u^2 - 1)}{2};$$

odtud vyplývá

$$u + 1 = 0, \qquad u(u - 1) + 2 = a(u - 1)$$

a další úpravou

$$u_1 = -1, \qquad u^2 - (a + 1)\, u + a + 2 = 0;$$

rovnice pro u má tedy kořeny

$$u_1 = -1, \qquad u_{2,3} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 7}}{2}.$$

Nyní je nutno především řešiti rovnici $\sin x + \cos x = -1$; ta umocněna dvěma dává $\sin x \cos x = 0$, takže buď $\sin x = 0$, nebo $\cos x = 0$; avšak v obou těchto případech se některé trigonometrické funkce v dané rovnici stávají nekonečně velikými.

Řešme tedy rovnice $\sin x + \cos x = u_{2,3}$. Má-li existovati reálné řešení, musí býti

$$a^2 - 2a - 7 = (a-1)^2 - 8 \geqq 0;$$

avšak to ještě nestačí; dle důsledků o rovnici v α) musí ještě býti

$$1 + 1 - u_2^2 \geqq 0, \qquad 1 + 1 - u_3^2 \geqq 0, \qquad \text{čili } u_{2,3}^2 \leqq 2.$$

Rovnice uvedené v b), c) a d) slují **t r a n s c e n d e n t n í**. Mezi nimi — a právě tak mezi algebraickými a iracionálními — jest velmi mnoho rovnic, pro něž neznáme žádných předpisů, jež by vedly k jejich exaktnímu řešení; na př. rovnice $x + \sqrt[6]{x} = 10$, kteroužto lze psáti ve tvaru $(x - 10)^6 = x$; nebo rovnice $2^x + 3^x = 1$, nebo $x \log x = 2$, $\varphi \cos \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{2}\pi = 0$. Ve všech takových případech, jakož i tenkráte, kdy exaktní metoda vede k složitým a dlouhým výpočtům, při nichž počítání se zkrácenými čísly ohrožuje správný výsledek, užíváme metod **p ř i b l i ž n ý c h**; souborný výklad o těchto metodách, pravidelně užitých na rovnice s číselnými koeficienty, nazýváme **n a u k o u o n u m e r i c k é m ř e š e n í r o v n i c**; k těmto výkladům se pravidelně též připojují poznámky, jak výhodně jest upraviti výpočty, k nimž vede exaktní řešení rovnic.

Ú l o h y. Řešte rovnice

3. $6 \,.\, 1{,}5^{3x} - 19 \,.\, 1{,}5^{2x} + 19 \,.\, 1{,}5^{x} - 6 = 0$

$[1{,}5^x = y;\; x_1 = 0,\; x_{2,3} = \pm 1]$

4. $3 \,.\, 10^{2(3-x)(4-x)} + 10\,000 = 400 \,.\, 10^{(3-x)(4-x)}$

$[10^{(3-x)(4-x)} = y;\; y_1 = 100,\; y_2 = \frac{100}{3}]$

5. $\sin^{\frac{2}{3}} x + \cos^{\frac{2}{3}} x = a$

$\left[\sin 2x = \pm 2 \left(\frac{a^3 - 1}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

6. $2^{12 \sin x + 5 \cos x - 10} - 8 = 0$

$[12 \sin x + 5 \cos x - 13 = 0,\; \operatorname{tg} x = -\frac{5}{12}]$

2.

NUMERICKÉ (GONIOMETRICKÉ) ŘEŠENÍ ROVNIC 2., 3. A 4. STUPNĚ.

V tomto odstavci uvedeme některé pokyny o numerickém řešení rovnic stupně 2., 3. a 4., o nichž sice víme, že je lze řešiti exaktně, což však bývá, když koeficienty jsou dány na př. trojmístnými čísly, spojeno se značnými nesnázemi.

a) Kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

jsou dány vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

α) Budiž $b^2 - 4ac > 0$, $ac < 0$; tato rovnice má dva kořeny reálné. Položme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-ac}}{b}, \qquad \text{tedy} \qquad b = 2\sqrt{-ac} \operatorname{cotg} \varphi;$$

pak jest

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{-ac} \operatorname{cotg} \varphi \pm 2\sqrt{-ac}\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \varphi + 1}}{2a} =$$

$$= -\sqrt{-\frac{c}{a}} \left(\frac{\cos \varphi \pm 1}{\sin \varphi} \right),$$

takže

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi, \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi;$$

při tom $-90° < \varphi < 90°$.

Na př. řešme rovnici:

$$y^2 - 1{,}6502y - 1{,}6777 = 0.$$

Zde jest:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{1{,}6777}}{-1{,}6502}, \quad \varphi = -57° \, 30' \, 08'', \quad \tfrac{1}{2}\varphi = -28° \, 45' \, 04'',$$

$$y_1 = 2{,}3609, \quad y_2 = -0{,}7106.$$

β) Budiž opět $b^2 - 4ac > 0$, avšak $ac > 0$. Poněvadž dle první nerovniny jest

$$0 < 4ac < b^2, \qquad \text{t. j.} \qquad 0 < \frac{4ac}{b^2} < 1,$$

lze psáti:

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{ac}}{b}, \qquad b = \frac{2\sqrt{ac}}{\sin\varphi}$$

a to dosazeno do vzorce pro $x_{1,2}$ dává po podobných úpravách jako dříve

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Na př.

$$x^2 - 4{,}6646x + 3{,}33 = 0$$

řešíme substitucí

$$\sin\varphi = -\frac{2\sqrt{3{,}33}}{4{,}6646}, \quad \varphi = -51^\circ\,29'\,00'', \quad \tfrac{1}{2}\varphi = -25^\circ\,44'\,30'',$$

takže

$$x_1 = 3{,}7849, \qquad x_2 = 0{,}8797.$$

Je-li posléze $b^2 - 4ac < 0$, položíme

$$\cos\varphi = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}, \qquad \text{t. j.} \qquad b = -2\sqrt{ac}\cos\varphi,$$

takže

$$x_{1,2} = \frac{+2\sqrt{ac}\cos\varphi \pm \sqrt{4ac(\cos^2\varphi - 1)}}{2a} =$$

$$= +\sqrt{\frac{c}{a}}(\cos\varphi \pm i\sin\varphi);$$

při tom jest $0 < \varphi < 180^\circ$.

Rovnici

$$x^2 - 4{,}6646x + 7{,}55 = 0$$

řešíme tedy substitucí $\cos\varphi = \dfrac{4{,}6646}{2\sqrt{7{,}55}}$, odkudž $\varphi = 31° 55' 00''$ a kořeny pak jsou

$$x_{1,2} = 2{,}3323 \pm i\, 1{,}4526.$$

b) Obecná rovnice stupně třetího jest

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

(viz Schwarz, str. 41). Pišme

$$x = y - \tfrac{1}{3} a_1,$$

substituce dává rovnici redukovanou

$$y^3 + py + q = 0,$$

při čemž

$$p = a_2 - \tfrac{1}{3} a_1^2, \qquad q = a_3 - \tfrac{1}{3} a_1 a_2 + \tfrac{2}{27} a_1^3.$$

Značme

$$\Delta = \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{27} p^3, \qquad u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{\Delta}}, \qquad v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{\Delta}},$$

pak kořeny redukované rovnice jsou

$$y_1 = u + v, \qquad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \qquad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v,$$

při čemž $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

Ukážeme nyní řešení této rovnice ve třech různých případech pomocí goniometrických funkcí; podotkněme, že těchto obratů s výhodou lze užíti i při koeficientech málomístných.

α) Buď $\Delta > 0$, $p > 0$. Položíme-li

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{q} \sqrt{\tfrac{1}{27} p^3},$$

jest

$$\tfrac{1}{2} q = \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{\tfrac{1}{27} p^3}, \qquad -90° < \varphi < +90°;$$

$$\Delta = \tfrac{1}{27} p^3 \operatorname{cotg}^2 \varphi + \tfrac{1}{27} p^3 = \tfrac{1}{27} p^3 \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi};$$

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\tfrac{1}{27} p^3} \left(-\operatorname{cotg} \varphi + \frac{1}{\sin \varphi}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi}$$

a podobně

$$v = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi}.$$

S výhodou lze zavésti další pomocný úhel rovnicí

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi;$$

jednoduché úpravy pak dávají

$$y_1 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{cotg}2\psi, \qquad y_{2,3} = \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\operatorname{cotg}2\psi \pm \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right).$$

Jest tedy jeden kořen záporný, další dva komplexně sdružené.

Řešme na př. rovnici

$$x^3 + 6x + 4 = 0;$$

zde jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}, \qquad \varphi = 54°\,44'\,07'', \qquad \psi = 38°\,45'\,39'',$$

$$x_1 = -0{,}62594, \qquad x_{2,3} = 0{,}31297 \pm i2{,}5087.$$

β) Budiž nyní $\Delta > 0$, $p < 0$; položme

$$\sin\varphi = \frac{2}{q}\sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3};$$

potom

$$q = \frac{2}{\sin\varphi}\sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3}, \qquad -90° < \varphi < +90°;$$

jest pak

$$\Delta = \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 = \tfrac{1}{27}p^3\left(-\frac{1}{\sin^2\varphi} + 1\right) = -\tfrac{1}{27}p^3\operatorname{cotg}^2\varphi$$

a dále

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3} - \sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3}\operatorname{cotg}\varphi} =$$

$$= -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi}$$

a podobně

$$v = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi},$$

takže

$$y_1 = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}).$$

Opět jest výhodno zavésti další pomocný úhel ψ rovnicí

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi;$$

odtud známými obraty vypočteme

$$y_1 = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cdot\frac{2}{\sin 2\psi},$$

$$y_{2,3} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\left[\frac{1}{\sin 2\psi} \pm i\sqrt{3}\operatorname{cotg} 2\psi\right].$$

Jest tedy v tomto případě jeden kořen kladný a druhé dva komplexně sdružené.

γ) Je-li konečně $\Delta = -D < 0$, jsou u, v komplexní a lze psáti (viz Schwarz, str. 8)

$$-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-D} = -\tfrac{1}{2}q + i\sqrt{D} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

takže

$$r = \sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3}, \qquad \cos\varphi = -\tfrac{1}{2}q\sqrt{-\frac{27}{p^3}}.$$

Dle Moivreovy poučky (viz Schwarz, str. 9) vypočteme

$$u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + i\sin\tfrac{1}{3}\varphi),$$

$$v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,(\cos\tfrac{1}{3}\varphi - i\sin\tfrac{1}{3}\varphi).$$

Tak docházíme ke vzorcům

$$y_1 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$y_2 = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{3}\sin\tfrac{1}{3}\varphi) =$$

$$= -2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,(\cos 120^\circ \cos \tfrac{1}{3}\varphi + \sin 120^\circ \sin \tfrac{1}{3}\varphi) =$$
$$= -2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cos(120^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi)$$

a podobně

$$y_3 = -2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cos(120^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi).$$

Úloha 7. Řešte dle vzorců uvedených v $b\alpha$, $b\beta$ rovnice:

a) $x^3 - 3x + 8 = 0$; $[x_1 = -2{,}492,\ x_{2,3} = 1{,}246 \pm i1{,}290]$;
b) $x^3 - 9x - 8 = 0$; $[3{,}3723;\ -1;\ -2{,}3723]$.

c) **Rovnice čtvrtého stupně** se řeší vždy pomocí jisté rovnice stupně třetího a jest mnoho způsobů, jak lze tuto kubickou rovnici — zvanou resolventou — odvoditi. Zde uvedeme metodu Langrangeovu málo pozměněnou. Obecná rovnice 4. stupně jest

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

V následujícím odstavci se dozvíme, že levou stranu algebraické rovnice lze psáti ve tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny této rovnice; lze tedy danou rovnici čtvrtého stupně psáti takto

$$(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0.$$

Proveďme násobení a porovnejme koeficienty při stejných mocninách x:

$$a_1 + a_2 = a,\quad b_1 + b_2 + a_1a_2 = b,\quad a_1b_2 + a_2b_1 = c,\quad b_1b_2 = d.$$

Řešením rovnice první a třetí dle a_1, a_2 obdržíme

$$a_1 = -\frac{c - ab_1}{b_1 - b_2},\qquad a_2 = \frac{c - ab_2}{b_1 - b_2},$$

což dosazeno do druhé rovnice dává

$$b_1 + b_2 + \frac{-a^2b_1b_2 + ac(b_1 + b_2) - c^2}{(b_1 + b_2)^2 - 4b_1b_2} = b$$

a tuto rovnici lze pomocí čtvrté rovnice psáti takto

$$b_1 + b_2 + \frac{-a^2d + ac(b_1 + b_2) - c^2}{(b_1 + b_2)^2 - 4d} = b;$$

posléze

$$(b_1 + b_2)^3 - b(b_1 + b_2)^2 + (ac - 4d)(b_1 + b_2) - \\ - (a^2d - 4bd + c^2) = 0$$

a to jest hledaná resolventa.

Píšeme-li

$$b_1 + b_2 = \xi,$$

zní tedy resolventa

$$\xi^3 - b\xi^2 + (ac - 4d)\xi - (a^2d - 4bd + c^2) = 0$$

a má tři kořeny, z nichž — jak později dokážeme — jest jeden jistě reálný; značme jej ξ_1. Z rovnic

$$b_1 + b_2 = \xi_1, \; b_1b_2 = d$$

určíme b_1 a b_2 a snadno i a_1 a a_2. Nyní můžeme napsati levou stranu dané rovnice čtvrtého stupně ve tvaru součinu dvou kvadratických trojčlenů; tak pohodlně určíme kořeny dané rovnice.

Na př. resolventa rovnice $x^4 + px + q = 0$ jest $\xi^3 - 4q\xi - p^2 = 0$.

Zkušenost učí, že řešení rovnic čtvrtého stupně i při jednoduchých koeficientech jest namáhavé, proto se velmi často provádí řešení některou z přibližných metod.

Úloha 8. Ukažte, že kořeny reciproké rovnice

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + ax + 1 = 0$$

jsou $x_1 = \operatorname{tg} \beta_1$, $x_2 = -\operatorname{cotg} \beta_1$, $x_3 = \operatorname{tg} \beta_2$, $x_4 = \operatorname{cotg} \beta_2$,

při čemž $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{b+2}}{a}$, $\pm\sqrt{\frac{4}{b+2}} \operatorname{tg} \alpha = \sin 2\beta_{1,2}$.

[První substituce užijte pro vyjádření kořenů pomocné kvadratické rovnice, s pomocí níž se daná rovnice reciproká převádí na dvě rovnice kvadratické; kořeny těchto dvou rovnic upravte pomocí dalších dvou substitucí.]

3.

POMOCNÉ VĚTY.

a) Gauss dokázal (viz Schwarz, str. 26), že algebraická rovnice stupně n-tého o koeficientech ať reálných či komplexních má přesně n kořenů, které mohou býti reálné i komplexní, jednoduché nebo vícenásobné; při zjišťování počtu kořenů nutno pak násobnost jednotlivých kořenů vzíti v úvahu. Značme levou stranu rovnice (1,1) symbolem $f(x)$; snadno se ukáže, je-li x_1 kořen rovnice $f(x) = 0$, že $f(x)$ jest dělitelno výrazem $x - x_1$; jest totiž

$$f(x) - f(x_1) =$$

$$= a_0 (x^n - x_1{}^n) + a_1 (x^{n-1} - x_1{}^{n-1}) + \ldots + a_{n-1} (x - x_1).$$

Zde každý z rozdílů v závorkách jest dělitelen dle známé elementární věty rozdílem $x - x_1$; tento rozdíl budeme nazývati kořenovým činitelem, nebo též lineárním faktorem, mnohočlenu $f(x)$. Jest tedy $f(x) = (x - x_1) f_1(x)$, kdež $f_1(x)$ jest mnohočlen stupně $n - 1$. Avšak rovnice $f_1(x) = 0$ má dle Gaussovy věty opět kořen x_2 (může býti i $x_1 = x_2$) a opět jest $f_1(x) = (x - x_2) f_2(x)$, kdež $f_2(x)$ jest polynom stupně $n - 2$, takže $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x)$. Takto postupujíce ukážeme, že $f(x)$ jest až na násobnou konstantu rovno $(x - x_1) . (x - x_2) \ldots (x - x_n)$. (Ukažte, že tato konstanta jest a_0.)

I jest

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \qquad (3,1)$$

Provedeme-li násobení v (3,1) a porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin x na levé a pravé straně, máme tuto soustavu důležitých rovnic:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_n + x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Jsou to vztahy mezi **elementárními symetrickými funkcemi** a koeficienty dané rovnice (Schwarz, str. 30).

Uvažujme nyní pouze o rovnicích s **koeficienty reálnými**. Je-li kořenem rovnice komplexní číslo $\alpha + \beta i$, jest kořenem i číslo komplexně sdružené $\alpha - \beta i$. O prvním kořenu platí totiž

$$f(\alpha + \beta i) = P + iQ = 0, \quad \text{t. j.} \quad P = Q = 0,$$

tedy i

$$P - iQ = 0,$$

avšak levá strana této rovnice jest vlastně $f(x - \beta i)$, je tedy $f(\alpha - \beta i) = 0$, c. b. d.

Úloha 9. Rozložte v součin lineárních činitelů mnohočlen $f(x) \equiv x^5 - x^4 - x + 1$. $[(x - 1)^2 (x + 1) (x^2 + 1)]$

Poznámka 1. Snadno sestrojíme rovnice — ovšem nealgebraické — jež nemají žádného řešení; na př.

$$3 + |\sqrt{x + 4}\,| = 1, \text{ čili } |\sqrt{x + 4}\,| = -2,$$

což není možno. Rovněž rovnice

$$1 + x + x^2 + \ldots \text{in inf.} = -1$$

nemá žádného řešení; proč?

Rovnice $3^x = 0$ nemá žádného konečného řešení (t. j. její kořen nelze napsati žádným konečným číslem).

Poznámka 2. Dělení mnohočlenu lineárním faktorem provádíme pohodlně **Hornerovým schematem**; postup objasníme na zvláštním příkladě. Dělme obyčejným způsobem

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3. \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\quad -4x^2 + 11x \\
\quad \underline{4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad 3x - 6 \\
\qquad\quad \underline{-3x + 6} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Napíšeme nyní schema

	1	-6	11	-6
2	1	-4	3	0

jež vzniklo takto: Násobme 1 dvěma a přičtěme k -6, vzniknou -4; násobme -4 dvěma a přičtěme k 11, tak vznikne 3; násobme posléze 3 dvěma a přičtěme k -6, vyjde 0. Čísla 1, -4, 3, jak z provedeného dělení jest patrno, jsou koeficienty hledaného podílu.

Avšak tohoto schematu lze se značnou výhodou užíti i tenkráte, když dělení mnohočlenu vykazuje zbytek; zbytek tento pak stanovíme takto:

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_1(x) + \frac{A}{x-a},$$

kdež $f_1(x)$ jest mnohočlen stupně nižšího než $f(x)$ a A je zbytek. Násobme rovnici $x - a$; dostaneme

$$f(x) = f_1(x)\,(x - a) + A;$$

položíme-li $x = a$, pak jest $A = f(a)$. Tohoto výsledku často užíváme k stanovení funkčních hodnot.

Na př. jest stanoviti $f(1,1)$, když

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 8.$$

Příslušné schema:

	1	5	1	0	-8
1,1	1	6,1	7,71	8,481	1,3291

dává

$$f(1,1) = 1,3291.$$

Užití Hornerova schema jest mnohostranné; jeho opakováním lze daný mnohočlen pohodlně rozvinouti dle mocnin lineárního výrazu.

Na př. jest rozvinouti mnohočlen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

dle mocnin $(x - 4)$; má tedy býti

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =$$
$$= A_0 + A_1(x - 4) + A_2(x - 4)^2 + A_3(x - 4)^3.$$

Koeficienty A_0, A_1, A_2, A_3 lze určiti postupným dělením Hornerovou metodou upravenou do tohoto schematu:

	1	—6	11	—6	
4	1	—2	3	$+\underline{6}$	$= A_0$,
	1	2	$\underline{11}$		$= A_1$,
	1	$\underline{6}$			$= A_2$,
	$\underline{1}$				$= A_3$

takže

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =$$
$$= 6 + 11\,(x - 4) + 6\,(x - 4)^2 + (x - 4)^3.$$

Úloha 10. Ukažte, jak s pomocí této metody lze v rovnicích $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ a $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ odstraniti kvadratický resp. kubický člen.

[Rozviňte rovnicové mnohočleny dle mocnin $x - \frac{1}{3}a$ resp. $x - \frac{1}{4}a$.]

b) Zásadní důležitosti pro numerické řešení rovnic jest věta Bolzano-Weierstrassova (Schwarz, str. 28, Kössler, str. 62). Ta platí za jistých podmínek, které pro mnohočleny jsou splněny; zní pak:

Buďte $f(x) = 0$ rovnice (1,1) a a, b reálná čísla;

konečně $f(a)$ a $f(b)$ buďte opačných znamének; pak v intervalu $(a; b)$ leží lichý počet nulových bodů rovnicového mnohočlenu $f(x)$ čili lichý počet kořenů dané rovnice. Jsou-li však $f(a)$ a $f(b)$ téhož znamení, pak buď není v tomto intervalu žádný kořen nebo jest tam sudý počet kořenů. (Je-li některý z nulových bodů vícenásobný, nutno vzíti při úvahách o počtu kořenů jeho násobnost.)

Tato věta jest podkladem t. zv. separace kořenů záležející ve stanovení dosti úzkých intervalů, v nichž se nalézá jediný kořen dané rovnice.

Na př. mějme rovnici

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 8 = 0,$$

zde jest $f(0) = 8$, $f(1) = 3$, $f(2) = -8$, $f(3) = 35$. Leží tedy mezi 1 a 2 a mezi 2 a 3 po lichém počtu kořenů; tedy v jednom z těchto intervalů jest jistě jeden a v druhém nejvýše tři kořeny. Intervaly (1; 2) a (2; 3) můžeme vhodnou volbou dalšího čísla zúžiti; jest na př. $f(1,5) = -3{,}81$, $f(2{,}5) =$ $= 0{,}19$; leží tedy v jednom z intervalů (1; 1,5), (2; 2,5) jeden a v druhém nejvýše tři kořeny.

c) S mnohočlenem

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

úzce souvisí mnohočlen

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \dots + a_1;$$

čtenář znalý počtu diferenciálního rozpoznává v něm první derivaci základního mnohočlenu a ví, že ji značíme $f'(x)$. Avšak čtenáři neznalému diferenciálního počtu postačí výtvarný zákon tohoto přidruženého mnohočlenu a nechť mu zachová název i znak první derivace $f'(x)$. Podobně první derivací právě odvozené první derivace jest

$$n\,(n-1)\,a_0x^{n-2} + (n-1)\,(n-2)\,a_0x^{n-3} + \dots + 2\,.\,1\,.\,a_2$$

a tento mnohočlen budeme nazývati druhou derivací mnohočlenu $f(x)$ a budeme ji značiti $f''(x)$. Podobně jest třetí derivací daného mnohočlenu

$$f'''(x) = n\,(n-1)(n-2)\,a_0x^{n-3} + \ldots + 2\,.\,3a_{n-3},$$

čtvrtou derivací

$$f^{\mathrm{IV}}(x) =$$
$$= n\,(n-1)(n-2)(n-3)\,a_0x^{n-4} + \ldots + 4\,.\,3\,.\,2a_{n-4}$$

atd., n-tá derivace pak jest

$$f^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\,.\,1\,.\,a_0 = n!a_0;$$

jest tedy nezávislá na x; o vyšších derivacích stupně vyššího než n ať platí

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = 0.$$

α) Zejména první derivace rovnicového mnohočlenu hraje v numerickém řešení rovnic důležitou úlohu. Často se užívá věty:

Největší společný dělitel mnohočlenů $f(x)$ a $f'(x)$ udává všechny vícenásobné lineární faktory $f(x)$ a to tak, že násobnost těchto faktorů jest o jednu nižší než v $f(x)$ (Schwarz, str. 18 a n.).

Na př. společný dělitel mnohočlenů

$$x^5 - x^4 - x + 1 \quad \text{a} \quad 5x^4 - 4x^3 - 1$$

jest — jak obvyklým způsobem vypočteme — $(x - 1)$, proto jest $(x - 1)^2$ obsaženo v $f(x)$ beze zbytku a $x = 1$ jest dvojnásobným kořenem rovnice dané.

β) Dosaďme $x = 0$ do

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Výsledek dosazení jest

$$a_n = f(0),\ a_{n-1} = f'(0),\ 2a_{n-2} = f''(0),\ \ldots,\ n!a_n = f^{(n)}(0),$$

takže lze psáti (při změněném pořadí mocnin)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Tento vztah se nazývá poučkou Mac Laurinovou.

Odvodíme si nyní vztah obecnější. Je-li a libovolné číslo, jest $f(x + a)$ mnohočlen téhož stupně jako $f(x)$, avšak o jiných koeficientech:

$$f(x) = \bar{A}_0 x^n + \bar{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{A}_n.$$

Hledajíce postupně derivace obdržíme:

$$f'(x + a) = n\bar{A}_0 x^{n-1} + (n - 1)\bar{A}_1 x^{n-2} + \ldots + \bar{A}_{n-1},$$

$$f''(x + a) = n(n - 1)\bar{A}_0 x^{n-2} + (n - 1)(n - 2)\bar{A}_1 x^{n-3} + \\ + \ldots + 2\bar{A}_{n-2},$$

$$f^{(n)}(x + a) = n!\bar{A}_n;$$

položme opět $x = 0$, jest pak:

$$\bar{A}_n = f(a),\ \bar{A}_{n-1} = f'(a),\ \bar{A}_{n-2} = \frac{f''(a)}{2}, \ldots, A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

takže jest:

$$f(x + a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

Tento vztah nazýváme větou Taylorovou.

γ) O reálných kořenech algebraických rovnic $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ platí důležitá věta Rolleova (Kössler, str. 81):

Mezi dvěma reálnými kořeny rovnice $f(x) = 0$ leží nejméně jeden kořen rovnice $f'(x) = 0$; je-li jich více, jest jich lichý počet. (I tentokráte nutno vzíti v úvahu násobnost kořenů.)

POMOCNÉ VĚTY. (Pokračování.)

a) Věty Rolleovy užijeme k odvození dvou vět udávajících horní hranici počtu kořenů obsažených v jistém intervalu. Mají-li dva za sebou jdoucí členové uspořádané algebraické rovnice totéž znaménko (+, +; —, —), pravíme, že jejich znaménka tvoří shodu; mají-li znaménka opačná (+, —; —, +) říkáme, že tvoří změnu. Descartes odvodil podivuhodně jednoduchou větu, jak z počtu změn znamének lze souditi na počet kladných kořenů. Byly podány četné důkazy této věty; uvedeme zde krásný důkaz prof. dr. K. Petra,*) v němž jsou spojeny dvě důkazové metody, často se v matematice vyskytující: nepřímý důkaz a úplná indukce. Uvádíme doslovné znění tohoto důkazu.

„Věta Descartesova praví, že rovnice

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{4,1}$$

má nejvýše tolik kořenů kladných, kolik v posloupnosti

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{4,2}$$

jest znaménkových změn; je-li takových kořenů méně, je jich méně o sudý počet. (Při tom se členy posloupnosti (4,2), jež jsou rovny nule, nepočítají.)

Věta vyplývá z těchto soudů:

1. Počet kořenů kladných rovnice (4,1) a počet změn znaménkových v posloupnosti (4,2) jsou čísla stejné parity (t. j. jsou současně vyjádřena sudými nebo lichými čísly).
2. Věta jest platná pro rovnice stupně prvého.
3. Věta je platná pro rovnice stupně n-tého, platí-li pro rovnice stupně $n - 1$.

Neboť kdyby věta Descartesova nebyla platná pro rovnice stupně n-tého, existovala by aspoň jedna rovnice n-tého

*) Časopis pro pěstování matem. a fysiky, 36, str. 49—54.

stupně $f(x) = 0$, jež by při určitém počtu p změn znaménkových měla více kořenů kladných než p, tedy aspoň $p + 2$ kořenů kladných (dle soudu 1). Avšak rovnice $f'(x) = 0$, jež jest stupně $n - 1$ a má nejvýše p změn znaménkových, měla by dle Rolleovy věty aspoň $p + 1$ kořenů kladných, což však jest proti předpokladu, že věta Descartesova jest platna pro rovnice stupně $n - 1$.“

Abychom stanovili horní hranici pro počet záporných kořenů, uvažujeme o rovnici $f(-x) = 0$, t. j. rovnici, která má kořeny opačného znamení než rovnice původní. Pak počet změn udává horní hranici počtu kladných kořenů rovnice $f(-x) = 0$, čili horní hranici počtu záporných kořenů původní rovnice.

Věta Descartesova — jak z odvození patrno — zůstává v platnosti, i když některé mocniny neznámé scházejí. Tak na př. v rovnici uvažované v odst. 3b

$$3x^4 - 8x^3 + 8 = 0$$

jsou dvě změny, má tudíž tato rovnice nejvýše dva kladné kořeny; lze tedy říci, že tato rovnice má v intervalech (1; 1,5), (2; 2,5) po jednom kladném kořenu. Poněvadž rovnice s kořeny o opačném znaménku

$$3x^4 + 8x^3 + 8 = 0$$

nemá žádných změn, nemá žádných kladných a původní rovnice žádných záporných kořenů; má tedy původní rovnice dva kladné a dva komplexní kořeny.

Úlohy. **11.** Ukažte, jsou-li x_1, x_2 reálné kořeny rovnice $3x^4 - 8x^3 + 8 = 0$, že její kořeny komplexní jsou dány rovnicí

$$x^2 + (x_1 + x_2 - \tfrac{8}{3})x + \frac{8}{3x_1x_2} = 0.$$

12. Dokažte, že rovnice

$$x^{m+n} + ax^m + b = 0,$$

kde m, n jsou čísla celá, kladná, má nejvýše dva kladné kořeny a že horní mez počtu kořenů záporných udává počet změn v posloupnosti

$$1 + a\,(-1)^m + b\,(-1)^{m+n}.$$

b) Dokážeme nyní větu Budan-Fourierovu.

Rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b), $0 \leqq a < b$, $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, nejvýše tolik kořenů, o kolik má posloupnost

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

více změn nežli posloupnost

$$f(b), f'(b), f''(b), \ldots, f^{(n)}(b).$$

Má-li kořenů méně, jest rozdíl mezi získaným počtem změn a počtem kořenů číslo sudé.

Poněvadž jest

$$f(x) = a_0\,(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

jest

$$f(x + a) =$$
$$= a_0\,(x + a - x_1)(x + a - x_2) \ldots (x + a - a_n),$$

takže kořeny rovnice $f(x + a) = 0$ jsou

$$x_1 - a,\ x_2 - a,\ \ldots,\ x_n - a;$$

jsou tedy pro kladné a o veličinu a menší a pro záporné a o tuto veličinu větší než kořeny původní rovnice. Budiž dále $0 \leqq a < b$. Z věty Taylorovy plyne

$$f(x + a) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) = 0,$$

$$f(x + b) = f(b) + \frac{x}{1!} f'(b) + \frac{x^2}{2!} f''(b) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(b) = 0;$$

počet změn v první rovnici značme A, v druhé B. První rovnice dle věty Descartesovy má nejvýše A kladných kořenů, tolikéž kořenů má původní rovnice větších než a; podobně původní rovnice má nejvýše B kořenů větších než b. Větších kořenů než a má původní rovnice $A - 2\alpha$ a větších než b má

$B - 2\beta$, kdež $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$. V intervalu (a, b) má tedy daná rovnice $A - B - (2\alpha - 2\beta)$ kořenů. Úplnou indukcí dokážeme, že $-2\alpha + 2\beta \leqq 0$.

Připusťme, že tato věta platí pro rovnice stupně $n - 1$ a že neplatí pro rovnice stupně n. Pak existuje aspoň jedna rovnice stupně n, která v rozvojích $f(x + a)$ a $f(x + b)$ vykazuje A resp. B změn a v daném intervalu má $A - B + 2\nu_1$ kořenů, kde $\nu_1 > 0$. Dle věty Rolleovy $f'(x) = 0$ pak má v témž intervalu $A - B + 2\nu_1 - 1 + 2r$ kořenů $(r \geqq 0)$; k tomu pak přistupují ještě kořeny ležící mezi a a nejmenším kořenem rovnice $f(x) = 0$ a mezi největším kořenem této rovnice a b. Úhrnný počet těchto kořenů značme ϱ, takže dle této úvahy má $f'(x) = 0$ v uvažovaném intervalu celkem $A - B + 2\nu_1 + 2r + \varrho - 1$ kořenů $(\varrho \geqq 0)$. Avšak dle věty Budan-Fourierovy platné pro rovnice stupně $n - 1$ má $f'(x) = 0$ celkem kořenů $A - B - \varepsilon - 2\nu$, kdež $\nu \geqq 0$, $\varepsilon = 0; 1$; znaménka totiž stanovíme z posloupností

$$f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a); \; f'(b), f''(b), \ldots, f^{(n)}(b).$$

Porovnáním obou výsledků jest $A - B - \varepsilon - 2\nu = A - B + 2\nu_1 + 2r + \varrho - 1$ čili $2(\nu_1 + \nu + r) + \varrho = 1 - \varepsilon$, takže platí

$$\text{buď } 2(\nu_1 + \nu + r) + \varrho = 1,$$
$$\text{nebo } 2(\nu_1 + \nu + r) + \varrho = 0.$$

V prvním případě tedy dle předpokladů o znaménkách veličin tam vystupujících musí býti $\nu_1 = \nu = r = 0$, $\varrho = 1$, a v druhém $\nu_1 = \nu = r = 0$. V obou případech jest $\nu_1 = 0$, kdežto předpoklad zněl $\nu_1 > 0$. Tak jsme ukázali, že náš předpoklad o neplatnosti věty Budan-Fourierovy pro rovnice stupně n není správný, musí tedy platiti opak našeho předpokladu, t. j. věta platí i pro rovnice stupně n, platí-li pro rovnice stupně $n - 1$. ♠

Dokážeme nyní správnost věty Budan-Fourierovy pro kvadratickou rovnici

$$f(x) = x^2 + px + q = 0;$$

je

$$f'(x) = 2x + p, \; f''(x) = 2 > 0.$$

α) Je-li $A - B = 2$, jest možné pro

$$f(a), f'(a), f''(a); f(b), f'(b), f''(b)$$

jedině toto seskupení znamének: $+-+$, $+++$; v obou případech jest $f(a) > 0$, $f(b) > 0$, tedy dle věty Bolzano-Weierstrassovy (str. 23) v intervalu $(a; b)$ mohou býti nejvýše dva kořeny.

β) Je-li $A - B = 1$, jsou možna tato seskupení znamének: $+-+$, $-++$; $+-+$, $--+$; $-++$, $+++$; $--+$, $+++$. Vždy tedy jest $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ nebo $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, jest tedy v daném intervalu jeden kořen.

γ) Je-li posléze $A - B = 0$, jsou možná tato seskupení: $+-+$, $+-+$ nebo $-++$, $-++$; $-++$, $--+$; $--+$, $--+$; $--+$, $-++$ nebo posléze $+++$, $+++$. V druhém případě jest vesměs $f(a) < 0$, $f(b) < 0$, poněvadž $f(\infty) > 0$ i $f(-\infty) > 0$ (o znaménku substituce $x = \infty$, $x = -\infty$ rozhoduje totiž znaménko koeficientu při x^2), leží po jednom kořenu v intervalech $(-\infty; a)$, $(a; \infty)$, a v intervalu daném pak žádný kořen. V prvním případě, poněvadž $f(a) = (a - x_1)(a - x_2) > 0$, $f(b) = (b - x_1)(b - x_2) > 0$, musí býti současně $a - x_1 \gtrless 0$, $a - x_2 \gtrless 0$ a současně $b - x_1 \gtrless 0$, $b - x_2 \gtrless 0$. Poněvadž $f'(a) = (a - x_1) + (a - x_2) < 0$, musí býti $a - x_1 < 0$, $a - x_2 < 0$, čili $a < x_1$, $a < x_2$ a z téhož důvodu $b - x_1 < 0$, $b - x_2 < 0$. To znamená: Větší z čísel a, b leží před menším z kořenů x_1, x_2, které tedy nemohou ležeti v daném intervalu. Výsledek týž jest i v případě třetím. Tak jsme správnost této věty dokázali pro $n = 2$; platí tedy pro každé celé n.

Je-li dána na př. rovnice

$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 10x^2 + x - 270 = 0,$$

jest pro $x = 3$, $x = 5$ (stačí stanoviti znaménka výsledků):

$$f(3) = - \ldots,$$
$$f'(3) = + \ldots,\ f''(3) = + \ldots,\ f'''(3) = + \ldots,\ f^{IV}(3) = + \ldots;$$
$$f(5) = + \ldots,$$
$$f'(5) = + \ldots,\ f''(5) = + \ldots,\ f'''(5) = + \ldots,\ f^{IV}(5) = 0.$$

V druhé posloupnosti jest tedy o jednu změnu méně, tedy daná rovnice má mezi 3 a 5 jeden kořen kladný.

Úloha 13. Ukažte, že rovnice

$$f(x) = 0$$

má v intervalu $(a; b)$ nejvýše tolik kladných kořenů, kolik změn mají koeficienty rovnice

$$(1 + u)^n f\left(\frac{a + bu}{1 + u}\right) = 0.$$

[Položte

$$x = \frac{a + bu}{1 + u} = a + \frac{(b - a)\, u}{1 + u};$$

jak se mění x, mění-li se u od 0 do nekonečna?]

c) Věta Sturmova. Obě předchozí věty, Descartesova i Budan-Fourierova, udávají pouze horní mez kořenů v jistém intervalu; snadno však odvodíme větu udávající počet kořenů rovnice v daném intervalu přesně. Rovnice

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

mějž kořeny jen jednoduché; má-li kořeny vícenásobné, stanovíme dle výkladů tohoto odstavce první deřivaci $f'(x)$ a společným dělitelem mnohočlenů $f(x)$ a $f'(x)$ dělíme mnohočlen $f(x)$, tak dospějeme k rovnici mající jen jednoduché kořeny (Schwarz, str. 18 a n.).

Postupujme nyní tak, jako kdybychom hledali společného dělitele $f(x)$ a $f'(x)$, avšak zbytky vznikající při dělení opatřme znaménkem opačným:

$$f(x) = q_1 f'(x) - g_2(x),$$
$$f'(x) = q_2\, g_2(x) - g_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_{\nu-1}(x) = q_\nu\, g_\nu(x) - g_{\nu+1}(x),$$

. . . .

$$g_{n-2}(x) = q_{n-1}\, g_{n-1}(x) - g_n(x).$$

Uvažujme nyní o změnách znamének posloupnosti mnohočlenů

$$f(x), f'(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \;(= \text{konstanta}),$$

(jichž stupně klesají). Poněvadž každé tři za sebou jdoucí mnohočleny jsou spjaty vztahem

$$g_{\lambda-1}(x) = q_\lambda\, g_\lambda(x) - g_{\lambda+1}(x),$$

platí, je-li x_1 kořenem rovnice $g_\lambda(x) = 0$ v intervalu $(a; b)$, vztah

$$g_{\lambda-1}(x_1) = - g_{\lambda+1}(x_1).$$

Avšak mnohočleny $g_{\lambda-1}(x)$ a $g_{\lambda+1}(x)$ nemohou současně vymizeti, jelikož by dle rovnice

$$g_{\lambda-2}(x_1) = q_{\lambda-1}\, g_{\lambda-1}(x_1) - g_\lambda(x_1)$$

bylo též $g_{\lambda-2}(x_1) = 0$ a opakováním těchto soudů též $f'(x_1) = 0$ a $f(x_1) = 0$; ale pak by $f(x)$ a $f'(x)$ byly soudělné — proti předpokladu. Z toho pak plyne důležitý poznatek: Když se stane rovným nule některý z mnohočlenů posloupnosti

$$f'(x), g_2(x), \ldots,$$

pak se počet změn v této posloupnosti nemění.

Mohou totiž nastati pro tři za sebou jdoucí mnohočleny pouze tyto čtyři případy: Pro $x = x_1 - \varepsilon$ jsou jejich znaménka: $++-$; $+--$; $-++$; $--+$ a současně pro $x = x_1 + \varepsilon$ jsou jejich znaménka: $+--$; $++-$; $--+$; $-++$. Počet změn může se tedy změniti pouze tenkráte, když nulou se stává $f(x)$; pak pro každý kořen obsažený v intervalu $(a; b)$ ztrácí se jedna změna; neboť $f(x)$ přechází ze záporných hodnot v kladné, když $f'(x) > 0$, a z kladných hodnot v záporné, když $f'(x) < 0$.

Má tedy daná rovnice v intervalu (a, b), $(a < b)$, tolik kořenů, o kolik změn má posloupnost

$$f(a), f'(a), g_2(a), \dots \qquad (1)$$

více než posloupnost

$$f(b), f'(b), g_2(b), \dots \qquad (2)$$

Poznamenejme, že postupné dělení není potřeba prováděti až ke zbytku $g_n(x) =$ konstanta; stačí nalézti takový zbytek, aby v intervalu (a, b) neměnil svého znaménka.

Na př. rovnice

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 8 = 0$$

poskytuje $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 \sim x^3 - 2x^2$ ($\sim$ značí, že jsme vynechali neužitečného činitele), $g_2(x) = 4x^2 - 8 \sim x^2 - 2$, $g_3(x) = -x + 2$, $g_4(x) = -2$. Počet kladných kořenů obdržíme kladouce $a = 0$, $b = \infty$. Znaménka příslušné posloupnosti (1) jsou $+$, 0, $-$, $+$, $-$ (3 změny), znaménka příslušné posloupnosti (2) $+++--$ (1 změna); má tedy tato rovnice dva kladné kořeny; abychom zjistili, kolik má kořenů záporných, položme $a = -\infty$, pak posloupnost (1) má znaménka $+$, $-$, $+$, $+$, $-$; má tedy tři změny, tedy stejně jako pro $b = 0$; rovnice nemá tedy žádných kořenů záporných. Má tedy dva kořeny kladné a dva komplexně sdružené.

Pro praktické užití jest důležité toto upozornění. Sestrojujíce posloupnost Sturmových mnohočlenů užíváme pouze postupu obvyklého při hledání společného dělitele, nehledáme však společného dělitele přímo; proto můžeme upustiti od různých obratů, jichž se při hledání dělitele užívá, abychom dospěli k mnohočlenům o celistvých koeficientech.

Tak na př.*) budiž dána rovnice

$$f(x) = 5{,}47x^5 - 3{,}38x^4 + 2{,}57x^3 + 10{,}11x^2 - 6{,}23x + \\ + 5{,}43 = 0;$$

---

*) Runge: Praxis der Gleichungen, str. 185.

máme rozhodnouti o počtu reálných kořenů a separovati je. Příslušné mnohočleny jsou:

$$f'(x) = 27{,}4x^4 — 13{,}5x^3 + 7{,}71x^2 + 20{,}22x — 6{,}23,$$
$$g_2(x) = — 0{,}69x^3 — 6{,}27x^2 + 4{,}48x — 5{,}27,$$
$$g_3(x) = — 2570x^2 + 1890x — 1990.$$

Dále netřeba počítati, jelikož rovnice $g_3(x) = 0$ má komplexní kořeny a $g_3(x)$ pro všechna čísla reálná má znaménko záporné. Koeficienty pak lze počítati přibližně na logaritmickém pravítku.

Když $a = —\infty$, jsou znaménka posloupnosti (1) $— + + —$;
když $a = 0$, jsou znaménka posloupnosti (1) $+ — — —$;
když $a = + \infty$, jsou znaménka posloupnosti (1) $+ + — —$:

Má tedy daná rovnice jediný kořen reálný a to záporný; leží mezi —1 a —2.

Úloha 14. Stanovte Sturmovy mnohočleny pro obecnou rovnici třetího stupně. Ukažte, že tato rovnice má vždy jeden kořen reálný.

[$f(x) = x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$,
$f'(x) \sim x^2 + 2a_1x + a_2$,
$g_2(x) = 2(a_1^2 — a_2)\, x + (a_1a_2 — a_3)$,
$g_3(x) = \mathrm{D} = — 4a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 + 6a_1a_2a_3 — 4a_2^3 — a_3^2 =$
$= 4(a_1^2 — a_2)^3 — (2a_1^3 — 3a_1a_2 + a_3)^2$.]

5.

HORNÍ A DOLNÍ HRANICE REÁLNÝCH KOŘENŮ.

Než přikročíme k vlastnímu řešení rovnic, seznámíme se s některými větami, jež nám umožňují aspoň přibližně stanoviti horní hranici kořenů kladných. Dolní hranice kořenů záporných jest pak dána horní hranicí kořenů kladných rovnice $f(— x) = 0$; dolní hranice kořenů kladných a horní hranice kořenů záporných jest pak dána horní hranicí kořenů kladných rovnice $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, resp. $f\left(— \frac{1}{x}\right) = 0$; proč?

a) Metoda Newtonova. Rovnice, která nemá změn, nemůže míti kořenů kladných. Podaří-li se nám tedy stanoviti číslo a tak, aby koeficienty rovnice

$$f(x+a) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots = 0$$

nevykazovala žádných změn, pak rovnice $f(x) = 0$ jistě nemá žádných kořenů větších než a, t. j. a jest horní hranice kladných kořenů této rovnice.

Prakticky pak postupujeme takto: Je-li dána na př. rovnice

$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - 48 = 0, \qquad (5,1)$$

jest

$$\begin{aligned}
f(a) &= a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 16a - 48, \\
f'(a) &= 5a^4 - 12a^2 - 16a + 16, \\
f''(a) &= 20a^3 - 24a - 16, \\
f'''(a) &= 60a^2 - 24, \\
f^{IV}(a) &= 120a \\
f^{V}(a) &= 120.
\end{aligned}$$

Počneme si všímati mnohočlenů; $f^{V}(a)$, $f^{IV}(a)$, $f'''(a)$; nabývají kladné hodnoty, když $a = 1$, $f''(a)$ jest však záporné; $f''(a)$ se stane kladné pro $a = 2$, avšak ještě $f'(2) > 0$; pro $a = 3$ jest i $f(3) > 0$. Jest tedy $a = 3$ horní hranicí kladných kořenů.

Dolní hranici záporných kořenů nalezneme z rovnice $f(-x) = x^5 - 4x^3 + 8x^2 + 16x + 48 = 0$. Snadno nalezneme $+1$ jako horní hranici kladných kořenů této rovnice a -1 jako dolní hranici záporných kořenů původní rovnice.

b) Metoda Mac Laurinova. Budiž a_i absolutní hodnotou největší záporný koeficient rovnice

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

pak jest

$$\frac{f(x)}{x^n} \geqq a_0 - |a_i| (x^{-1} + x^{-2} + \ldots + x^{-n}) =$$

$$= 1 - |a_i| \frac{x^{-1}(1 - x^{-n})}{1 - x^{-1}} = 1 - |a_i| \frac{1 - x^{-n}}{x - 1},$$

jakmile jest x dostatečně veliké. Dosaďme sem

$$x = 1 + \frac{|a_i|}{a_0};$$

pak jest po snadné úpravě

$$f\left(1 + \frac{|a_i|}{a_0}\right) > a_0.$$

Poněvadž předpokládáme a_0 kladné, jest i levá strana kladné číslo, takže $1 + \frac{|a_i|}{a_0}$ jest horní hranicí kladných kořenů této rovnice.

Pro rovnici (5,1) dříve uvažovanou vychází jako horní hranice kladných kořenů velmi hrubě 49 a jako dolní hranice záporných kořenů —5.

c) Lepší přiblížení dává metoda Lagrangeova. Buď a_r první záporný a a_i nejmenší záporný koeficient dané rovnice; podobně jako dříve jest

$$\frac{f(x)}{x^{n-r+1}} > a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots +$$

$$+ a_{r-1} - |a_i| (x^{-1} + x^{-2} + \ldots + x^{-n+r-1}) =$$

$$= a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} - |a_i| \frac{1 - x^{-n+r-1}}{x - 1}; \qquad \text{(a)}$$

výraz (a) obsahuje členy vesměs kladné až na předposlední, jenž ve spojení s prvním zní $a_0 x^{r-1} - \frac{|a_i|}{x-1}$; je-li $x > 1 + \sqrt[r]{\frac{|a_i|}{a_0}}$, jest $a_0 x^{r-1} > a_0 (x - 1)^{r-1} > \frac{|a_i|}{x-1}$; pak i rozdíl $a_0 x^{r-1} - \frac{|a_i|}{x-1}$ jest kladný. Tudíž $x > 1 + \sqrt[r]{\frac{|a_i|}{a_0}}$ jest horní hranicí kladných kořenů této rovnice.

V našem příkladě (5,1) jest horní hranicí kladných kořenů $1 + \sqrt{48} < 8$, dolní hranicí záporných kořenů $-(1 + \sqrt{4}) = -3$.

d) Ještě lepší hranice poskytuje někdy metoda Tillotova. Budiž a_i absolutní hodnotou největší, a_r první záporný a a_s největší z kladných koeficientů dané rovnice; poněvadž jest

$$a_s x^{r-s-1} > a_s (x-1)^{r-s-1} > \frac{|a_i|}{x-1} \text{ pro } x > 1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}},$$

jest pravá strana nerovniny (a) kladná, takže rovnice $f(x)=0$ nemá větších kořenů než

$$1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}.$$

e) Pojednejme ještě stručně o celistvých a racionálních kořenech rovnice

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

kdež $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou čísla celistvá. Je-li $x = p : q$ kořenem této rovnice, musí po úpravě býti

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n = 0.$$

Předpokládejme, že p, q jsou čísla nesoudělná; poněvadž všechny členy až na poslední jsou dělitelny p, musí býti tímto číslem dělitelno i a_n; z téhož důvodu musí býti dělitelno číslem q také číslo a_0. Tato věta nám může sloužiti k nalezení racionálných kořenů.

Jejím důležitým důsledkem jest tato věta: Je-li $a_0 = 1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ opět čísla celistvá, jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$ buď čísla celistvá, nebo iracionální. Abychom tedy nalezli celistvé kořeny této rovnice (má-li je ovšem), stačí zkoušeti, je-li kořenem rovnice některý z dělitelů (ať kladných či záporných) čísla a_n. Při vyšetřování pak lze užíti různých obratů; na př. je-li $f(x)$ dělitelno $x - p$, jest

$f(x \pm 1)$ dělitelno $(x \mp 1 - p)$ čili $f(\pm 1)$ jest dělitelno $p \mp 1$.

Ukažme postup na zvláštním příkladě:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x + 28 = 0.$$

V úvahu tedy přicházejí čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28$. Prostým slučováním koeficientů této rovnice zjistíme, že ani $+1$ ani -1 není kořenem rovnice. Některým z dříve uvedených pravidel zjistíme horní hranici kořenů nebo možno použíti tohoto obratu, jehož s výhodou i jindy lze užíti:

$$(x^4 - 5x^3) + (2x^2 + x + 28) = 0$$

jakmile $x \geqq 5$; jest tedy horní hranicí kladných kořenů $+5$; dolní hranicí záporných kořenů jest -1. Stačí tedy uvažovati o dělitelích 2, 4.

Avšak $f(1) = 27$ jest dělitelno $2 - 1$, $4 - 1$, $f(-1) = 35$ jest dělitelno $4 + 1$ a nikoliv $2 + 1$, může tedy celistvým kořenem býti pouze $x = 4$. Stačí tedy buďto do rovnice dosaditi $x = 4$, nebo provésti dělení $x - 4$. Taková dělení pak provádíme nejrychleji metodou Hornerovou; zde na př.:

	1	—5	2	1	28
4	1	—1	—2	—7	0

takže

$$(x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x + 28) : (x - 4) = x^3 - x^2 - 2x - 7.$$

Úloha 15. Stanovte horní a dolní hranice reálných kořenů rovnice

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2 + 15x + 20 = 0$$

a nalezněte celistvé kořeny! [Dolní hranice je -1; horní $+5$; celistvý kořen $x_1 = 4$.]

6.

PŘIBLIŽNÉ METODY K ŘEŠENÍ ROVNIC.

a) Již při výkladu o větě Bolzano-Weierstrassově (str. 23) jsme se zmínili o separaci kořenů, t. j. o stanovení intervalů v nichž se nalézá jediný kořen rovnice. Naší snahou jest, tyto intervaly co nejvíce zúžiti; pak kterákoliv hodnota v tomto zúženém intervalu jest přibližnou hodnotou tohoto kořene a může se státi východiskem k přesnějšímu jeho určení. Provedeme řešení na zvláštním příkladě

$$x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Dle věty Descartesovy má tato rovnice buď jeden nebo tři kladné kořeny a jistě jeden a jen jeden kořen záporný, jelikož $f(-x) = 0$ má jen jedinou změnu. Posloupnost Sturmových mnohočlenů zní

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2, \\ g_2(x) &= -x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18, \\ g_3(x) &= -x^3 + 10x^2 - 119, \\ g_4(x) &= 84x^2 - 9x - 176, \\ g_5(x) &= 2267x - 2402, \\ g_6(x) &> 0. \end{aligned}$$

Pořad znamének

$$\begin{array}{lll} \text{pro } x = -\infty & \text{je } + - - + + - + & \text{(4 změny)}, \\ \text{pro } x = 0 & \text{je } - + + - - - + & \text{(3 změny)}, \\ \text{pro } x = \infty & \text{je } + + - - + + + & \text{(2 změny)}; \end{array}$$

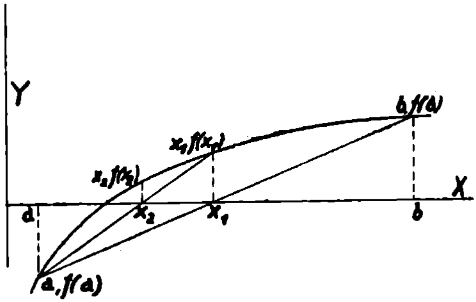
má tedy naše rovnice jeden kořen kladný a jeden záporný, dále dva páry komplexních kořenů.

Horní hranice dle Lagrangeovy metody jest pro kladné kořeny 3, dolní hranice pro kořeny záporné $-1 - \sqrt[5]{12} = -2{,}2$. Dále jest $f(-2) = 136$, $f(-1) = -6$, $f(0) = -8$, $f(1) = 10$; jest tedy záporný kořen mezi -2 a -1 a kladný kořen mezi 0 a 1. Metodou Hornerovou vypočtěme $f(-1{,}5)$:

	1	0	3	−4	6	12	−8
−1,5	1	−1,5	5,25	−11,88	23,82	−23,73	27,59

$f(0{,}5) = -0{,}80$. Tak jsme tedy oba intervaly zúžili na $(-1{,}5; -1)$ a $(0{,}5; 1)$. Vypočtěme ještě $f(-1{,}1) = -2{,}43$, $f(0{,}6) = 0{,}93$; leží tedy kladný kořen v intervalu $(0{,}5; 0{,}6)$; poněvadž $f(-1{,}2) = 2{,}36$, jest záporný kořen mezi $-1{,}1$

a—1,2. Tak bychom mohli pokračovat dále a oba intervaly zužovat a tím oba kořeny lépe a lépe určovat; skutečně se tak někdy i v praxi postupuje. Ale tato metoda jest příliš primitivní a zdlouhavá; proto již dávno byly vymyšleny metody sice složitější, avšak rychleji vedoucí k cíli.



Obr. 1. Metoda regula falsi.

b) Metoda regula falsi (obr. 1). Předpokládejme, že se nám podařilo zjistiti, že v intervalu $(a; b)$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$, takže $f(a)$ a $f(b)$ jsou opačných znamének. Z analytické geometrie jest známo, že závislost $y = f(x)$ určuje jistou křivku, která osu X, jejíž rovnice jest $y = 0$, protíná v bodech, jichž úsečky hoví rovnici $f(x) = 0$. Metoda regula falsi nás učí nahraditi oblouk křivky $y = f(x)$ v intervalu $(a; b)$ sečnou určenou body $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ a místo průsečíku křivky $y = f(x)$ s osou $y = 0$ hledati průsečík této sečny s touže osou. Rovnice sečny zní

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

její průsečík s osou $y = 0$ jest

$$x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}, \qquad (6,1)$$

nebo užije-li čtenář znalý determinantů obvyklého symbolu

$$x = \begin{vmatrix} a, & b \\ f(a), & f(b) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ f(a), & f(b) \end{vmatrix}.$$

1. Řešme tuto úlohu: S bodu ležícího na povrchu koule jako středu jest sestrojiti kouli o takovém poloměru, aby objem čočkovitého útvaru tak vzniklého byl roven polovině objemu dané koule.

Značíme-li a poloměr kružnice oběma kulovým úsečím společné, v_1 výšku úseče na kouli o poloměru 1, v_2 pak výšku úseče na kouli o poloměru ϱ, jest dle úlohy

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 v_1 + \tfrac{1}{6}\pi v_1{}^3 + \tfrac{1}{2}\pi a^2 v_2 + \tfrac{1}{6}\pi v_2{}^3 = \tfrac{2}{3}\pi;$$

z jednoduché planimetrické úvahy plyne

$$v_1 = \tfrac{1}{2}\varrho^2, \quad v_2 = \varrho - \tfrac{1}{2}\varrho^2, \quad a^2 = \varrho^2 - \tfrac{1}{4}\varrho^2,$$

po dosazení a zjednodušení dospíváme k jednoduché rovnici 4. stupně

$$3\varrho^4 - 8\varrho^3 + 8 = 0,$$

kterou budeme řešiti přibližně. Pro tuto rovnici jsme již v předchozím odstavci (viz str. 34) stanovili Sturmovy mnohočleny

$$f'(\varrho) = \varrho^3 - 2\varrho^2,\ g_2(\varrho) = \varrho^2 - 2,\ g_3(\varrho) = -\varrho + 2,\ g_4(\varrho) - 2.$$

Znaménka pak následují takto:

Pro $\varrho = 0$ jsou znaménka mnohočl. $+ \; 0 \; - \; + \; -$ (3 změny),
pro $\varrho = 1$ jsou znaménka mnohočl. $+ \; - \; - \; + \; -$ (3 změny),
pro $\varrho = 2$ jsou znaménka mnohočl. $- \; 0 \; + \; 0 \; -$ (2 změny),
pro $\varrho = 3$ jsou znaménka mnohočl. $+ \; + \; + \; - \; -$ (1 změna);

má tedy naše rovnice po jednom kořenu v intervalech (1; 2), (2; 3), úloze však hoví pouze kořen první. Položme $a = 1$, $b = 2$, pak $f(a) = 3$, $f(b) = -8$ a vzorec (6,1) dává

$$x_1 = 1{,}3;\ f(1{,}3) = -0{,}52.$$

Užijeme-li téhož vzorce pro hodnoty $a = 1$, $b = 1{,}3$, obdržíme

$$x_2 = 1{,}23 \text{ a } f(1{,}23) = -0{,}0204;$$

hodnoty 1 a 1,23 dají

$$x_3 = 1{,}2284 \text{ a } f(1{,}2284) = -0{,}008.$$

Lze se však obejíti bez vzorce (6,1) a to po této úvaze: Nahrazujíce oblouk přímkou, nahrazujeme vlastně přímou úměrností závislost mezi přírůstkem neznámé hodnoty kořene a výsledkem substituce přibližné hodnoty do rovnicového mnohočlenu, tedy závislost mnohem složitější. Jest to týž obrat, kterého užíváme počítajíce logaritmy pětimístných čísel z logaritmů čísel čtyrmístných; i zde předpokládáme, že na př. změna logaritmů čísel ležících mezi 12,34 a 12,35 děje se přímo úměrně k tisícinám těchto čísel. Postup tento sluje lineární interpolace a lze ho vydatně užíti k řešení numerických rovnic. Vyložíme jej na snadném příkladě. Jest řešiti rovnici

$$x^3 + 8x - 10 = 0;$$

poněvadž $f(1) = -1$, $f(2) = 14$, leží kořen mezi 1 a 2. Napišme si toto schema

$$\begin{aligned} x &= 1, & f(x) &= -1, \\ x &= 1 + \varepsilon, & f(x) &= 0, \\ x &= 2, & f(x) &= 14; \end{aligned}$$

stoupne-li přibližná hodnota kořene o 1, stoupne výsledek dosazení, t. j. $f(x)$ o 15, musí tedy stoupnouti o ε, aby vzrostla hodnota $f(x)$ o 1, t. j. na nulu. Regula falsi nebo vlastně lineární interpolace činí nyní předpoklad, že tyto vzrůsty hodnot $f(x)$, které se mohou státi i o čísla záporná, jsou přímo úměrné vzrůstům hodnot x; jest to předpoklad pravdě tím bližší, čím interval daný oběma přibližnými hodnotami je užší. V našem případě jest $\varepsilon : 1 = 1 : 15$, takže $\varepsilon = 0{,}07$. Jest tedy $x_1 = 1{,}07$, $f(1{,}07) = -0{,}21$.

Napišme si opět schema:

$$\begin{aligned} x &= 1{,}07, & f(x) &= -0{,}21, \\ x &= 1{,}07 + \varepsilon, & f(x) &= 0, \\ x &= 2, & f(x) &= 14; \end{aligned}$$

z něho vyplývá úměra

$$\varepsilon : 0,93 = 0,21 : 14,21,$$

odtud $\varepsilon = 0,014$ a pak

$$x_2 = 1,084, \quad f(1,084) = -0,054.$$

Opakujíce tento postup pro přibližné hodnoty 1,084 a 2, obdržíme

$$\varepsilon = 0,0032, \quad x_3 = 1,0872, \quad f(1,0872) = -0,018.$$

Můžeme však pokračovati i extrapolací.

Při interpolaci usuzujeme na průběh funkce uvnitř intervalu z hodnot, jakých nabývá na hranicích tohoto intervalu; při extrapolaci pak soudíme na průběh funkčních hodnot mimo tento interval rovněž z těchto hodnot. Jest tedy na snadě, že tento odhad bývá zatížen větší chybou než při interpolaci. V našem případě: $x_3 = 1,0872$ vzrostlo z $x_2 = 1,0840$ o 0,0032 a zároveň výsledek vzrostl o 0,036; lze tedy očekávati, vzroste-li x_3 o 0,0016 na hodnotu $x_4 = 1,0888$, že výsledek substituce se bude velmi blížiti nule; skutečně jest $f(1,088) = 0,0012$.

Této metody se užívá zejména při řešení některých úloh finanční aritmetiky. Uvedeme jednoduchý příklad. Dluh ve výši 100000 K byl umořen při dekursivním úročení 40 splátkami ve výši K 5000,— splatnými vždy ke konci každého roku; která byla úroková míra? Úlohu řeší rovnice

$$100000 = \frac{5000}{r} + \frac{5000}{r^2} + \cdots + \frac{5000}{r^{40}},$$

při čemž $r = 1 + i$, $i = \frac{p}{100}$, p jest úroková míra. Zbavíme-li se zlomků, jest nám co činiti s rovnicí 40. stupně, kterou lze různě upraviti; sečteme-li však v původní rovnici se vyskytující geometrickou řadu, obdržíme

$$100000 = 5000 \frac{(r^{40} - 1)}{r^{40}(r - 1)},$$

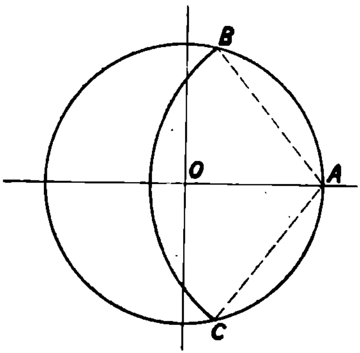
což představuje vlastně rovnici 41. stupně (má o kořen 1 více než rovnice předchozí). Čísla

$$\frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)}$$

značí se $a_{\overline{n|}}^{i}$ a jsou sestavena v tabulky, kterých užijeme k řešení rovnice $a_{\overline{40|}}^{i} = 20$. V tabulkách nalezneme pro $n = 40$ číslo nejblíže nižší a nejblíže vyšší k 20 a sestavíme si toto schema

$$\begin{aligned} a_{\overline{40|}}^{0,0375} &= 20{,}551, \\ a_{\overline{40|}}^{i} &= 20, \\ a_{\overline{40|}}^{0,04} &= 19{,}793, \end{aligned}$$

odtud odvodíme úměru $\varepsilon : 0{,}25 = 551 : 758$ a z ní $\varepsilon = 0{,}18$, takže přibližná hodnota pro úrokovou míru jest 3,93 %.



Obr. 2. Kruh rozpůlený kružnicí o středu A.

I při řešení rovnic transcendentních lze této metody užíti. Jest dána kružnice o poloměru 1, s bodu na jejím obvodě jako středu jest opsána kružnice o poloměru ϱ: je stanoviti ϱ tak, aby společná plocha obou kruhů měla obsah rovný polovině obsahu prvního kruhu.

Budiž $\overline{OA} = 1$, $\overline{AB} = \varrho$, $\sphericalangle CAB = \varphi$, pak $\varrho = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi$ (obr. 2). Společná plocha je složena ze dvou úsečí, z nichž první, patřící k prvnímu kruhu, má obsah

$$\tfrac{1}{2}(2\pi - 2\varphi) \cdot 1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\varphi = \pi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi,$$

druhá úseč pak má obsah

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \sin \varphi = 2\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin \varphi,$$

takže jest

$$\pi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \varphi - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin \varphi = \tfrac{1}{2}\pi$$

čili

$$\sin \varphi \, (\cos \varphi - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi) - \varphi \, (1 - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi) = -\tfrac{1}{2}\pi$$

a posléze

$$\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Volme $a = \frac{2}{3}\pi$, $b = \frac{1}{2}\pi$ pak

$$f(\tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{6}\pi = 0{,}342, \quad f(\tfrac{1}{2}\pi) = 1 - \tfrac{1}{2}\pi = -0{,}571;$$

z úměry $\varepsilon : \frac{1}{6}\pi = 0{,}342 : 0{,}913$ vypočteme $\varepsilon = 0{,}062\pi$, takže

$$\varphi_1 = \tfrac{2}{3}\pi - 0{,}062\pi = 0{,}605\pi = 120° - 11{,}16° =$$
$$= 108{,}84° = 108°\,50', \quad f(\varphi_1) = -0{,}01.$$

Opakováním tohoto postupu pětimístnými tabulkami konečně vypočteme $\varphi = 109°\,11'\,20''$, $\varrho \doteq 1{,}158$. 7 2

c) Avšak oblouk křivky $y = f(x)$ lze nahraditi ještě jinou přímkou a to tečnou vedenou v některém bodě udaném přibližnou hodnotou hledaného kořene. Směrnice tečny v bodě $(x_1; y_1)$ jest $f'(x_1)$, tečna pak

$$y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$$

a její průsečík s osou x, udávající případně lepší hodnotu kořene, jest

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (6,2)$$

S pomocí x_2 počítáme

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ atd.}$$

Řešme na př. rovnici

$$f(x) = x^5 + 8x^3 - 10 = 0;$$

pak volme $x = 1$

$$f'(x) = 5x^4 + 24x^2,$$

potom $f(1) = -1$, $f'(1) = 29$ a

$$x_2 = 1 + \tfrac{1}{29} = 1{,}035, \quad f(1{,}035) = 0{,}0575;$$

s pomocí hodnoty $f'(1{,}035) = 31{,}42$ vypočteme

$$x_3 = 1{,}035 - 0{,}0018 = 1{,}0332, \quad f'(1{,}032) = 0{,}0005.$$

Podobně postupujeme i při rovnicích transcendentních, tu ovšem nutno znáti derivace i funkcí jiných než racionálních celistvých. Mějme na př. tuto úlohu: Kruh o poloměru 1 jest rozděliti sečnou ve dvě úseče v poměru 1 : 2.

Menší úseč má tedy obsah rovný třetině daného kruhu, takže lze psáti

$$\frac{\pi \cdot 1^2 \cdot \varphi}{360} - \frac{1^2 \sin\varphi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

a v míře obloukové

$$\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi = \tfrac{1}{3}\pi$$

čili

$$f(\varphi) = \varphi - \sin\varphi - \tfrac{2}{3}\pi = 0.$$

Je však: $f(\pi) > 0$, $f(\frac{2}{3}\pi) < 0$, volme

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\pi + \tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{5}{6}\pi,$$

pak

$$f(\tfrac{5}{6}\pi) = \tfrac{5}{6}\pi - \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3}\pi = 0{,}0236,$$

$$f'(\varphi) = 1 - \cos\varphi, \quad f'(\tfrac{5}{6}\pi) = 1 - \cos\tfrac{5}{6}\pi = 1{,}8660,$$

takže

$$\varphi_2 = \tfrac{5}{6}\pi - \frac{0{,}0236}{1{,}8660} = \tfrac{5}{6}\pi - 0{,}013 = 2{,}605$$

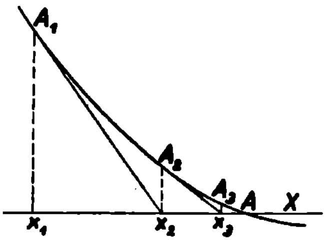
čili ve stupních $\varphi_2 = 149° \, 15'$, $f(\varphi_2) = -0{,}0007$. Značíme-li U_1 obsah menší a U_2 obsah větší úseče, jest

$$U_1 = \tfrac{1}{3}\pi - 0{,}00035, \quad U_2 = \tfrac{2}{3}\pi + 0{,}00035$$

a

$$U_1 : U_2 = 0{,}4996.$$

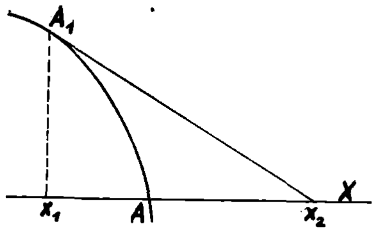
Nutno však poznamenati, že někdy hodnota x_1 určená s pomocí tečny jest od hledaného kořene vzdálenější, že tedy Newtonova metoda nevede k cíli. Vyšetřiti, jaké vlastnosti křivka $y = f(x)$ v okolí svého průsečíku s osou X musí míti, aby tomu tak nebylo, přesahuje rámec tohoto spisku.*)



Obr. 3. Metoda Newtonova.

Zde uvádíme jen výsledky: Metoda Newtonova dává postupně lepší a lepší přibližné hodnoty kořenu ξ rovnice $f(x) = 0$, když v intervalu $(x_1; \xi)$ resp. v intervalu $(\xi; x_1)$ nestává se ani $f'(x)$ ani $f''(x)$ rovno nule (čili křivka $y = f(x)$ nemá v tomto intervalu ani vrcholu ani inflexního bodu) a když $f(x_1)$ a $f''(x_1)$ jest téhož znamení. (Připojeny jsou obrazce 3 a 4; první z nich znázorňuje případ, kdy metoda Newtonova k cíli vede, druhý pak, kdy tato metoda selhává.)

*) Viz na př. Láska-Hruška: Teorie a praxe numerického počítání, str. 270.



Obr. 4. Případ, kdy metoda Newtonova nevede k cíli.

Úlohy: Řešte metodou regula falsi nebo Newtonovou tyto rovnice:

16. $x^3 - 2x - 5 = 0$. [2,09455]
17. $x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 51x^2 + 94x - 110 = 0$.
[4,980; — 4,016, 6,070; — 1,952; 0,918]
18. $x^5 - 4x - 2 = 0$. [1,519, — 0,508; — 1,244,
0,1117 $\pm$ i 0,349]
19. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$. [1,7633, — 2,198]
20. $x \log x - 1 = 0$. (Zde regula falsi jest výhodnější, proč?)
[2,5062]
21. $\sin x - x \cos x = 0$. [4,4934]
22. $x^x = 100$. [$x = 3{,}59729$]
23. $x^{(x^x)} = 2$. [$x = 1{,}47668$]
24. $2^x + 3^x = 4^x$. [$x = 0{,}73909$]

25. Čtenář znalý hyperbolických funkcí nechť se pokusí o řešení rovnic

$$x \operatorname{tgh} x - 1 = 0. \ [1{,}9997]$$
$$\operatorname{tgh} x \,.\, \operatorname{tgh} x = 1. \ [0{,}9375;\ 3{,}9274;\ 7{,}0686]$$

26. Ležatý válcový kotel o objemu 1500 l jest naplněn 900 l vody; jak stojí voda vysoko?

[$x - \sin x = \frac{4}{5}\pi$, $x = 2{,}8248$ t. j. 161° 51′
$v = r\,(1 + \cos \frac{1}{2}x) = 1{,}1518r$]

27. Ukažte, má-li rovnice

$$a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0$$

jediný kořen blízký nule, že jeho přibližná hodnota jest $- a_n : a_{n-1}$. [Metodou Newtonovou].

28. S bodu na obvodu kružnice o poloměru 1 jest opsati kružnici o poloměru ϱ tak, aby obsah společné plochy oběma kruhům byl k-kráte větší než obsah daného kruhu. Ukažte vycházejíce z přibližné hodnoty $\varphi_1 = \pi(1 - k)$ pro středový úhel společné úseče užitím metody Newtonovy, že lepší hodnotou jest

$$\pi(1 - k) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}k\pi - \frac{1}{\pi(1 - k)}.$$

$$[\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - (1 - k)\,\pi = 0]$$

d) Metoda iterační. Při této metodě postupujeme takto: Levou stranu dané rovnice $f(x) = 0$ rozdělíme vhodně ve dva sčítance $f_1(x) + f_2(x)$, takže obdržíme rovnici $f_1(x) = - f_2(x)$. To znamená, že výpočet úsečky průsečíku křivky $y = f(x)$ s osou X nahrazujeme výpočtem úseček průsečíků křivek $y = f_1(x)$, $y = - f_2(x)$. Abychom mohli počítati s úspěchem, nutno voliti $f_1(x)$, $f_2(x)$ tak, aby v okolí hledaného kořene bylo $|f'_1(x_1)| > |f'_2(x_1)|$, $f'_1(x_1) \neq 0$.*) Vyjdeme nyní z hodnoty x_1 a řešíme postupně rovnice

$$f_1(x_2) = - f_2(x_1),$$
$$f_1(x_3) = - f_2(x_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_1(x_r) = - f_2(x_{r-1});$$

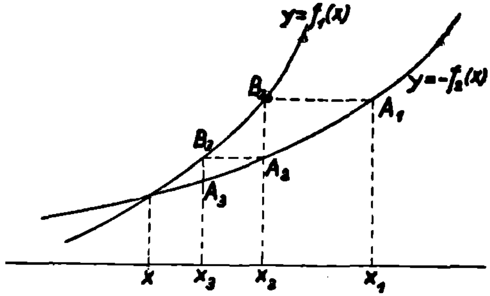
výpočet skončíme, když x_r a x_{r-1} se od sebe velmi málo liší.

Jak se jeví geometricky tato aproximace, je patrno z obr. 5 a 6.

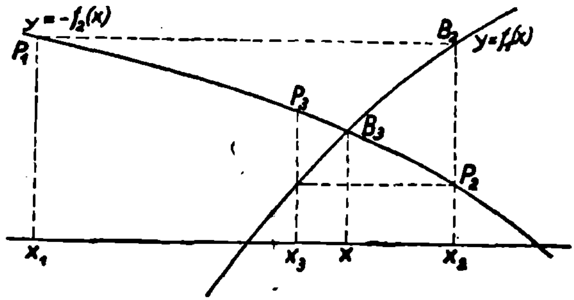
První z těchto obrázků vystihuje případ, kdy $f'_1(x)$ i $- f'_2(x)$ v uvažovaném okolí kořenu mají kladná znaménka (tečny svírají s kladným směrem osy X ostré úhly). V tomto případě se blížíme ke kořenu týmž směrem, pouze s jedné strany; podobně tomu jest, když $f'_1(x)$ a $- f'_2(x)$ jsou obě znaménka záporného (tečny svírají s kladným směrem osy X úhly tupé). Druhý případ nastává, když $f'_1(x)$ a $- f'_2(x)$ jsou znamének opačných (jedna tečna s kladným směrem osy X svírá úhel ostrý, druhá tupý). Tento případ jest pro

*) Viz též **Láska-Hruška**, l. c., str. 277.

výpočet výhodnější, poněvadž k hledanému kořenu se blížíme oboustranně, t. j. interval, v němž jest hledaný kořen,



Obr. 5. Určení kořenu metodou iterační v případě
$f'_1(x) > 0, \quad -f'_2(x) > 0.$



Obr. 6. Postup při iterační metodě v případě
$f'_1(x) > 0, \quad -f'_2(x) < 0.$

se ustavičně zmenšuje, takže za lepší přibližnou hodnotu smíme vzíti kteroukoliv hodnotu z tohoto intervalu, na př. aritmetický střed obou krajních hodnot, nebo ji ještě přesněji metodou regula falsi, nebo Newtonovou!

Iteracemi lze dobře řešiti *rovnice trinomické*;*) jsou to rovnice tvaru

$$x^{m+n} + ax^m + b = 0,$$

kdež m, n jsou čísla celistvá, kladná. Řešme na př. rovnici

$$f(x) = x^5 + 6x - 10 = 0$$

a pišme ji ve tvaru

$$x = \sqrt[5]{10 - 6x}.$$

Derivace levé strany jest 1, pravé pak $-\frac{6}{5}(10 - 6x)^{-\frac{4}{5}}$, jsou tedy různých znamének; dále jest v okolí $x_1 = 1$ absolutní hodnota derivace strany pravé menší než absolutní hodnota derivace strany levé.

Postupné aproximace jsou:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_5 &= 1{,}217, \\ x_2 &= 1{,}32, & x_6 &= 1{,}226, \\ x_3 &= 1{,}156, & x_7 &= 1{,}218, \\ x_4 &= 1{,}247, & x_8 &= 1{,}219. \end{aligned}$$

Poněvadž $f(x_7) = -0{,}011$, $f(x_8) = 0{,}006$, lze užíti regula falsi; dostaneme

$$x_9 = 1{,}2187, \; f(x_9) = 0{,}00054.$$

Řešme iteracemi rovnici

$$x^x = 10.$$

Přepišme rovnici do tvaru

$$f(x) = x \log x - 1 = 0 \text{ čili } \log x = \frac{1}{x}.$$

Regula falsi pro $x = 2$ a $x = 3$ dává přibližně

$$x_1 = 2{,}25;$$

derivace levé strany jest v okolí x_1 kladná, derivace pravé strany je záporná.

*) Obsáhlý výklad o nich viz Láska-Hruška, l. c. str. 230.

Nyní jest

$$\log x_2 = \frac{1}{2,25} = 0,44444, \quad x_2 = 2,\cancel{7}782;$$

volme nyní

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,516, \quad \log x_4 = \frac{1}{2,516} = 0,3975, \quad x_4 = 2,497.$$

Poněvadž jest $f(x_3) = 0,0076$, $f(x_4) = -0,0144$, vypočteme dle regula falsi

$$x_5 = 2,5029;$$

další iterace dá:

$$\log x_6 = \frac{1}{x_5} = 0,39954, \quad x_6 = 2,5095.$$

Aritmetický střed x_5 a x_6 dává

$$x_7 = 2,5062, \quad f(x_7) = 0,00001.$$

V praxi jsou nejčastější tvary

$$x = \varphi(x);$$

pak podmínka, za které lze iterace užíti, jest

$$|\varphi'(x_1)| < 1.$$

Úlohy: **29.** Řešte iteracemi rovnici $e^{-z} = 1 - \frac{1}{5}z$.

[Zaveďte substituci $z = 5 - x$ a vyjděte od hodnoty $x = 0,1$; čtvrtá iterace dává $x_4 = 0,0349$, pátá pak tutéž veličinu.]

30. Řešte iteracemi rovnici

$$\frac{\cosh 2x - 1}{2x^2} - 1,621 (\cosh x - 1) - 0,111 = 0$$

píšíce ji ve tvaru $1,621 (\cosh x - 1) = \frac{\cosh 2x - 1}{2x^2} - 0,111$ a vycházejíce z hodnoty $x_1 = 1,390$.

[$x_2 = 1,470$, $x_3 = 1,456$, $x_4 = 1,462$, $f(1,462) = -0,0031$; viz autorovu stať Exaktní výpočet vedení na velikých rozpětích; Elektrotechnický Obzor, 1934, seš. 23.]

31. Ukažte, že kvadratickou rovnici

$$x^2 + px + q = 0$$

lze řešiti iterací

$$x_\nu = -p - \frac{q}{x_{\nu-1}};$$

má-li rovnice kořeny reálné různé, dospíváme tak k hodnotě většího kořene.

82. Metoda Newtonova jest vlastně iterací; která jest podmínka, kdy jest jí možno užíti?

$$[|f(x_1) \cdot f''(x_1)| < f_1^2(x_1)]$$

e) K výpočtu reálných kořenů slouží ještě jiné metody, z nichž stručně popíšeme ještě Bernoulliovu (Graeffeovu) a Lagrangeovu.

Metoda Bernoulliova. Především nutno se zmíniti, jak lze součet týchž mocnin všech kořenů dané rovnice vyjádřiti pomocí koeficientů této rovnice (Schwarz, str. 39).

Budiž dána rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0,$$

její kořeny buďtež $x_1, x_2, \ldots, x_n$; nezáleží na tom, jsou-li vesměs různé a reálné. Platí o nich

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$
$$a_0x_2^n + a_1x_2^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0x_n^n + a_2x_n^{n-1} + \ldots + a_0 = 0;$$

sečteme-li tyto rovnice a píšeme-li

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k = s_k,$$
$$x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \ldots + x_n^0 = s_0 = n,$$

obdržíme

$$a_0s_n + a_1s_{n-1} + \ldots + a_ns_0 = 0.$$

Násobíme-li předchozí soustavu rovnic postupně x_1^ν, $x_2^\nu, \ldots, x_n^\nu$, kdež ν jest číslo celistvé kladné, obdržíme vzorec obecnější

$$a_0s_{n+\nu} + a_1s_{n+\nu-1} + \ldots + a_0s_\nu = 0,$$

platný pro všechna celistvá kladná ν. O součtech $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ pak platí vztahy

$$S_1 \equiv a_0 s_1 + a_1 = 0,$$
$$S_2 \equiv a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0,$$
$$S_3 \equiv a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{n-1} \equiv a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \ldots + (n-1)\, a_{n-1} = 0.$$

O správnosti těchto rovnic se přesvědčíme úplnou indukcí. Připusťme, že tyto vztahy platí pro všechny rovnice stupně n, a zabývejme se rovnicí

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\,(x - x_{n+1}) =$$
$$= a_0 x^{n+1} + (a_1 - a_0 x_{n+1})\, x^n + (a_2 - a_1 x_{n+1})\, x^{n-1} +$$
$$+ \ldots + (a_n - a_{n-1}\, x_{n+1})\, x - a_n x_{n+1} =$$
$$= a_0 x^{n+1} + \bar{a}_1 x^n + \ldots + \bar{a}_n\, x + \bar{a}_{n+1} = 0, \;\; x_{n+1} \neq 0.$$

Budiž $0 < k < n - 1$ a značme

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k + x_{n+1}^k = s_k + x_{n+1}^k = \bar{s}_k$$

a vypočtěme, čemu se rovná výraz

$$\bar{S}_\nu \equiv a_0 \bar{s}_\nu + \bar{a}_1 \bar{s}_{\nu-1} + \bar{a}_2 \bar{s}_{\nu-2} + \ldots + \nu \bar{a}_\nu, \;\; 1 \leqq \nu \leqq n - 1.$$

Dosaďme do levé strany za $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_\nu$; $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_\nu$; snadno vypočteme, že

$$\bar{S}_\nu \equiv a_0 S_\nu - x_{n+1}\, S_{\nu-1} = 0.$$

Proveďme tento výpočet podrobněji pro $\nu = n$. I jest

$$\bar{S}_n = a_0 \bar{s}_n + \bar{a}_1 \bar{s}_{n-1} + \bar{a}_2 \bar{s}_{n-2} + \ldots + n\bar{a}_n =$$
$$= a_0\,(s_n + x_{n+1}^n) + (a_1 - a_0 x_{n+1})\,(s_{n-1} + x_{n+1}^{n-1}) +$$
$$+ (a_2 - a_1 x_{n+1})\,(s_{n-2} + x_{n+1}^{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_n - a_{n-1}\, x_{n+1})\,(s_0 + x_{n+1}^0) - n a_n\, x_{n+1} =$$
$$= (a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_n s_0) +$$
$$+ (a_0 x_{n+1}^n + a_1 x_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_n x_{n+1}) -$$
$$- x_{n+1}\,(a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, s_0) -$$
$$- x_{n+1}\,(a_0 x_{n+1}^{n-1} + a_1 x_{n+1}^{n-2} + \ldots + a_n) - n a_n\, x_{n+1};$$

avšak výraz v první závorce jest identicky roven 0, výrazy v druhé a čtvrté závorce se ruší; zbývající členy lze psáti ve tvaru

$$-x_{n+1}(a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \dots + a_{n-1} s_0 + n a_n),$$

což jest identicky rovno nule. Případ $x_{n+1} = 0$ jest velmi jednoduchý.

Platí-li tedy ona soustava rovnic pro n, platí i pro $n + 1$. Že platí pro $n = 2$, t. j. pro kvadratickou rovnici

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

jest zřejmo ze známého vztahu

$$a_0(x_1 + x_2) + a_1 = 0,$$

že platí pro $n = 3$, zjistíme přímým výpočtem:

$$a_0 s_1 + a_1 = 0, \quad a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0.$$

Platí tedy soustava i pro $n = 3$ atd. a platí obecně.

Mějž nyní daná rovnice pouze reálné kořeny, o nichž platí

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > |x_n|$$

a budiž nad to ještě $|x_1|$ značně větší $|x_2|$.

Podíl

$$\frac{s_{m+1}}{s_m} = \frac{x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \dots + x_n^{m+1}}{x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m}$$

lze psáti též ve tvaru

$$\frac{s_{m+1}}{s_m} = x_1 \frac{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m+1} + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{m+1}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^m}$$

a poněvadž za našich předpokladů se sčítanci v čitateli i jmenovateli — druhým počínajíc — pro velká m blíží k nule, lze psáti

$$\frac{s_{m+1}}{s_m} \longrightarrow x_1.$$

Podobně jest

$$\sqrt[m]{s_m} = x_1 \sqrt[m]{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^m},$$

což se pro velká m blíží k x_1. Píšeme

$$\sqrt[m]{s_m} \longrightarrow x_1.$$

Řešme tímto způsobem rovnici

$$x^3 - 19x - 30 = 0;$$

výsledky jsou uvedeny v této tabulce:

m	s_m	$s_{m+1} : s_m$	$\sqrt[m]{s_m}$
2	38	2,4	
3	90	8	
4	722	4	
5	2 850	6	
6	16 418	4,6	5,04
7	75 810	5,2	4,98
8	397 442	4,7	5,02
9	1 932 930	5,1	4,994
10	9 825 698		5,003

při čemž s_m počítáme podle vzorce $s_m = 19s_{m-2} + 30s_{m-3}$, $m \geqq 3$. Skutečně daná rovnice má kořen 5.

Nejmenší kořen rovnice mající jen reálné kořeny pak určíme, hledáme-li největší kořen rovnice $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Základní myšlenka této metody byla různým způsobem pozměněna a zdokonalena; na př. astronom Encke upravil ji tak, že lze nalézti i ostatní reálné kořeny; rovněž tuto metodu lze upraviti i pro vyhledávání kořenů komplexních.*)

*) Viz: Láska-Hruška, l. c. str. 290 a n.

f) Vyložíme nyní na zvláštním případě metodu Lagrangeovu.

Nejdříve si řekněme něco o řetězových zlomcích; začneme opět příkladem.

Zlomek $\frac{17}{29}$ lze psáti postupně takto

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{29:17} = \frac{1}{1+\frac{12}{17}},$$

poněvadž

$$\frac{12}{17} = \frac{1}{17:12} = \frac{1}{1+\frac{5}{12}}$$

a dále

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{12:5} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}}$$

a podobně

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}};$$

lze tedy psáti

$$\frac{17}{29} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

Výraz vpravo sluje řetězovým zlomkem nebo prostě řetězcem čísla $\frac{17}{29}$; velmi často se prostě píše

$$\frac{17}{29} = (1, 1, 2, 2, 2),$$

při tom čísla uvedená v závorce slují částeční jmenovatelé. Je-li dáno číslo řetězcem o několika málo částečných jmenovatelích, vypočteme toto číslo postupnými úpravami; na př.

$$n = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{12+1}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{13}{2 \,.\, 13 + 4}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{13}{30}} = \frac{30}{43}.$$

V mnohých otázkách vyšší algebry i analyse hrají důležitou úlohu řetězce mající nekonečně mnoho částečných jmenovatelů.

Nyní se obrátíme k vlastní metodě. Jest řešiti rovnici

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Tato rovnice má jediný kladný kořen mezi 0 a 1; položme $x = \dfrac{1}{x_1}$, rovnice přejde ve tvar

$$2x_1^3 - 5x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0$$

a má jediný kladný kořen mezi 1 a 2, takže lze psáti $x_1 = 1 + \dfrac{1}{x_2}$. Po dosazení do poslední rovnice a po úpravách máme

$$x_2^3 + x_2^2 - x_2 - 2 = 0.$$

Tato rovnice má opět kořen mezi 1 a 2, t. j. $x_2 = 1 + \dfrac{1}{x_3}$, což vede k rovnici

$$x_3^3 - 4x_3^2 - 4x_3 - 1 = 0,$$

mající kořen mezi 4 a 5; proto $x_3 = 4 + \dfrac{1}{x_4}$. Další pomocné rovnice znějí

$$17x_4^3 - 12x_4^2 - 8x_4 - 1 = 0, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{x_5},$$

$$4x_5^3 - 19x_5^2 - 39x_5 - 17 = 0, \quad x_5 = 6 + \frac{1}{x_6}.$$

Výsledek lze psáti ve tvaru řetězového zlomku:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + x_6}}}}} = (1, 1, 4, 1, 6, \ldots).$$

Vynecháme-li x_6, obdržíme postupnou úpravou $x = \frac{41}{75} = 0{,}5467$. [$f\,(0{,}5467) = -0{,}00002$]

g) Velmi užitečným doplňkem našich úvah by byly výklady, kolik jest komplexních kořenů dané rovnice obsaženo v dvojrozměrné oblasti, na př. ve čtverci nebo v kruhu o středu (0; 0) a poloměru r, jakož i nauka o separaci těchto kořenů, na př. dle reálné části, a o přibližných metodách pro určení těchto kořenů. Avšak k tomu jest potřeba znáti některé věty z teorie funkcí komplexních i algebry, jichž znalost u čtenáře sbírky Cesta k vědění nelze předpokládati; čtenář nechť se obrátí na př. ke knize zde již častěji citované Láska-Hruška, str. 248 a n. — Nebylo by správno se domnívati, že praxe nepotřebuje znáti komplexních kořenů; švýcarský matematik Hurwitz na př. na přání vynikajícího konstruktéra parních turbin Stodoly vyšetřil podmínky, aby kořeny rovnice sudého stupně měly zápornou reálnou část. Stodola těchto výsledků s úspěchem použil při stavbě turbin v Davosu.

Jisté nesnáze působí rovnice mající t. zv. shluk kořenů, t. j. mají dva i více kořenů od sebe velmi málo vzdálených. Takovou rovnicí jest na př. rovnice

$$Ar^{n+1} - (A + 1)\, r^n + 1 = 0,$$

řešící některé úlohy finanční aritmetiky (viz odst. 6b). Tato rovnice má jeden kořen 1 a druhý o několik málo setin větší; jinou rovnici tohoto druhu udal Mehmke

$$x^{11} + x^7 - x^3 + 0{,}692x - 0{,}232 = 0;$$

tato má tři kořeny, jichž přibližné hodnoty jsou

$$x_1 = 0{,}564, \;\; x_2 = 0{,}569, \;\; x_3 = 0{,}437.$$

Pro řešení těchto rovnic podal Lerch zvláštní metodu založenou na inversi řad.*)

Úloha 33. V které rovnici stupně čtvrtého jest $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $s_4 = 4$? $\left[x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{3!} - \frac{1}{4!} = 0\right]$.

SOUSTAVY ROVNIC O NĚKOLIKA NEZNÁMÝCH.

7.

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH ROVNIC.

S řešením systému dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

nebo tří takových rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

— případně i více rovnic — za předpokladu, že tato soustava vede k jedinému konečnému řešení, setkal se čtenář již na nižší střední škole a ví ze zkušenosti, že výpočet neznámých neposkytuje žádných zvláštních obtíží, jsou-li koeficienty i absolutní členy celistvá a malá čísla; nesnáze však vzrůstají s počtem neznámých a s koeficienty vyjádřenými čísly vícemístnými. Tu jest dobře užíti jistých schemat; velmi výhodné uspořádání doprovázené jednoduchou kontrolou pochází od Gausse.

Uvažujme pro jednoduchost o prvních dvou rovnicích poslední soustavy. Součet koeficientů a absolutního členu

*) Viz Časopis pro pěstov. matematiky a fysiky, roč. 46, str. 225, 377.