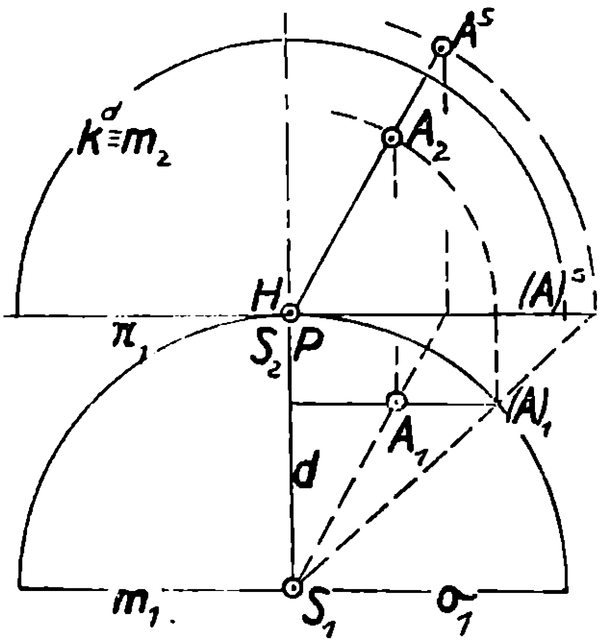
bodem H je rovnoběžna s A^sB^s. V obrazci zvolen průměr $AB \perp \pi$ a proto příslušný úběžník je na distanční kružnici k^d; je to t. zv. dolní *distančník* D^d. Podél hlavní kružnice m se dotýká koule válcová rotační plocha kolmá k průmětně π a proto její tvořící přímky mají úběžník v hlavním bodě H. Obrysové přímky této válcové plochy mají tudíž středové průměty v tečnách ke kružnici m^s vedených z hlavního bodu H, jejichž dotykové body T^s, ${}^1T^s$ s kružnicí m^s jsou též na poláře h^s hlavního bodu H k této kružnici m^s. Tyto tečny HT^s, H^1T^s jsou též tečnami obrysu o^s a sice dotýkají se jej také v bodech T^s, ${}^1T^s$ jako kružnice m^s, ježto v bodech kružnice m má válcová plocha s kulovou plochou tytéž tečné roviny, jež v bodech T, ${}^1T$ jdou středem promítání S. Přímka h^s je též polárou hlavního bodu H k obrysu o^s a proto protíná hlavní osu ${}^1U^sU^sH$ v sdruženém bodě H' k bodu H a proto $\overline{C^sM} = \overline{C^{s1}M} = \sqrt{\overline{C^sH} \cdot \overline{C^sH'}}$. K omezení hlavní osy ${}^1MM$ obrysu o^s mohli bychom též užíti tečen HT^s, H^1T^s, ježto známe ohniska U^s, ${}^1U^s$, ale předchozí konstrukci třeba dáti přednost ježto lze jí užíti vždy, i když hlavní bod H padne dovnitř kružnice m^s.

3. GNÓMONICKÝ A STEREOGRAFICKÝ PRŮMĚT KULOVÉ PLOCHY

3,1. Poloha středu promítání a průmětny. Jestliže střed promítání S je uvnitř kulové plochy, pak průmětem plochy je celá průmětna π. Pro kartografii a mineralogii je důležitý t. zv. *gnómonický průmět* kulové plochy, což je její středový průmět pro střed promítání v jejím středu S na libovolnou průmětnu π, jež neprochází středem S. Význačná vlastnost tohoto průmětu je ta, že hlavní kružnice kulové plochy, t. j. ty, jichž roviny jdou středem kulové plochy, se promítají do přímek. Ježto pak nejkratší vzdálenost dvou míst A, B kulové plochy měřena na kulové ploše je v menším oblouku hlavní kružnice, jež jde těmito body,[3]) promítne se tato vzdálenost v gnómonickém průmětě do úsečky $\overline{A^sB^s}$; toho se po-

[3]) V případě, že body A, B jsou krajními body průměru kulové plochy, nebo říkáme též diametrálně protilehlé, je jejich sférická vzdálenost rovna polovině hlavní kružnice kulové plochy.

užívá v kartografii. V krystalografii stěny krystalů se zobrazují nejprve kolmicemi k nim ze středu zvolené kulové plochy do bodů kulové plochy a tyto pak gnómonickým průmětem do roviny π. Stěny krystalů, jež jsou rovnoběžny s určitým směrem a tvoří t. zv. zonu, zobrazují se nejprve do bodů hlavní kružnice kulové plochy a gnómonickým průmětem do bodů téže přímky. Této vlastnosti po prvé použil *Neumann* r. 1823 v díle „Beiträge zur Krystallonomie“.

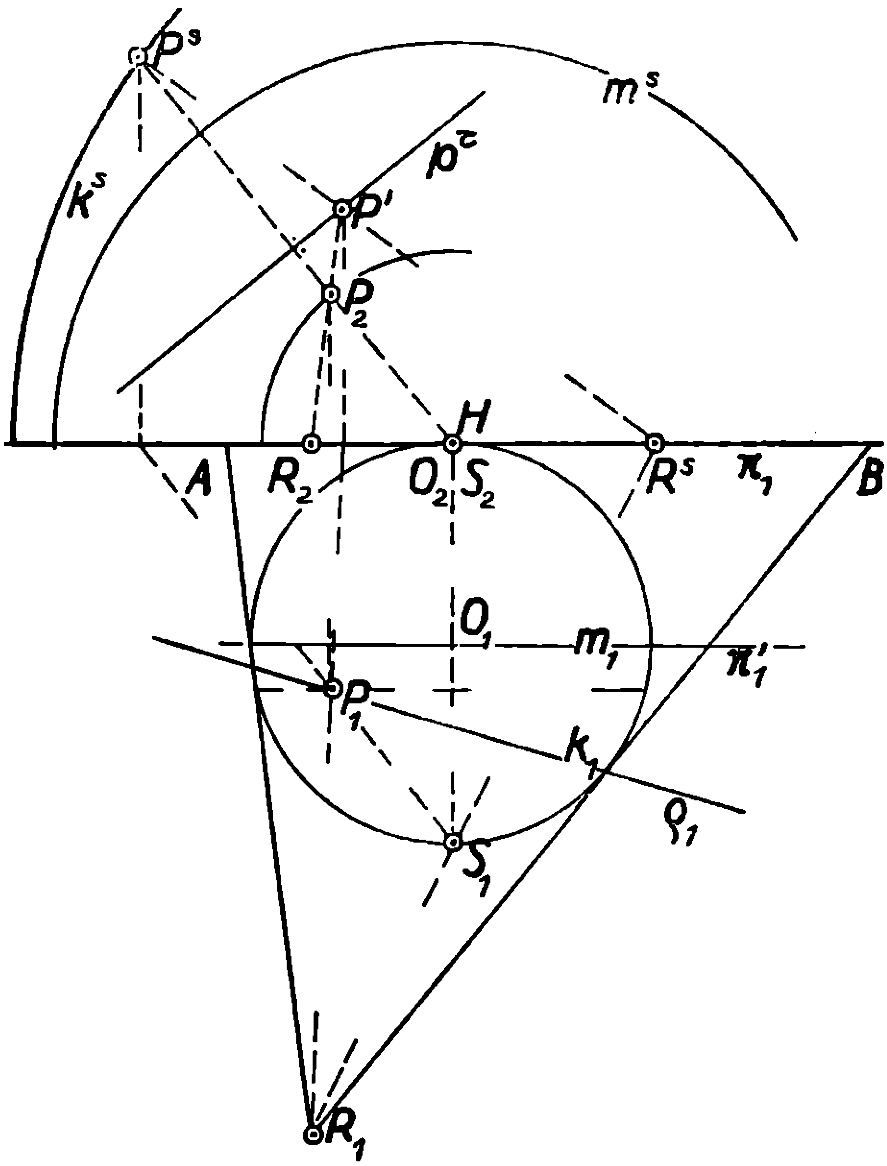


Obr. 12. Gnómonický průmět kulové plochy.

V obr. 12 ukázán gnómonický průmět v půdoryse a náryse. Průmětna π středového průmětu zvolena v druhé průmětně tak, že se dotýká kulové plochy o středu S a poloměru d v hlavním bodě H. Poloměr d je tu distancí. Jak se určí gnómonický průmět A^s bodu A kulové plochy je patrno z obrazce. Kdybychom promítali celou kulovou plochu, tu k středovému průmětu A^s příslušely by dva body kulové plochy jako originály a to diametrálně protilehlé. Abychom měli vzájemnou jednoznačnost, nutno uvažovati jen o polovině kulové plochy, jež je v obrazci omezena hlavní kružnicí m v rovině rovnoběžné s průmětnou π a jejíž nárys splývá s distanční kružnicí k^d. Chceme-li ke gnómonickému průmětu A^s určiti originál A, užijeme otočení promítacího paprsku SA^s kolem osy kolmé k průmětně π a jdoucí středem S.

3,2. Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S.

Stereografický průmět, který v podstatě znal již kolem roku 160 před Kr. Hipparchos, má dvě důležité vlastnosti. Předně *všechny kružnice kulové plochy se promítají do kružnic* a pak, *úhel dvou křivek kulové plochy je v průmětě zachován.*



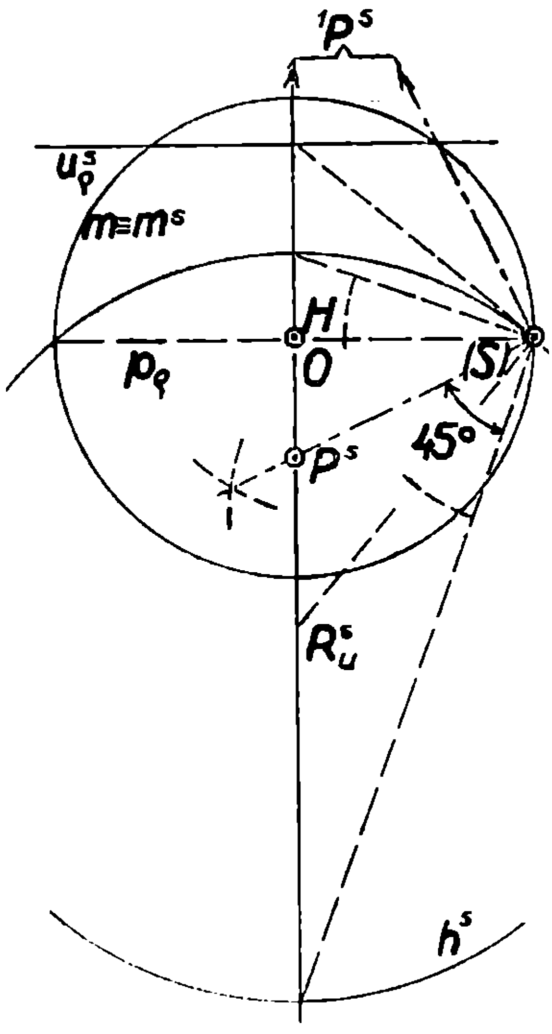
Obr. 13. Stereografický průmět kulové plochy.

Dokážeme tyto vlastnosti podle Pelze (X)[4]) (viz obr. 13), za použití kolmého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Druhá průmětna nechť splývá s průmětnou π stereografického průmětu a kulová plocha nechť se dotýká této roviny v bodě H a střed promítání S nechť je diametrálně protilehlý k bodu H; leží tedy na průměru HOS, kde O je střed kulové plochy. Na kulové ploše buď kružnice k v rovině ϱ. Zvolme první průmětnu bodem O kolmo k průsečnici $(\varrho\pi)$, takže půdorysem roviny ϱ je přímka ϱ_1. Podél kružnice k se dotýká kulové plochy rotační plocha kuželová, jejíž vrchol R je v první průmětně; nárys R_2 je na přímce π_1. Osvětlíme-li kulovou plochu z bodu R, je jejím vrženým stínem na průmětnu π kuželosečka k' (v obr. 13 elipsa), jež má ohniska v hlavním bodě H a v stereografickém průmětu R^s vrcholu R a vrcholy má v průsečících A, B půdorysného obrysu kuželové plochy s půdorysem π_1. Zvolme libovolný bod P na kružnici k; jeho vržený stín ze středu R na průmětnu π je v bodě P' a stereografický průmět je v bodě P^s. Spojnice P^sP' prochází stopníkem R^s spojnice RS na průmětně π. Bod P' náleží kuželosečce k' a tečna k této sestrojená v bodě P' je stopou p^τ tečné roviny τ světelné plochy kuželové podél tvořící přímky RP na průmětně π. Ježto rovina τ je též tečnou rovinou kulové plochy v bodě P, musí $p^\tau \perp O_2P_2$ a tudíž bod P^s je bodem souměrně sdruženým k ohnisku H kuželosečky k' podle její tečny p^τ; tedy stereografický průmět k^s kružnice k je kružnice k^s o středu R^s a poloměru $\overline{AB}$. Tím je prvá vlastnost stereografického průmětu dokázána a určen střed kružnice k^s v středovém průmětu vrcholu R kužele opsaného kulové ploše podél kružnice k. Stereografický průmět P^s je též sklopenou polohou bodu P kolem stopy p^τ, ježto délky $\overline{P'P}$ a $\overline{P'H}$ jsou stejné jako délky tečen ke kulové ploše z bodu P' a dále $\overline{P'P^s} = \overline{P'H}$.

[4]) Značí spis označený X v literatuře uvedené na konci této knížky (str. 89).

Protínají-li se dvě křivky jdoucí na kulové ploše bodem P v jistém úhlu, který se měří úhlem jejich tečen v bodě P, svírají tečny jejich stereografických průmětů v bodě P^s týž úhel, ježto tyto tečny se dostanou z prvých sklopením roviny τ kolem stopy p^τ do průmětny π. Zachovává tudíž stereografický průmět kulové plochy úhly; říkáme též, že stereografický průmět je *konformní*.

Průmětna π se volívá nejčastěji ve středu O kulové plochy kolmo k poloměru OS (v obr. 13 je to rovina π') a tak vzniklý stereografický průmět je podobný s tím, který jsme sestrojili a sice pro poměr 1 : 2 (jak zvoleno též v obr. 14 a 15). Označíme-li m hlavní kružnici kulové plochy v této nové průmětně (π'), tu je $m \equiv m^s$. Stereografické průměty hlavních kružnic jsou kružnice, jež půlí kružnici m, ježto průsečnice jejich rovin s rovinou π' jsou průměry kružnice m. Střed stereografického průmětu takové hlavní kružnice je na kolmici spuštěné ze středu promítání S na rovinu kružnice, ježto podél této kružnice kulové ploše opsaná dotyková plocha kuželová přejde v plochu válcovou.[5])

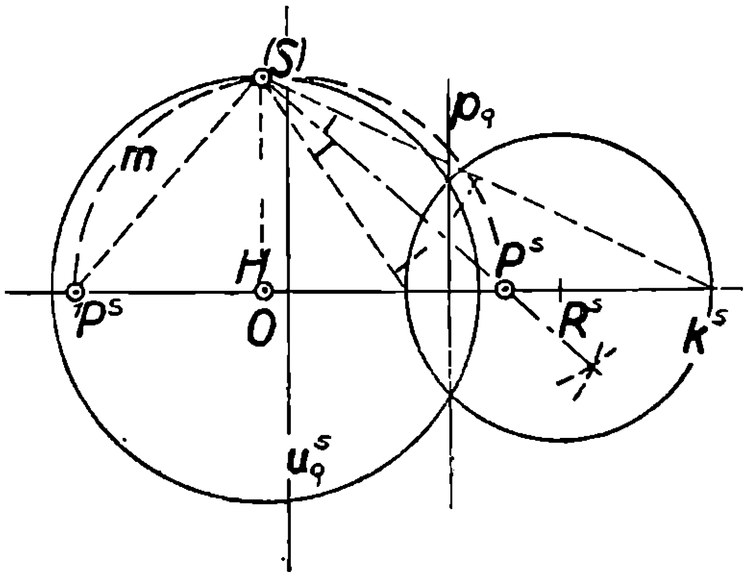


Obr. 14. Stereografický průmět hlavní kružnice kulové plochy.

---

[5]) Stereografického průmětu použil kolem r. 140 po Kr. Ptolemaios k sestrojení mapy hvězdné oblohy. Velice hojně je užíván stereografický průmět i

3,21. V obr. 14 resp. 15 jsou řešeny v stereografickém průmětě tyto úlohy: *Určiti průměty sférických středů P, ^1P, hlavní kružnice h resp. vedlejší kružnice k*, jejichž stereografické průměty jsou dány. Hlavní kružnice, jež jdou sférickými středy P, ^1P protínají kolmo hlavní kružnici h a v druhém případě vedlejší kružnici k. Stereografické průměty těchto hlavních kružnic protínají kolmo v obr. 14 kružnici h^s



Obr. 15. Stereografický průmět kružnice k.

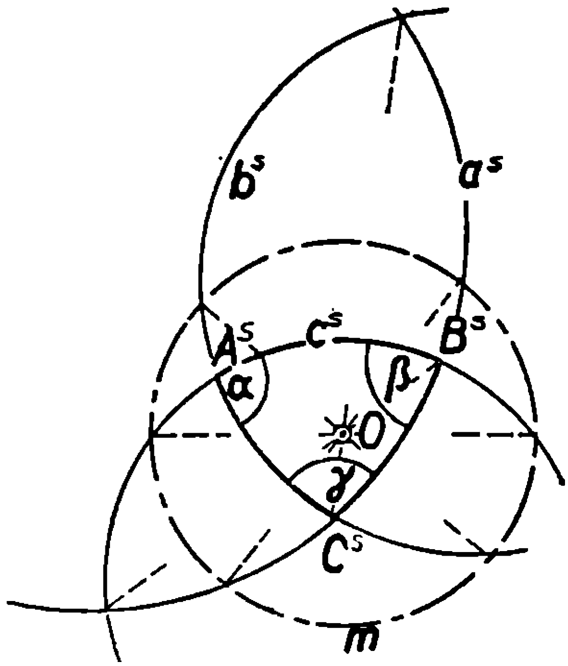
a v obr. 15 kružnici k^s a mimo to musí v obou případech půliti hlavní kružnici m ležící v průmětně. Má-li kružnice půliti kružnici m o poloměru r, tu protíná kolmo kružnici m^i, soustřednou o poloměru ri, $i^2 = -1$), ježto podmínka kolmosti dvou kružnic je, aby čtverec jejich středné se rovnal součtu čtverců jejich poloměrů. Kružnice pak, jež kolmo protínají dvě kružnice tvoří svazek kružnic, jehož základní body jsou na spojnici jejich středů a rozdělují harmonicky obě kružnice; jejich středy jsou na chordále obou kružnic. Průměty P^s, $^1P^s$ sférických středů kružnice h v obr. 14, a kružnice k v obr. 15, jsou základními body svazku kružnic kolmo protínajících kružnici h^s případně k^s a imaginární kružnici m^i a jsou tudíž na spojnici jejich středů $OR_u{}^s$ případně OR^s. Středy $R_u{}^s$, R^s jsou stereografickými průměty vrcholů kuželových ploch opsaných kulové ploše podél kružnice h případně k, z nichž prvý je úběžným bodem. Z bodu (S), kde $O(S) \perp OR^s$

---

v krystalografii. Zobrazíme-li podle odst. 3,1 stěny krystalu v body kulové plochy a tyto pak stereograficky promítneme, zobrazují se stěny téže zóny do bodů kružnice, jež půlí kružnici m^s.

a ležícím na kružnici m, promítají se průsečíky kružnice m^1 se střednou OR^s minimálními přímkami*) a proto body P^s, ${}^1P^s$ se promítají z bodu (S) přímkami kolmými a ježto rozdělují harmonicky též kružnici h^s, případně k^s, jsou na osách úhlů spojnic bodu (S) s průsečíky kružnice h^s příp. k^s se střednou OR^s. Středy stereografických průmětů hlavních kružnic kolmých ke kružnici h příp. k jsou na ose souměrnosti $u_\varrho{}^s$ úsečky $\overline{P^{s1}P^s}$, jež je úběžnicí rovin kolmých k přímce OR, a mezi něž náleží též rovina ϱ kružnice h nebo k. V obr. 14 je $u_\varrho{}^s$ antipolárou středu $R_u{}^s$ vzhledem k distanční kružnici m.

3,22. Stereografického průmětu lze užíti též k *řešení sférických trojúhelníků.* Z toho, že sférický průmět hlavní kružnice půlí kružnici m, vyplývá pro rovinu bezprostředně, že součet úhlů v křivočarém trojúhelníku $A^sB^sC^s$ (obr. 16), omezeném oblouky tří kružnic a^s, b^s, c^s jejichž bod O stejných mocností (t. zv. potenční střed) je uvnitř všech tří, má součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Chordály těchto tří kružnic jdou bodem O, který má ke všem třem tutéž zápornou mocnost a tedy existuje kružnice m, jež je půlena všemi třemi kružnicemi a^s, b^s, c^s. Kružnice m je distanční kružnicí stereografického promítání, v němž jsou a^s, b^s, c^s průměty tří hlavních kružnic a, b, c, jež omezují celkem 8 sférických trojúhelníků, z nichž jeden je ABC a v něm je součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma > 180°$.



Obr. 16. Stereografický průmět sférického trojúhelníka.

[Kdyby bod O byl vně nebo na kružnicích a^s, b^s, c^s, kolik by byl součet $\alpha + \beta + \gamma$?]

*) Viz *L. Seifert* l. c., str. 59 a n.