Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část

VI. Kvadriky v pravoúhlých kartézských souřadnicích. Část všeobecná

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 40–77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403060

VI.

KVADRIKY V PRAVOÚHLÝCH KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH. ČÁST VŠEOBECNÁ.

28. Plocha kulová. V dalším budeme stále předpokládati, že souřadnicový trojhran je pravoúhlý kartézský. Definujme znovu plochu kulovou, kterou jsme se již v odst. 18 zabývali:

Plocha kulová je množství bodů, jejichž vzdálenosti od bodu S (t. zv. středu plochy) jsou stejné.

Budiž a tato vzdálenost, již nazýváme poloměr kulové plochy.

Je-li tedy $(x; y; z)$ bod kulové plochy, vyjadřuje rovnice

$$f(x, y, z) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0, \quad (28,1)$$

že jeho vzdálenost od středu $S_0\,(x_0; y_0; z_0)$ plochy jest a; je tedy (28,1) rovnice kulové plochy.

Je to rovnice druhého stupně, proto kulová plocha je kvadrika. Z jejích koeficientů utvořené determinanty A a A_{44} mají hodnoty

$$A = -a^2, \quad A_{44} = 1, \quad (28,2)$$

z nichž je patrno, že při $a \neq 0$ kulová plocha je nesingulární středová kvadrika nepřímková o středu S. Je-li $a = 0$, (28,1) kulová plocha je singulární, a to imaginární kužel (viz odst. 27, druh 8) o vrcholu ve středu S, t. zv. kužel isotropický.

Je-li středem kulové plochy počátek ($S \equiv 0$), rovnice kvadriky se redukuje na

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

která má tvar (25,6) s jediným koeficientem a_{44} záporným, je-li $a \neq 0$.

Nesingulární kulová plocha je tedy ve smyslu afinního roztřídění (odst. 27, druh 3) elipsoid. Její nevlastní kuželosečka je proto imaginární; po zavedení homogenních souřadnic její rovnice vycházejí

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{28,4}$$

Tyto rovnice zřejmě neobsahují ani poloměr kulové plochy ani souřadnice jejího středu, takže každá kulová plocha, isotropické kužele nevyjímaje, jí prochází. Nazýváme ji proto absolutní kružnice kulová.

Asymptotický kužel kulové plochy (28,1) podle (25,8) nebo (27,1) je isotropický kužel o vrcholu ve středu S. Libovolná rovina diametrální protíná kulovou plochu v kružnici o středu S a asymptotický kužel v asymptotách oné kružnice, t. j. ve dvojici sdružených přímek isotropických, které procházejí středem S.

Provedeme-li v (28,1) naznačené umocnění, obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + \\ + y_0^2 + z_0^2 - a^2 = 0, \end{aligned} \tag{28,5}$$

již pišme stručněji

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Lx + My + Nz + P = 0. \tag{28,6}$$

Vzhledem k obecné rovnici kvadriky mají tedy koeficienty rovnice kulové plochy v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic tyto zvláštní vlastnosti:

1. Koeficienty u xy, xz, yz jsou nuly.

2. Koeficienty u x^2, y^2, z^2 jsou od nuly různé a rovnají se navzájem (aby se rovnaly právě jedné, jak je tomu v (28,6), lze docíliti násobením rovnice vhodným faktorem).

Tyto podmínky vyjadřuje soustava pěti rovnic mezi koeficienty a_{ik} rovnice kvadriky

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0. \tag{28,7}$$

Je tedy kulová plocha určena čtyřmi nezávislými podmínkami, na př. čtyřmi vlastními body neležícími v jedné rovině (čtyrstěnu lze opsati jedinou kulovou plochu).

Je-li plocha kulová (isotr. kužel) dána rovnicí tvaru (28,6), vzniká otázka, jaké souřadnice má její střed a jaký jest její poloměr. Snadným porovnáním koeficientů rovnic (28,5) a (28,6) vychází pro hledané veličiny

$$\left.\begin{aligned} x_0 = -\tfrac{1}{2}L, \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}M, \quad z_0 = -\tfrac{1}{2}N, \\ a^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - P. \end{aligned}\right\} \quad (28,8)$$

Na př. z rovnice kulové plochy

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 3z - 5 = 0$$

vycházejí souřadnice středu

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = \tfrac{3}{2}$$

a dvojmoc poloměru

$$a^2 = 4 + 1 + \tfrac{9}{4} + 5 = \tfrac{49}{4}, \text{ t. j. } a = \tfrac{7}{2}.$$

Středový tvar (28,1) rovnice této kulové plochy proto zní

$$f(x, y, z) \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{49}{4} = 0.$$

Při $a^2 < 0$ kulová plocha je imaginární (viz odst. 27, druh 4). Její střed a polarita vzhledem k ní jsou však reálné.

Polaritě vzhledem ke kulové ploše zvláštní význam dává věta:

Dvě přímky, dvě roviny nebo přímka a rovina jsou navzájem kolmé jen tehdy, když jejich směry jsou sdružené vzhledem ke kterékoliv kulové ploše.

Jinak řečeno, takové útvary jsou kolmé jen tehdy, když jejich nevlastní prvky jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kulové kružnici.

Větu dokážeme nejdříve pro dvě přímky o trojicích směrových parametrů $(l_1; m_1; n_1)$ resp. $(l_2; m_2; n_2)$. Nutná a postačující podmínka jejich kolmosti, jak víme, je (7,3). Avšak také podmínka, vyjadřující, že nevlastní body obou přímek $(l_1; m_1; n; 0)$ resp. $(l_2; m_2; n_2; 0)$ jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kulové kružnici (28,4) je zřejmě též (7,3), což bylo dokázati.

Odtud plyne, že nevlastní přímka roviny kolmé k danému směru je polára nevlastního bodu v tomto směru ležícího vzhledem k absolutní kulové kružnici a obráceně, osnova kolmic k dané rovině má společný nevlastní bod (někdy též zv. orthocentrum roviny), který je pólem nevlastní přímky dané roviny vzhledem k téže absolutní kružnici. Stejně je nyní zřejma správnost uvedené věty pro dvojici rovin.

Příklady k cvičení.

104. Jak zní rovnice kulové plochy, která prochází body a) (0; 0; 0), (0; 0; 2), (0; 3; 0), (— 1; 0; 0;). b) (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)? [a) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 2z = 0$. b) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$.]

105. Určete souřadnice středů a poloměry obou kulových ploch příkladu **104** a napište středové tvary jejich! [a) $S\,(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1)$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{14}$. b) $S\,(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.]

106. Určete rovnice tečných rovin obou ploch příkladu **104**, které se jich dotýkají v počátku! [a) $x - 3y - 2z = 0$. b) $x + y + z = 0$.]

107. Kdy kulová plocha o rovnici (28,6) je reálná, kdy singulární, kdy imaginární a nesingulární? [Když $L^2 + M^2 + N^2 - 4P \gtreqless 0$.]

108. Je-li $P_1\,(x_1; y_1; z_1)$ libovolný bod, $f(x, y, z) = 0$ rovnice kulové plochy f, je $\dfrac{f(x_1, y_1, z_1)}{a_{11}}$ t. zv. mocnost bodu P_1 vzhledem k ploše f.

Ukažte, že její význam je týž jako význam mocnosti bodu ke kružnici!

109. Určete geometrické místo bodů stejné mocnosti ke dvěma kulovým plochám. V čem toto geometrické místo protíná obě plochy? [Rovina, zvaná potenční, kolmá na střednou; obě plochy protíná v jejich průsečné kružnici.]

110. Dokažte, že roviny potenční tří kulových ploch náležejí jednomu svazku. Jaká je poloha jeho osy? [Kolmá na rovinu tří středů.]

111. Dokažte, že roviny potenční čtyř kulových ploch náležejí jednomu trsu, jehož vrchol (t. zv. potenční střed) určete!

112. Napište rovnici geometrického místa středů kulových ploch, které se dotýkají a) kulové plochy $x^2 + y^2 + (z + e)^2 - 4a^2 = 0$ a procházejí bodem $(0; 0; e)$; b) roviny $z - \frac{1}{2}p = 0$ a procházejí bodem $(0; 0; \frac{1}{2}p)$! [a) Středová rotační kvadrika $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2 - e^2} + \dfrac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. b) Rot. paraboloid (18,9).]

29. Charakteristická rovnice kvadriky. Hlavní směry a roviny. Buď (18,1) homogenní a (18,2) nehomogenní rovnice kvadriky f v pravoúhlých kartézských souřadnicích. Nevlastní kuželosečka f^* kvadriky f má rovnice (19,5) a je totožna s absolutní kulovou kružnicí (28,4) jen tehdy, když f je kulová plocha. Není-li tomu tak, obě kuželosečky v rovině nevlastní jsou různé a určují t. zv. charakteristický svazek kuželoseček (viz odst. 2) o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad h(x, x) \equiv f^*(x, x) - \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

neboli

$$x_4 = 0, \; h(x, x) \equiv (a_{11} - \varrho)\, x_1^2 + (a_{22} - \varrho)\, x_2^2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \qquad (29,1)$$

Jsou-li $ABCD$ body base charakteristického svazku — ovšem imaginární, neboť na absolutní kružnici není reálných bodů — pak singulárním kuželosečkám, vzniklým spojováním dvojic těchto bodů, náležející hodnoty ϱ jsou kořeny rovnice (srovnej s 2,18)

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0, \qquad (29,2)$$

čili rovnice

$$-D(\varrho) \equiv \varrho^3 - I\varrho^2 + J\varrho - A_{44} = 0, \qquad (29,3)$$

kde

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$J = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2$$

a A_{44} je známý minor diskriminantu A.

Rovnice (29,3) se nazývá charakteristickou rovnicí kvadriky f. Její důležitost je patrna z věty:

Kořeny charakteristické rovnice nezávisí na poloze pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic vzhledem ke kvadrice f.

Jinak řečeno, na kořeny charakteristické rovnice nemá vlivu ortogonální transformace (12,4) s koeficienty (12,8) a s $\delta = +1$.

Abychom to dokázali, uvažme, že $D(\varrho)$ je minor $\bar{A}_{44}$ diskriminantu rovnice kvadriky

$$\begin{aligned}(a_{11} - \varrho)\, x^2 + (a_{22} - \varrho)\, y^2 + (a_{33} - \varrho)\, z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.\end{aligned} \tag{29,4}$$

Změní-li se vlivem uvažované transformace koeficienty a_{ik} v a'_{ik}, zní charakteristická rovnice v nových souřadnicích

$$D'(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a'_{11} - \varrho & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} - \varrho & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$- D'(\varrho) \equiv \varrho^3 - I'\varrho^2 + J'\varrho - A'_{44} = 0.$$

Je však $D'(\varrho)$ minor $\bar{A}'_{44}$ diskriminantu $\bar{A}'$ rovnice vznikající z (29,4) uvažovanou ortogonální transformací (viz 12, 13!), takže podle (25,9) jest

$$D'(\varrho) = D(\varrho), \tag{29,5}$$

a to při každé hodnotě ϱ. Proto musí být

$$I' = I, \quad J' = J, \quad A'_{44} = A_{44}.$$

Poslední z těchto rovnic jsme poznali již dříve za obecnějších předpokladů, stejně jako rovnici $A' = A$.

Výrazy I, J, A_{44}, A, na jejichž hodnotu nemá vliv ortogonální transformace souřadnic, nazývají se **ortogonální invarianty kvadriky** f. Jimi jest kvadrika jednoznačně určena až na svou polohu vzhledem k souřadnicové soustavě. Každý další ortogonální invariant kvadriky f jest jejich funkcí; platí to i o kořenech $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ charakteristické rovnice (29,3). Ukažme nyní další vlastnost těchto kořenů, již vyjadřuje věta:

Kořeny charakteristické rovnice jsou reálné.

Abychom ji dokázali, uvažme, že $D(\varrho) = 0$ je nutná a postačující podmínka pro to, aby soustava lineárních rovnic

$$f^*_1(x) = \varrho x_1, \; f^*_2(x) = \varrho x_2, \; f^*_3(x) = \varrho x_3, \qquad (29,6)$$

kde $f^*_1(x)$ atd. jsou z kvadratické formy $f^*(x, x)$ (viz 19,5) utvořené trojčleny

$$\begin{aligned} f^*_1(x) &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ f^*_2(x) &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ f^*_3(x) &\equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

měla řešení $(x_1; x_2; x_3)$ různé od $(0; 0; 0)$.

Provedeme důkaz nepřímý. Předpokládejme, že v soustavě (29,6) ϱ je komplexní kořen rovnice $D(\varrho) = 0$. Pak ovšem nutno předpokládati, že i řešení $(x_1; x_2; x_3)$ této soustavy je trojice čísel komplexních. Položme proto

$$x_1 = y_1 + iz_1, \quad x_2 = y_2 + iz_2, \quad x_3 = y_3 + iz_3,$$

čili symbolicky

$$x = y + iz.$$

Nechť dále $\bar{x}_1 = y_1 - iz_1$ atd. je trojice komplexních čísel sdružených s x_1, x_2, x_3, t. j. symbolicky

$$\bar{x} = y - iz.$$

Podle identity (20,3), přizpůsobené pro formu $f^*(x, x)$, je

$$f^*(x, \bar{x}) \equiv \bar{x}_1 f^*_1(x) + \bar{x}_2 f^*_2(x) + \bar{x}_3 f^*_3(x). \qquad (29,7)$$

Z této identity spojením se soustavou rovnic (29,6) vychází rovnice

$$f^*(x, \bar{x}) = \varrho(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3). \qquad (29,8)$$

Levá strana této rovnice je reálná, neboť

$$f^*(x, \bar{x}) = f^*(y + iz, y - iz) = f^*(y, y) + f^*(z, z).$$

Avšak i koeficient při ϱ v rovnici (29,8) je číslo reálné a kladné, neboť zřejmě jest

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = y_1^2 + z_1^2 + y_2^2 + z_2^2 + y_3^2 + z_3^2,$$

takže ϱ nemůže býti komplexní číslo, proti předpokladu.

Důkaz věty je tím proveden. Současně je zřejmé, že i řešení $(x_1; x_2; x_3)$ soustavy (29,6) je trojice reálných čísel.

Označme h_i singulární kuželosečku charakteristického svazku (29,1), jejíž rovnice obdržíme dosazením kořene ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ rovnice (29,2) do (29,1). Protože všechna ϱ_i jsou reálná, jsou reálné i rovnice těchto singulárních kuželoseček. Z toho plyne, že každá ze singulárních kuželoseček η_i má alespoň jeden reálný singulární bod S_i, t. j. tato kuželosečka je složena ze dvou nevlastních přímek reálných a různých nebo sdruženě imaginárních nebo reálných a ztotožňujících se.

Tvrdíme, že trojice směrových parametrů $(l_i; m_i; n_i)$ bodu S_i je totožna s řešením soustavy rovnic (29,6), kde $\varrho = \varrho_i$ je kořen rovnice charakteristické, t. j. platí rovnice

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_i + a_{12}m_i + a_{13}n_i &= \varrho_i l_i, \\ a_{21}l_i + a_{22}m_i + a_{23}n_i &= \varrho_i m_i, \\ a_{31}l_i + a_{32}m_i + a_{33}n_i &= \varrho_i n_i. \end{aligned}\right\} \qquad (29,9)$$

Skutečně, bod S_i je dotykový bod nevlastní roviny $(0; 0; 0; 1)$ s nestředovou kvadrikou, v jejíž rovnici (29,4) je $\varrho = \varrho_i$. Podle (21,3) vyhovují souřadnice bodu S_i právě soustavě (29,9), což bylo dokázati.

Směry charakterisované singulárními nevlastními body S_i singulárních kuželoseček charakteristického svazku nazýváme **hlavní směry** kvadriky f.

Platí věta:

Jsou-li ϱ_1, ϱ_2 dva různé kořeny charakteristické rovnice, pak body S_1, S_2 jsou polárně sdružené jak vzhledem k absolutní kulové kružnici, tak vzhledem ke kvadrice f.

Jinak řečeno, dva hlavní směry, korespondující dvěma různým kořenům charakteristické rovnice, jsou kolmé a vzhledem ke kvadrice f sdružené.

Že oba hlavní směry jsou kolmé, dokážeme z obou soustav rovnic (29,9), s $i = 1$ resp. $i = 2$. Násobme prvou rovnici prvé soustavy faktorem l_2, druhou faktorem m_2, třetí faktorem n_2, načež násobme prvou rovnici druhé soustavy faktorem l_1, druhou m_1, třetí n_1, načež všech šest rovnic sečtěme!

Vychází

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0;$$

za učiněného předpokladu $\varrho_1 \neq \varrho_2$ je roven nule pouze druhý z obou činitelů, t. j. platí rovnice (7,3), vyjadřující kolmost obou hlavních směrů, čímž prvá část věty je dokázána.

Druhou část dokážeme z rovnice polární roviny bodu S_1 $(l_1; m_1; n_1; 0)$, která podle (20,3) zní

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,x_1 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\,x_2 + \\ + (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,x_3 + (a_{41}l_1 + a_{42}m_1 + a_{43}n_1)\,x_4 = 0,$$

t. j. podle (29,9)

$$\varrho_1(l_1x_1 + m_1x_2 + n_1x_3) + (a_{41}l_1 + a_{42}m_1 + a_{43}n_1)x_4 = 0, \quad (29,10)$$

jíž však — podle již dokázané prvé části věty — souřadnice singulárního nevlastního bodu S_2 $(l_2; m_2; n_2; 0)$ vyhovují, čímž je i druhá část věty dokázána.

Z ní plyne (srovnej s příkl. 11, kapit. I.):

Jsou-li všechny tři kořeny charakteristické rovnice různé, jsou singulární body $S_1S_2S_3$ vrcholy společného polárního trojúhelníka nevlastní kuželosečky f^* plochy f a absolutní kulové kružnice.

Polární rovina (29,10) bodu S_1 se nazývá hlavní rovina kvadriky f, sdružená se směrem $(l_1; m_1; n_1)$, je-li to rovina vlastní. Stojí na sdružený směr kolmo a kvadrika je podle ní kolmo souměrná.

Dosud jsme předpokládali, že kořeny charakteristické rovnice jsou různé. Nyní naopak předpokládejme, že $\varrho_2 = \varrho_1$, $\varrho_3 \neq \varrho_1$, takže ϱ_1 je dvojnásobný, ϱ_3 jednoduchý kořen. Pak charakteristická rovnice má tvar

$$-D(\varrho) \equiv (\varrho - \varrho_1)^2 (\varrho - \varrho_3) = 0. \quad (29,11)$$

Protože kořeny této rovnice nezávisejí na poloze souřadnicového trojhranu vzhledem ke kvadrice, můžeme předpokládati, že osa $\vec{z}$ má směr totožný s hlavním směrem korespondujícím jednoduchému kořeni ϱ_3. Pro $i = 3$ ze soustavy (29,9) nutně tedy plyne $l_3 = m_3 = 0$, $n_3 \neq 0$, takže musí býti

$$a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = \varrho_3.$$

S ohledem na tyto hodnoty koeficientů je

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} - \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_3 - \varrho \end{vmatrix},$$

t. j.

$$-D(\varrho) \equiv (\varrho - \varrho_3)\,[\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\varrho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2].$$

Je-li $\varrho_1 = \varrho_2$, je výraz

$$\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\varrho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \qquad (29,12)$$

úplný čtverec, proto diskriminant

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \equiv (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

je roven nule. To je však možno — protože koeficienty a_{ik} jsou reálná čísla — jen tak, že

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0. \qquad (29,13)$$

Pak výraz (29,12) skutečně je úplný čtverec

$$(\varrho - a_{11})^2$$

takže

$$\varrho_1 = \varrho_2 = a_{11}. \qquad (29,14)$$

S ohledem na (29,13) a (29,14) soustava rovnic (29,9) pro $i = 1$ se redukuje na soustavu $\varrho_1 l_1 = \varrho_1 l_1$, $\varrho_1 m_1 = \varrho_1 m_1$, $\varrho_3 n_1 = \varrho_1 n_1$, jejíž první dvě rovnice jsou identity a z třetí vychází $n_1 = 0$. Lze tedy vysloviti větu:

Má-li charakteristická rovnice jeden kořen dvojnásobný a jeden jednoduchý, náleží dvojnásobnému kořeni množství hlavních směrů; jsou to všechny směry kolmé na hlavní směr náležející kořeni jednoduchému.

Vlivem rovnic (29,13) a (29,14) rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici

$$f(x, y, z) \equiv \varrho_1(x^2 + y^2) + \varrho_3 z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (29,15)$$

Je-li $\varrho_1\varrho_3 \neq 0$, transformuje se tato rovnice translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z' - \frac{a_{34}}{\varrho_3}$$

v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + \varrho_3 z'^2 + a'_{44} = 0. \qquad (29,16)$$

Srovnáním s (18,7) snadno zjistíme, že při $a'_{44} \neq 0$ je to rovnice rotační středové kvadriky, při $a'_{44} = 0$ rotačního kužele; v obou případech rotační osa plochy je $\vec{z}$.

Je-li $\varrho_1 = \varrho_3 \neq 0$, plocha (29,16) je nesingulární kulová (při $a'_{44} \neq 0$), nebo isotropický kužel (při $a'_{44} = 0$). Pak ovšem — a jen tenkráte — charakteristická rovnice má trojnásobný od nuly různý kořen.

Je-li $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, $a_{34} \neq 0$ transformuje se rovnice (29,15) translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z' - \frac{a_{44}}{2a_{34}} - \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2}{2\varrho_1 a_{34}}$$

v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + 2a_{34}z' = 0,$$

ze které srovnáním s (18,9) snadno poznáváme, že kvadrika f je rotační paraboloid o rotační ose $\vec{z}'$.

Je-li $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, $a_{34} = 0$, pak translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z'$$

rovnice (29,15) se transformuje v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + a'_{44} = 0,$$

což je rovnice *rotačního válce* o ose $\vec{z}$ (při $a'_{44} \neq 0$), nebo *dvojice sdružených imaginárních rovin* (t. zv. *rovin isotropických*), jejichž imaginární nevlastní přímky jsou tečny absolutní kulové kružnice (při $a'_{44} = 0$).

Konečně při $\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$ vychází po zavedení homogenních souřadnic do (29,15), že nevlastní kuželosečka f^* plochy f je dvakrát počítaná nevlastní přímka $x_3 = x_4 = 0$; plocha je *parabolický válec*, je-li alespoň jeden z koeficientů a_{14}, a_{24} od nuly různý. Při $a_{14} = a_{24} = 0$ plocha je složena ze dvou rovnoběžných rovin různých nebo splývajících.

Při $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$ kvadrika je složena *ze dvou rovin, z nichž alespoň jedna je nevlastní.*

Význam dvojnásobného kořene charakteristické rovnice můžeme nyní, doplňujíce poslední větu, vyjádřiti v celku takto:

Je-li $\varrho_1 = \varrho_2$ *dvojnásobný kořen charakteristické rovnice kvadriky* f, *nikoliv složené z rovin, je* f *plocha rotační, a to středová, nebo kužel při* $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 \neq 0$ (*při* $\varrho_1 = \varrho_3 \neq 0$ *plocha kulová, nebo isotrop. kužel*), *rotační paraboloid, nebo rotační válec při* $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, *parabolický válec při* $\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$.

Směr rotační osy plochy je vždy totožný s oním hlavním směrem, který koresponduje jednoduchému kořeni charakteristické rovnice.

Ukončivše rozbor případu s dvojnásobným kořenem, uvažme obecně význam nulového kořene charakteristické rovnice. *Nutná a postačující podmínka toho, aby jeden z kořenů charakteristické rovnice* (29,3) *byl nula, zřejmě je* $A_{44} = 0$, *t. j. kvadrika je nestředová (paraboloid, válec).*

30. Prvá redukce rovnice kvadriky na tvar seminormální. O reálnosti cyklických rovin. Z rozboru odstavce 29 vyplývá — ať f je jakákoliv kvadrika — že vždy existuje alespoň jedna trojice navzájem kolmých hlavních směrů plochy f.

Jen jedna taková trojice existuje u kvadriky, jejíž charakteristická rovnice má pouze jednoduché kořeny. V případě jednoho kořene dvojnásobného je pouze onen hlavní směr, který koresponduje kořeni jednoduchému, jednoznačně určen. Za další dva hlavní směry trojice je možno voliti kterékoliv dva směry, kolmé k prvému a navzájem. Konečně v případě od nuly různého kořene trojnásobného kvadrika je kulová plocha (isotropický kužel); tu patrně kterékoliv tři navzájem kolmé směry lze pokládati za trojici směrů hlavních.

Proto můžeme předpokládati, aniž bychom tím některou kvadriku vylučovali, že rovnice kvadriky f byla ortogonální substitucí (12,4) s $\delta = +1$ a s $d_{14} = d_{24} = d_{34} = 0$ transformována tak, že směry nových souřadnicových os $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$ se ztotožňují s hlavními směry kvadriky (pootočení souřadnicové soustavy okolo počátku).

V odst. 29 jsme zjistili, že jen tehdy směr osy $\vec{z}$ se ztotožňuje s hlavním směrem korespondujícím kořeni ϱ_3, když $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = \varrho_3$. Odtud lze usouditi, že v nové souřadnicové soustavě $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$, jejíž osy mají směry totožné s hlavními směry kvadriky, korespondujícími kořenům ϱ_1, resp. ϱ_2, resp. ϱ_3, rovnice charakteristické, redukuje se rovnice kvadriky na rovnici

$$f'(x', y', z') = \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 y'^2 + \varrho_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + \\ + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0, \qquad (30,1)$$

kde $a'_{44} = a_{44}$.

Budeme ji nazývati seminormálním tvarem rovnice kvadriky f.

Z ní vychází hodnoty ortogonálních invariantů

$$\left.\begin{array}{l} I = I' = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, \\ J' = J' = \varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2, \quad A_{44} = A'_{44} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \\ A = A' = \begin{vmatrix} \varrho_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \varrho_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & \varrho_3 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a'_{44}\varrho_1\varrho_2\varrho_3 - a'^2_{14}\varrho_2\varrho_3 - \\ - a'^2_{24}\varrho_1\varrho_3 - a'^2_{34}\varrho_1\varrho_2 \end{array} \end{array}\right\} \quad (30,2)$$

K tomu připomeňme, že jsme již odůvodnili, proč se budeme zabývati pouze kvadrikami nikoliv složenými z rovin, t. j. takovými, jejichž rovnice má diskriminant A hodnosti alespoň 3.

Danou rovnici kvadriky f lze transformovati (redukovati) na seminormální tvar (30,1) pouhým pootočením soustavy souřadnic okolo jejího počátku, neboť tím lze docíliti, aby směry nových os byly totožny s hlavními směry kvadriky f.

Pak rovnice (29,1) jejího charakteristického svazku kuželoseček v rovině nevlastní se zjednodušují na

$$x'_4 = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho)\, x'^2_1 + (\varrho_2 - \varrho)\, x'^2_2 + (\varrho_3 - \varrho)\, x'^2_3 = 0, \quad (30,3)$$

neboť rovnice nevlastní kuželosečky plochy (30,1) jsou

$$x'_4 = 0, \quad f'^*(x', x') \equiv \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 x'^2_2 + \varrho_3 x'^2_3 = 0, \quad (30,4)$$

kdežto rovnice absolutní kulové kružnice v důsledku rovnice (12,13) podržují svůj tvar

$$x'_4 = 0, \quad x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 0.$$

Označíme-li p_i, q_i obě nevlastní přímky, z nichž je složena singulární kuželosečka h_i ($i = 1, 2, 3$) svazku (30,3), jest jejich průsečík $S_i \equiv (p_i q_i)$, jak známo, vždy reálný nevlastní bod.

Rovnice těchto singulárních kuželoseček patrně jsou

$$\left.\begin{array}{l} x'_4 = 0, \ h_1(x', x') \equiv (\varrho_2 - \varrho_1)\, x'^2_2 + (\varrho_3 - \varrho_1)\, x'^2_3 = 0 \\ \text{resp.} \\ x'_4 = 0, \ h_2(x', x') \equiv (\varrho_1 - \varrho_2)\, x'^2_1 + (\varrho_3 - \varrho_2)\, x'^2_3 = 0 \\ \text{resp.} \\ x'_4 = 0, \ h_3(x', x') \equiv (\varrho_1 - \varrho_3)\, x'^2_1 + (\varrho_2 - \varrho_3)\, x'^2_2 = 0. \end{array}\right\} \quad (30,5)$$

Kterákoliv z šesti nevlastních přímek p_i, q_i má zřejmý geometrický význam: je nevlastní přímkou rovin, které protínají kvadriku f v kružnicích, po případě v dvojicích přímek isotropických, ovšem za předpokladu, že uvažovaná nevlastní přímka není ani tvořící přímkou kvadriky f ani tečnou absolutní kulové kružnice.

Takové roviny budeme nazývati cyklické.

Bez ohledu na reálnost lze tedy říci, že na kvadrice existuje obecně 6 soustav kružnic, vyťatých na ní šesti osnovami cyklických rovin.

Počet těchto osnov se zmenší jen tehdy, když obě přímky p_i, q_i, skládající singulární kuželosečku h_i, se ztotožňují. To však podle (30,5) nastane jen tehdy, když dva z kořenů charakteristické rovnice jsou si rovny, na př. když $\varrho_1 = \varrho_2$. Pak se však ztotožňuje celá kuželosečka h_1 s h_2, t. j. přímky p_1, q_1, p_2, q_2 splývají v jediné přímce t o rovnicích $x'_3 = = x'_4 = 0$, t. j. v nevlastní přímce roviny $(\vec{x}'\vec{y}')$.

Plocha f je pak — jak jsme v odst. 29 zjistili — buď rotační kvadrika o ose $\vec{z}'$, nebo parabolický válec.

V prvém z obou případů v seminormálním tvaru (30,1) rovnice plochy f je $\varrho_1 \neq 0$ a — po zavedení homogenních souřadnic — rovnice nevlastní kuželosečky plochy f jsou

$$x'_4 = 0, \quad \varrho_1(x'^2_1 + x'^2_2) + \varrho_3 x'^2_3 = 0. \tag{30,6}$$

Z nich je patrno, že nevlastní kuželosečka plochy f se dotýká absolutní kružnice ve dvou bodech přímky t.

Obráceně, rotační kvadriky jsou ony, jejichž nevlastní kuželosečky se dotýkají absolutní kružnice kulové ve dvou sdruženě imaginárních bodech.

Každý bod nevlastní přímky t charakterisuje jeden z hlavních směrů rotační kvadriky, náležející dvojnásobnému kořeni charakteristické rovnice. Přímka t je vždy reálná a její pól — současně týž vzhledem ke všem kuželosečkám charakteristického svazku — určuje hlavní směr (isolovaný) náležející jednoduchému kořeni ϱ_3. Je to současně singulární bod S_3 kuželosečky h_3, která je složena z obou sdruženě imaginárních tečen p_3, q_3 absolutní kružnice v jejích bodech na t. Nevlastní přímky p_3, q_3 proto neurčují žádné osnovy cyklických rovin. Na rotační kvadrice existuje tudíž jediná soustava kružnic a to v reálných rovinách kolmých na rotační osu.

V případě parabolického válce ($\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$) nevlastní rovina se dotýká válce podél nevlastní a reálné jeho tvořící přímky t, s níž se p_1, q_1, p_2, q_2 opět ztotožňují. Avšak roviny o nevlastní přímce t nejsou cyklickými rovinami válce, neboť jej protínají kromě v nevlastní přímce t v jiné jeho přímce tvořící, vždy reálné. Singulární kuželosečka h_3 je i zde složena ze dvou sdruženě imaginárních tečen absol. kružnice v jejích bodech na t. Na parabolickém válci neexistují tudíž kružnice a plocha nemá žádných cyklických rovin.

Pravým opakem tohoto případu je plocha kulová, resp. kužel isotropický; pro tuto plochu každá reálná rovina jest cyklická.

Přistupme nyní k otázce reálnosti osnov cyklických rovin obecné kvadriky f.

Z (30,5) lze snadno vyčísti nutnou a postačující podmínku pro to, aby nevlastní přímky p_i, q_i, skládající singulární kuželosečku h_i, byly reálné. Jsou-li všechny tři kořeny charakteristické rovnice navzájem různé a tak uspořádány, že

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3,$$

jsou oba koeficienty u čtverců souřadnic v rovnici (30,5) kuželosečky h_1 kladné, kdežto v rovnici kuželosečky h_3 záporné. Pouze v rovnici singulární kuželosečky h_2 je prvý koeficient záporný, druhý kladný, proto pouze nevlastní přímky p_2, q_2 jsou reálné mezi šesti přímkami p_i, q_i.

Nejsou-li přímky p_2, q_2 tvořícími přímkami kvadriky f, každá rovina procházející jednou z nich je cyklická rovina plochy f. Lze tedy vysloviti větu:

Kvadrika, která není ani hyperbolickým paraboloidem ani hyperbolickým válcem, jejíž charakteristická rovnice má pouze jednoduché kořeny, má dvě soustavy kružnic, jejichž roviny tvoří dvě osnovy reálných cyklických rovin plochy. Všechny tyto cyklické roviny jsou rovnoběžny s hlavním směrem, který koresponduje kořeni střední velikosti rovnice charakteristické.

Kolmou souměrností podle kterékoliv hlavní roviny kvadriky vzniká z její kružnice opět kružnice.

V případě hyperbolického válce nebo hyperbolického paraboloidu obě reálné nevlastní přímky p_2, q_2 singulární kuželosečky h_2 jsou tvořící přímky plochy. Rovina osnovy, určené na př. nevlastní přímkou p_2, protíná plochu — kromě v p_2 v jiné reálné tvořící přímce r. Dvojice přímek p_2, r tvoří singulární kuželosečku, procházející kruhovými body a bylo by ji (jak někteří autoři činí) možno pokládati za singulární kružnici a její rovinu za cyklickou rovinu plochy. Poněvadž my tak neučiníme, můžeme vysloviti větu:

Kromě parabolického válce též hyperbolický válec a hyperbolický paraboloid nemají žádných reálných rovin cyklických a tudíž ani kružnic.

Na všech ostatních nesingulárních kvadrikách, kuželích a válcích existují kružnice (po případě jen imaginární — na př. na imaginárním elipsoidu) v reálných cyklických rovinách uspořádaných ve dvě osnovy, které splývají jen tehdy, je-li kvadrika rotační.

Výjimku tvoří kulová plocha a isotropický kužel, pro něž každá reálná rovina je cyklická. V těchto větách je obsaženo:

Každý nerotační kužel a každý nerotační válec eliptický lze pokládati za kruhový dvěma různými způsoby; u rotačních kuželů a válců je tento způsob jediný.

Uvažme ještě geometrické místo středů kružnic plochy f jedné soustavy; jsou-li to kružnice v cyklických rovinách osnovy, určené jednou z obou reálných nevlastních přímek singulární kuželosečky h_2, na př. přímkou p_2, je toto geometrické místo polára sdružená s p_2, čili průměr r plochy f.

Protíná-li průměr r kvadriku f v reálném a nesingulárním bodě R, pak obě sdružené isotropické přímky, procházející bodem R a ležící v jeho tečné rovině, jsou tvořící přímky plochy f. Bod R se pak nazývá kruhovým bodem kvadriky.

Takové body se zřejmě mohou vyskytovati pouze na nesingulárních reálných kvadrikách nepřímkových, t. j. na elipsoidu, dvojdílném hyperboloidu a eliptickém paraboloidu.

Na reálné kulové ploše je každý její bod kruhový. Ve všech ostatních případech počet kruhových bodů je konečný, obecně 4.

31. Druhá redukce a normální tvary rovnice kvadriky. Seminormální tvar (30,1) rovnice kvadriky, ke kterému jsme dospěli z rovnice (18,2) ortogonální transformací (12,4), která vyjadřuje pootočení pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavy okolo počátku, lze dále redukovati na tvar s ještě méně členy, a to translací souřadnicové soustavy, která je však pro každý druh kvadriky jinak definována.

1. Je-li f kvadrika středová a nesingulární ($A \neq 0$, $A_{44} \neq 0$), transformujme seminormální tvar její rovnice translací, po které počátek nové soustavy souřadnic leží ve středu S (x_0, y_0, z_0) kvadriky. V nové soustavě rovnice plochy f zní

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + \varrho_3 Z^2 + a''_{44} = 0, \tag{31,1}$$

neboť translace souřadnicové soustavy — jak snadno zjistíme — nemá vlivu na koeficienty kvadratických členů nehomogenní rovnice kvadriky a vymizení členů lineárních je charakteristické pro počátek souřadnicové soustavy ležící ve středu plochy.

Že nová rovnice plochy má tvar (31,1) lze odůvodniti též okolností, že souřadnicový čtyrstěn $SS_1S_2S_3$ je pro plochu f polární.

Protože diskriminant rovnice (31,1) má hodnotu

$$A = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 a''_{44}, \tag{31,2}$$

kdežto jeho minor

$$A''_{44} = A_{44} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \tag{31,3}$$

není za našich předpokladů žádný z koeficientů rovnice (31,1) roven nule.

Koeficient a''_{44} lze vypočísti z původní rovnice $f(x, y, z) = 0$ kvadriky f výpočtem jednoho ze tří výrazů

$$a''_{44} = \frac{A}{A_{44}} = f(x_0, y_0, z_0) = f_4(x_0, y_0, z_0), \tag{31,4}$$

kde (x_0, y_0, z_0) jsou opět souřadnice středu kvadriky v původní souřadnicové soustavě a kde $f_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}$.

Prvý z výrazů (31,4) pro a''_{44} plyne z (31,2) a (31,3). K druhému dospějeme z nehomogenní rovnice (25,8) asymptotického kužele, vyjádříme-li, že střed S $(x_0; y_0; z_0)$ na něm leží. Skutečně, dosazením souřadnic středu S do rovnice (25,8) vychází

$$A_{44}\, f(x_0, y_0, z_0) - A = 0,$$

odkud plyne $f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{A}{A_{44}}$, čímž je tvrzení dokázáno.

Třetí z výrazů (31,4) pro a''_{44} plyne z okolnosti, že souřadnice x_0, y_0, z_0, jak známo, vyhovují soustavě rovnic $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0$ (srovnej s 25,2!). Kromě toho platí identita (19,4), t. j. v nehomogenních souřadnicích jest

$$f(x, y, z) = x\,f_1(x, y, z) + y\,f_2(x, y, z) + z\,f_3(x, y, z) + \\ + f_4(x, y, z),$$

odkud po dosazení souřadnic středu S vychází

$$f(x_0, y_0, z_0) = f_4(x_0, y_0, z_0),$$

což jsme měli dokázati.

Jsou-li všechny tři kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ různé navzájem i od nuly, kvadrika se nazývá trojosá; osami kvadriky při tom rozumíme průsečnice jejích navzájem kolmých hlavních rovin, příslušných k isolovaným hlavním směrům. Osy trojosé kvadriky (31,1) se patrně ztotožňují s osami $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$.

α) Ve shodě s roztříděním kvadrik v odst. 27 plocha (31,1) je trojosý hyperboloid jednodílný, když její nevlastní kuželosečka

$$X_4 = 0, \quad \varrho_1 X_1^2 + \varrho_2 X_2^2 + \varrho_3 X_3^2 = 0,$$

je reálná a když diskriminant (31,2) je kladný. Tak tomu je jen tehdy, když dva z kořenů $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mají znaménka opačná než a''_{44} a jeden shodné.

Jsou-li ony dva kořeny se znaménky opačnými než znamení členu a''_{44} stejné, jednodílný hyperboloid je rotační a jeho rotační osa má směr totožný s hlavním směrem korespondujícím jednoduchému kořeni.

β) Uvažujeme-li obdobným způsobem nalezneme, že nutné a postačující podmínky pro to, aby (31,1) byla rovnicí trojosého hyperboloidu dvojdílného jsou: dva z kořenů charakteristické rovnice mají znaménka shodná s a''_{44}, třetí znaménko opačné.

Jsou-li prvé dva kořeny stejné, dvojdílný hyperboloid je rotační a směr jeho osy rotace je hlavní směr korespondující třetímu, jednoduchému kořeni.

γ) Jsou-li znaménka všech kořenů charakteristické rovnice opačná než znaménko prostého členu a''_{44}, kvadrika (31,1) je trojosý elipsoid. Jsou-li dva z kořenů stejné, elipsoid je rotační. Je-li absolutní hodnota jednoduchého kořene menší n ž kořene dvojnásobného, rotační elipsoid se nazývá prodloužený, v opačném případě zploštělý. Jsou-li všechny tři kořeny stejné a různé od nuly, plocha je kulová.

δ) Jsou-li znaménka všech kořenů charakteristické rovnice shodná se znaménkem členu a''_{44}, kvadrika je imaginární elipsoid; i ten je trojosý nebo rotační nebo imaginární plocha kulová podle toho, má-li charakteristická rovnice všechny kořeny různé, nebo dva či tři stejné.

2. Je-li kvadrika paraboloidem ($A \neq 0$, $A_{44} = 0$), je známo — a plyne z (30,2) — že jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula. Buď $\varrho_3 = 0$ tento kořen. Seminormální rovnici (30,1) lze ještě více zredukovati translací, po které počátek nové souřadnicové soustavy se ztotožňuje s vrcholem V paraboloidu, t. j. s oním bodem plochy, jehož tečná rovina stojí kolmo na hlavní směr korespondující kořeni $\varrho_3 = 0$.

Protože počátek nové soustavy je bodem kvadriky, bude v její nové rovnici $a''_{44} = 0$. Rovnice tečné roviny v počátku (srovnej s příkl. 87)

$$a''_{14}X + a''_{24}Y + a''_{34}Z = 0,$$

se v důsledku polohy bodu V redukuje na $Z = 0$, takže jest

$$a''_{14} = a''_{24} = 0, \quad a''_{34} \neq 0,$$

a rovnice paraboloidu v nové soustavě zní

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + 2a''_{34}Z = 0, \qquad (31,5)$$

kde je možno předpokládati $\varrho_1 \geqq \varrho_2$. Je to tvar shodný s (24,2), což dokazuje, že souřadnicový čtyrstěn má vzhledem k paraboloidu polohu popsanou v odst. 26, takže osy $\vec{X}$, $\vec{Y}$ soustavy souřadnic jsou sdružené tečny paraboloidu v jeho vrcholu V (t. zv. hlavní tečny).

Protože z (31,5) plyne

$$A = -\varrho_1\varrho_2 a''^2_{34}$$

lze koeficient a''_{34} vypočísti ze vzorce

$$a''_{34} = \pm\sqrt{-\frac{A}{\varrho_1\varrho_2}} = \pm\sqrt{-\frac{A}{J}}. \qquad (31,6)$$

Nevlastní kuželosečka paraboloidu je singulární a její z (31,5) odvozené rovnice jsou

$$X_4 = 0, \ \varrho_1 X_1^2 + \varrho_2 X_2^2 = 0.$$

Je reálná při $\varrho_1\varrho_2 < 0$, imaginární při $\varrho_1\varrho_2 > 0$; v prvém případě plocha je přímková — paraboloid hyperbolický ($A > 0$) — v druhém nepřímková — paraboloid eliptický ($A < 0$). Je tedy podle (31,6) v obou případech koeficient a''_{34} reálný. Aby rovnice (31,5) byla určena jednoznačně, volme znaménko v (31,6) tak, aby bylo $\varrho_1 a''_{34} < 0$.

Je-li paraboloid rotační, je nutně eliptický, neboť z $\varrho_1 = \varrho_2$ plyne $A = -\varrho_1^2 a''^2_{34}$, t. j. $A < 0$. Hyperbolický paraboloid rotační neexistuje.

3. Je-li kvadrika kužel ($A = 0$, $A_{44} \neq 0$), lze jeho seminormální rovnici (30,1) ještě více redukovati translací souřadnicové soustavy; po níž počátek nové soustavy leží ve vrcholu kužele. Pak jeho rovnice — jak plyne z odst. 22 — se redukuje na tvar

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + \varrho_3 Z^2 = 0, \tag{31,7}$$

kde $\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \neq 0$. Mají-li všechny tři kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ stejná znaménka, kužel je imaginární, jindy je reálný. Podle násobnosti kořenů charakteristické rovnice může opět býti trojosý, rotační nebo isotropický.

Vrchol kužele je v každém případě reálný; u imaginárních kuželů je to jediný jejich reálný bod.

4. Válec je charakterisován rovnicemi $A = 0$, $A_{44} = 0$, diskriminant A ovšem musí býti hodnosti 3. Rovnice charakteristická má jeden kořen nulový; budiž to kořen $\varrho_3 = 0$. V rovnici (30,1) je $a'_{34} = 0$, jak vyplývá z (30,2) a z $A = 0$. Seminormální tvar rovnice válce proto zní

$$f'(x', y', z') \equiv \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0. \tag{31,8}$$

Jeho tvořící přímky jsou rovnoběžny s osou $\vec{z'}$, a jeho řídící kuželosečka v rovině $(\vec{x'}\vec{y'})$ má též rovnici (31,8).

Je to středová kuželosečka, je-li $\varrho_1\varrho_2 \neq 0$, a válec je neparabolický; je-li jeden z kořenů ϱ_1, ϱ_2 nula, řídící kuželosečka je parabola a válec je parabolický.

V prvém případě je možno provésti takovou translaci souřadnicové soustavy, že její nový počátek se ztotožňuje se středem řídící kuželosečky a nová rovnice válce nabude tvaru

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + a''_{44} = 0, \tag{31,9}$$

který již více redukovati nelze, neboť $\varrho_1\varrho_2 a''_{44} \neq 0$, protože A je hodnosti 3.

Prostý člen a''_{44} rovnice (31,9) lze vypočísti z koeficientů původní rovnice kvadriky podle některého ze vztahů*)

$$a''_{44} = \frac{A_{11}}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2} = \frac{A_{22}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{A_{33}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{\varrho_1\varrho_2}. \tag{31,10}$$

Alespoň dva z těchto výrazů pro a''_{44} jsou k jeho výpočtu použitelny, t. j. nemají v čitateli i jmenovateli nuly.

Z rovnice plochy je patrné, že při $\varrho_1\varrho_2 < 0$ válec je hyperbolický, při $\varrho_1 a''_{44} < 0$, $\varrho_2 a''_{44} < 0$ eliptický (je-li kromě toho $\varrho_1 = \varrho_2$ je to reálný válec rotační), konečně při $\varrho_1 a''_{44} > 0$, $\varrho_2 a''_{44} > 0$ imaginární (je-li ještě $\varrho_1 = \varrho_2$ rotační imaginární).

Zbývá ještě případ, kdy jeden z kořenů ϱ_1, ϱ_2 je též nula, na př. $\varrho_1 = 0$. Charakteristická rovnice má pak dvojnásobný kořen $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$ a rovnici kvadriky lze redukovati na tvar

$$\varrho_2 Y^2 + 2a''_{14} X = 0, \tag{31,11}$$

a to translací souřadnicové soustavy, po níž nový počátek leží ve vrcholu řídící kuželosečky (31,8), která — vzhledem k $\varrho_1 = 0$ — je parabolou.

*) Viz na př. Staude, Analytische Geometrie atd., str. 515 a 530.

Koeficient a''_{14} rovnice (31,11) lze vypočísti z koeficientů původní rovnice kvadriky podle vzorce*)

$$a''_{14} = \pm \sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{\varrho_2}}; \qquad (31,12)$$

dvojímu znaménku korespondují dva shodné parabolické válce, z nichž jeden přechází v druhý pootočením okolo osy $\vec{Y}$ o přímý úhel.

Rovnice (31,1), (31,5), (31,7), (31,9) a (31,11) středové kvadriky, paraboloidu, kužele, válce neparabolického resp. parabolického, nelze již více redukovati, t. j. nahraditi rovnicí s menším počtem členů. Z nich obdržíme normální tvary rovnic těchto druhů kvadrik násobením vhodným faktorem.

V dalším je sestaven přehled těchto normálních tvarů podle druhu kvadriky. V rovnicích se vyskytující koeficienty a, b, c, p, q jsou vesměs reálné a kladné.

1. Středové nesingulární kvadriky.

α) Trojosý hyperboloid jednodílný:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2). \qquad (31,13)$$

Rotační hyperboloid jednodílný o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (31,14)$$

β) Trojosý hyperboloid dvojdílný:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \ (b^2 \neq c^2). \qquad (31,15)$$

Rotační hyperboloid dvojdílný o rotační ose $\vec{X}$:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2 + Z^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (31,16)$$

γ) Trojosý elipsoid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (31,17)$$

(Žádná dvě z čísel a^2, b^2, c^2 se nerovnají.)

---

*) Viz pozn. na str. 62.

Rotační elipsoid o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{31,18}$$

($a^2 \neq c^2$; při $c^2 > a^2$ prodloužený, při $c^2 < a^2$ zploštělý).

Kulová plocha:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 = 0. \tag{31,19}$$

δ) Imaginární elipsoid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0, \tag{31,20}$$

(při a^2, b^2, c^2 navzájem různých trojosý, při $a^2 = b^2 \neq c^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$, při $a^2 = b^2 = c^2$ imaginární plocha kulová).

2. Paraboloidy.

α) Hyperbolický paraboloid:

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} - 2Z = 0. \tag{31,21}$$

β) Eliptický paraboloid:

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} - 2Z = 0, \ (p \neq q). \tag{31,22}$$

Rotační paraboloid o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{p} - 2Z = 0. \tag{31,23}$$

3. Kvadratické kužele. (Čísla a^2, b^2, c^2 jsou určena plochou až na faktor úměrnosti.)

α) Trojosý reálný kužel kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \ (a^2 \neq b^2). \tag{31,24}$$

Rotační reálný kužel o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0. \tag{31,25}$$

β) Imaginární kužel kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0, \tag{31,26}$$

(při a^2, b^2, c^2 vesměs různých trojosý, při $a^2 = b^2 \neq c^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$, při $a^2 = b^2 = c^2$ isotropický).

4. Kvadratické válce.

α) Hyperbolický válec:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{31,27}$$

β) Eliptický válec:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2). \tag{31,28}$$

Rotační válec s rotační osou $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - 1 = 0. \tag{31,29}$$

γ) Imaginární válec kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2) \tag{31,30}$$

(při $a^2 = b^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$).

δ) Parabolický válec:

$$Y^2 - 2pX = 0. \tag{31,31}$$

32. Několik příkladů na transformaci rovnice kvadriky na normální tvar. Velmi běžný v matematických aplikacích jest úkol, z dané rovnice plochy druhého stupně 1. rozpoznati, jakého je druhu; 2. napsati její rovnici ve tvaru normálním; 3. eventuelně napsati i rovnice ortogonální transformace, která transformuje danou rovnici kvadriky v její tvar normální.

Ukážeme na několika typických příkladech, jak tyto úkoly řešíme.

Příklad 1. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv 11x^2 - 4y^2 + 11z^2 + 20xy - 40xz - 20yz + 168x + \\ + 84y - 114z + 315 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 11 - \varrho & 10 & -20 \\ 10 & -4 - \varrho & -10 \\ -20 & -10 & 11 - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\varrho^3 - 18\varrho^2 - 567\varrho - 2916 = 0,$$

má kořeny $\varrho_1 = \varrho_2 = -9$, $\varrho_3 = 36$. Protože žádný z nich není nula, kvadrika může býti jen buď nesingulární středová nebo kužel, a to rotační, neboť dva kořeny se rovnají. Její rovnici lze redukovati na tvar (viz (31,1) resp. (31,7))

$$-9\,(X^2 + Y^2) + 36Z^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} zbývá určiti (při $a''_{44} = 0$ by plocha byla kuželem, při $a''_{44} \neq 0$ je nesingulární). Řešení x_0, y_0, z_0 soustavy rovnic

$$f_1(x, y, z) \equiv 11x + 10y - 20z + 84 = 0,$$
$$f_2(x, y, z) \equiv 10x - 4y - 10z + 42 = 0,$$
$$f_3(x, y, z) \equiv -20x - 10y + 11z - 57 = 0,$$

jsou souřadnice buď středu nebo singulárního bodu kvadriky. Vychází jediné řešení $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = -\frac{1}{3}$, $z_0 = \frac{11}{3}$. Nyní konečně určíme $a''_{44} = f_4(x_0, y_0, z_0)$ podle (31,4). Je $f_4(x, y, z) = 84x + 42y - 57z + 315$, takže $a''_{44} = 36$ a kvadrika je nesingulární. Z její redukované rovnice $-9\,(X^2 + Y^2) + 36Z^2 + 36 = 0$ obdržíme krácením číslem -36 tvar normální

$$\frac{X^2 + Y^2}{4} - Z^2 - 1 = 0.$$

Je to podle (31,14) rovnice rotačního hyperboloidu jednodílného o rot. ose $\vec{Z}$; $a^2 = b^2 = 4$, $c^2 = 1$.

Abychom ještě určili rovnice transformace, která danou rovnici $f(x, y, z) = 0$ převádí na právě nalezený tvar normální, určeme směrové parametry rotační osy vzhledem k původní soustavě souřadnic. Nalezneme je z kterýchkoliv dvou rovnic soustavy (29,9) pro $i = 3$, na př. z rovnic

$$-25l_3 + 10m_3 - 20n_3 = 0,$$
$$10l_3 - 40m_3 - 10n_3 = 0,$$

odkud

$$l_3 : m_3 : n_3 = \left\| \begin{matrix} -5 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{matrix} \right\|,$$

t. j. $l_3 : m_3 : n_3 = 2 : 1 : -2$. Podle (4,6) určíme směrové kosiny rotační osy

$$\cos \alpha_3 = \tfrac{2}{3}, \ \cos \beta_3 = \tfrac{1}{3}, \ \cos \gamma_3 = -\tfrac{2}{3}.$$

Její směr je hlavní směr isolovaný, korespondující jednoduchému kořeni ϱ_3, a nová soustava souřadnic má osu $\vec{Z}$ tohoto směru. Směry os $\vec{X}$ a $\vec{Y}$ můžeme voliti libovolně, ovšem tak, aby byly kolmy navzájem i k ose $\vec{Z}$. Determinant δ ze směrových kosinů os [viz (12,5), (12,7), (12,8)] musí míti hodnotu $+1$. Tomu vyhovuje volba, patrná ze schematu (12,7), k němuž je praktické připojiti souřadnice x_0, y_0, z_0, takže toto schema pro náš příklad jest

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\vec{Z}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

Podle něho snadno napíšeme hledané rovnice transformace (12,4)

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{2}{3}X + \tfrac{1}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z - \tfrac{2}{3}, \\ y &= \tfrac{2}{3}X + \tfrac{2}{3}Y + \tfrac{1}{3}Z - \tfrac{1}{3}, \\ z &= -\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}Y - \tfrac{2}{3}Z + \tfrac{11}{3}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li podle nich za x, y, z do dané rovnice kvadriky, vychází nalezený normální tvar rovnice plochy, čímž je potvrzena správnost jak jeho, tak rovnic transformačních, t. j. směrových kosinů osy i souřadnic středu.

Příklad 2. Dána kvadrika rovnicí

$$f(x, y, z) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + \sqrt{2}\,.\,xz - \sqrt{2}\,.\,yz - \\ - \sqrt{2}\,.\,x - \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 2-\varrho & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 2-\varrho & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 3-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. $\varrho^3 - 7\varrho^2 + 14\varrho - 8 = 0$, má kořeny $\varrho_1 = 4$, $\varrho_2 = 2$, $\varrho_3 = 1$. Protože žádný z nich není nula, kvadrika může býti jen buď nesingulární středová nebo kužel. Její rovnici lze redukovati na tvar [viz (31,1) resp. (31,7)]

$$4X^2 + 2Y^2 + Z^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} zbývá určiti. K tomu cíli — stejně jako v minulém příkladě — řešme nejdříve soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &\equiv 2x - y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0, \\ f_2(x, y, z) &\equiv -x + 2y - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0, \\ f_3(x, y, z) &\equiv \tfrac{1}{2}\sqrt{2}x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}y + 3z = 0, \end{aligned}$$

mající jediné řešení $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_0 = 0$. Z $f_4(x, y, z) \equiv$ $\equiv -\frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y + 1$ vypočteme podle (31,4) $a''_{44} =$ $= f_4(x_0, y_0, z_0) = 0$, takže kvadrika je kužel s rovnicí o normálním tvaru (srovnej s 31,26)

$$X^2 + \tfrac{1}{2}Y^2 + \tfrac{1}{4}Z^2 = 0.$$

Je to trojosý kužel imaginární.

K určení transformace, převádějící danou rovnici kvadriky na právě nalezený normální tvar vycházejí z prvých dvou rovnic soustavy (29,9) s $i = 1$, t. j. z rovnic

$$\begin{aligned} -2l_1 - m_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}n_1 &= 0, \\ -l_1 - 2m_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}n_1 &= 0, \end{aligned}$$

směrové parametry prvního hlavního směru $l_1 : m_1 : n_1 =$ $= \sqrt{2} : -\sqrt{2} : 2$, a podle (4,6) jeho směrové kosiny

$$\cos\alpha_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Stejným způsobem obdržíme pro další dva hlavní směry ze soustav rovnic (29,9) s $i = 2$ resp. $i = 3$ trojice směrových kosinů

$$\cos\alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

a $$\cos\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\beta_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\gamma_3 = 0.$$

Kdyby determinant δ ze směrových kosinů měl hodnotu -1, stačí — a je dovoleno — změniti znaménka všech kosinů jedné trojice, načež bude $\delta = +1$. V našem případě tato podmínka je splněna.

Nalezené směrové kosiny a souřadnice vrcholu opět sestavme v schema

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Z}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0

,

z něhož snadno sestavíme hledané rovnice transformace

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\\
y &= -\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\\
z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y,
\end{aligned}
$$

o nichž se snadno přesvědčíme dosazením za x, y, z do dané rovnice kvadriky, že jsou správné stejně jako nalezený tvar normální.

Příklad 3. Dána rovnice kvadriky $f(x, y, z) \equiv 2xy + 2y + z = 0$.

Její charakteristická rovnice

$$
D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} -\varrho & 1 & 0 \\ 1 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0
$$

má kořeny $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = -1$, $\varrho_3 = 0$, jejichž označení je tak voleno, aby bylo $\varrho_1 > \varrho_2$, jak je tomu v (31,5). Protože jeden z kořenů je nula, kvadrika — není-li složena z rovin — je buď paraboloid, nebo neparabolický válec. To musíme rozhodnouti nejdříve. Za tím účelem určeme hlavní směry náležející kořenům ϱ_1, ϱ_2. Parametry prvého z nich vyhovují soustavě rovnic (29,9) s $i = 1$, z nichž poslední dvě jsou $l_1 - m_1 = 0$, $n_1 = 0$, odkud $l_1 : m_1 : n_1 = 1 : 1 : 0$. Stejně ze soustavy (29,9) s $i = 2$ vychází $l_2 : m_2 : n_2 = 1 : -1 : 0$. (Zkontrolujte, jsou-li oba hl. směry kolmé!) Hlavní roviny kvadriky náležející těmto hlavním směrům jsou polární roviny nevlastních bodů (1; 1; 0; 0) resp. (1; — 1; 0; 0), t. j. roviny $f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z) = 0$.

Odtud vycházejí jejich rovnice

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{a} \quad x - y + 1 = 0.$$

Spolu s danou rovnicí kvadriky tvoří rovnice těchto hlavních rovin soustavu, již řešiti znamená určiti společný bod V průsečnice o obou hlavních rovin — t. j. osy kvadriky — s plochou. Směr této osy je patrně třetí hlavní směr kvadriky, odpovídající kořeni $\varrho_3 = 0$. Proto jeden z průsečíků osy o s kvadrikou je nevlastní bod S_3, singulární bod singulární kuželosečky h_3 charakteristického svazku.

Druhý průsečík, jak řešením zmíněné soustavy vychází, je bod $V(-1; 0; 0)$. Kdyby i ten byl nevlastní, kvadrika by byla neparabolický válec. V našem případě je tedy rozhodnuto, že daná kvadrika je paraboloid o ose o a vrcholu V.

Jeho rovnici lze redukovati na tvar (31,5), t. j. na

$$X^2 - Y^2 + 2a''_{34}Z = 0,$$

kde a''_{34} vypočteme podle (31,6).

Protože $A = \frac{1}{4}$, je $a''_{34} = -\frac{1}{2}$, kde znaménko je zvoleno opačné, než znaménko kořene ϱ_1. Násobíme-li ještě redukovanou rovnici paraboloidu dvěma, obdržíme její normální tvar

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} - 2Z = 0,$$

z něhož srovnáním s (31,21) je patrno, že paraboloid je hyperbolický (s $p = q$, což je t. zv. rovnostranný paraboloid).

K určení transformačních rovnic vypočtěme nejdříve směrové kosiny osy $o = \vec{Z}$. Dosazením $i = 3$ do (29,9) vzniká soustava rovnic, z nichž prvé dvě jsou

$$a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 = 0,$$
$$a_{12}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 = 0.$$

Zavedeme-li označení

$$a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_1, \quad a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23} = a_2, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_3,$$

vychází z těchto rovnic směrové kosiny osy o

$$\cos\alpha_3 = \lambda a_1, \quad \cos\beta_3 = \lambda a_2, \quad \cos\gamma_3 = \lambda a_3,$$

kde $\lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$. Znaménko faktoru λ zvolme shodné se znaménkem koeficientu a''_{34}, t. j. opačné než znaménko kořene ϱ_1.*)

Tak obdržíme v našem případě

$$\cos\alpha_3 = 0, \quad \cos\beta_3 = 0, \quad \cos\gamma_3 = -1.$$

Vypočtěme ještě trojice směrových kosinů hlavních směrů, náležejících kořenům ϱ_1 a ϱ_2, z již známých trojic jejich směrových parametrů; znaménka volme opět tak, aby bylo $\delta = +1$,

Tak nalezneme schema

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Z}$	0	0	-1
V	-1	0	0

kde v posledním řádku jsou připojeny souřadnice vrcholu V paraboloidu.

Podle něho snadno napíšeme hledané rovnice ortogonální transformace

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(X + Y) - 1, \\ y &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(X - Y), \\ z &= -Z. \end{aligned}$$

Neopomeňme nikdy zkontrolovati správnost výpočtu dosazením za x, y, z podle rovnic transformace do dané rovnice kvadriky.

Příklad 4. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv 8x^2 + 20y^2 + 17z^2 - 8xy - 20xz + 28yz + 24y + 12z - 316 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 8-\varrho & -4 & -10 \\ -4 & 20-\varrho & 14 \\ -10 & 14 & 17-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili $\varrho^3 - 45\varrho^2 + 324\varrho = 0$, má kořeny $\varrho_1 = 9$, $\varrho_2 = 36$, $\varrho_3 = 0$.

*) O významu této volby viz na př. Bydžovský, Úvod do anal. geometrie, str. 356 a 366.

Protože pouze jeden z nich je nula, kvadrika — není-li složena z rovin — je buď paraboloid nebo neparabolický válec. To musíme rozhodnouti nejdříve.

Za tím účelem určeme hlavní směry náležející oběma od nuly různým kořenům ϱ_1 a ϱ_2. Ze soustavy (29,9) s $i = 1$ vychází (stačí prvé dvě rovnice) $l_1 : m_1 : n_1 = 2 : 2 : -1$, kdežto pro $i = 2$ táž soustava dává $l_2 : m_2 : n_2 = -1 : 2 : 2$. Hlavní roviny, kolmé na tyto směry, jsou polární roviny bodů $(2; 2; -1; 0)$ resp. $(-1; 2; 2; 0)$, t. j. roviny

$$2f_1(x, y, z) + 2f_2(x, y, z) - f_3(x, y, z) = 0$$

resp. $$-f_1(x, y, z) + 2f_2(x, y, z) + 2f_3(x, y, z) = 0;$$

protože jest

$$f_1(x, y, z) \equiv 8x - 4y - 10z, \; f_2(x, y, z) \equiv -4x + 20y + 14z + 12,$$
$$f_3(x, y, z) \equiv -10x + 14y + 17z + 6,$$

zní rovnice těchto hlavních rovin po zkrácení

$$2x + 2y - z + 2 = 0$$

resp. $$x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

Jejich průsečnice — osa o kvadriky — protíná rovinu $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$ v bodě $\Omega\,(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0)$ a její směrové parametry jsou $l_3 : m_3 : n_3 = 2 : -1 : 2$. Podle (6,6) parametrické rovnice osy o jsou

$$x = -\tfrac{1}{3} + 2t, \; y = -\tfrac{2}{3} - t, \; z = 2t.$$

Abychom určili její průsečíky s kvadrikou (o jednom víme napřed, že to je její dotykový bod s rovinou nevlastní S_3), dosaďme podle těchto parametrických rovnic za x, y, z do dané rovnice kvadriky, čímž obdržíme obecně rovnice druhého stupně v t. V našem příkladě však koeficienty při t^2 i při t v této rovnici jsou nuly, zatím co prostý člen má hodnotu -324. K tomuto sporu jsme došli, protože žádný z obou průsečíků osy o s kvadrikou není vlastní bod, nýbrž oba jsou nevlastní a ztotožňují se v S_3. Kvadrika je proto neparabolický válec o ose o. (Je tedy $A = 0$.) Jeho zredukovaná rovnice (31,9) zní

$$9X^2 + 36Y^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} určíme podle na př. třetího ze vzorců (31,10). Je $A_{33} = -46\,656$, $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 144$, proto $a''_{44} = -324$ a redukovaná rovnice zní $9X^2 + 36Y^2 - 324 = 0$, t. j. po krácení číslem 324

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0,$$

což je podle (31,28) normální rovnice eliptického válce.

Transformace převádějící danou rovnici válce na právě nalezený normální tvar je složena z pootočení okolo počátku a z translace, po které počátek nové souřadnicové soustavy se ztotožní s kterýmkoliv bodem osy válce, na př. s bodem Ω. Schema této ortogonální transformace proto je

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\vec{Y}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\vec{Z}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ω	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

Podle něho hledané rovnice transformace jsou

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}X - \tfrac{1}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z - \tfrac{1}{3}, \\ y &= \tfrac{2}{3}X + \tfrac{2}{3}Y - \tfrac{1}{3}Z - \tfrac{2}{3}, \\ z &= -\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z, \end{aligned}$$

o jejichž správnosti se dosazením do dané rovnice snadno přesvědčíme.

Příklad 5. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 2\sqrt{2} \, . \, z - 8 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \varrho & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \varrho & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili $\varrho^3 - 2\varrho^2 = 0$, má dvojnásobný kořen $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$, a jednoduchý $\varrho_2 = 2$. Kvadrika je proto buď parabolický válec, anebo je složena ze dvou rovnoběžných rovin. To musíme vyšetřiti nejdříve.

Nenulovému kořeni $\varrho_2 = 2$ náleží hlavní směr, jehož parametry podle (29,9), kde $i = 2$, vyhovují rovnicím $l_2 + m_2 = 0$, $n_2 = 0$, takže lze klásti $l_2 : m_2 : n_2 = 1 : -1 : 0$. Hlavní rovina, náležející k témuž hlavnímu směru, t. j. polární rovina bodu $(1; -1; 0; 0)$, má rovnici $f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) = 0$, t. j. $x - y = 0$.

Podle průsečné čáry této hlavní roviny s danou plochou lze rozhodnouti o jejím druhu. Je-li totiž průsečná čára složena ze dvou přímek, z nichž jen jedna je nevlastní, plocha je parabolický válec; jsou-li obě tyto přímky nevlastní, nebo je-li uvažovaná hlavní rovina částí kvadriky, jedná se o plochu složenou z rovin.

V našem příkladě průsečná čára hlavní roviny $x - y = 0$ s danou kvadrikou, jejíž rovnici lze psáti $(x - y)^2 + 2(x + y - z\sqrt{2} - 4) = 0$, je — jak by po homogenisaci obou rovnic bylo zřejmo — složena z nevlastní přímky této hlavní roviny a z přímky vlastní, ležící též v rovině $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$, která zřejmě je na rovinu $x - y = 0$ kolma.

Daná plocha je tedy **parabolický válec**, jehož hlavní rovina $x - y = 0$ jej protíná v t. zv. **vrcholové tvořící přímce**, podél níž se jej dotýká rovina $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$. Z rovnic obou rovin, které určují vrcholovou přímku, snadno vypočteme její směrové parametry

$$l_3 : m_3 : n_3 = 1 : 1 : \sqrt{2},$$

odkud vycházejí její směrové kosiny

$$\cos \alpha_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos \beta_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos \gamma_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

což je v souhlase s (29,9). Ve vrcholové tvořící přímce zvolíme novou osu $\overrightarrow{Z}$, kdežto osu $\overrightarrow{Y}$ zvolíme v onom hlavním směru, který náleží kořeni jednoduchému, jehož směrové parametry $l_2 : m_2 : n_2$ již dříve byly vypočteny. Z nich vycházejí jeho směrové kosiny

$$\cos \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos \beta_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos \gamma_2 = 0.$$

Třetí hlavní směr volíme k oběma prvým kolmý, takže jeho směrové parametry lze vypočísti způsobem patrným z (7,4) a z nich směrové kosiny

$$\cos \alpha_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos \beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos \gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

jejichž znaménka byla zvolena tak, aby bylo $\delta = +1$.

Rovnici plochy lze podle (31,11) a ve shodě s volbou nových os souřadnic redukovati na tvar

$$2Y^2 + 2a''_{14}X = 0,$$

kde a''_{14} vypočteme podle (31,12).

Protože je $A_{11} = -2$, $A_{22} = -2$, $A_{33} = -4$, je $a''_{14} = \pm\sqrt{4}$ a — rozhodneme-li se pro dolní znaménko — je $a''_{14} = -2$ a **normální tvar rovnice daného parabolického válce** zní

$$Y^2 - 2X = 0.$$

Je ovšem též možno k této rovnici dojíti skutečným provedením ortogonální transformace souřadnicové soustavy. K napsání rovnic transformace potřebujeme k již známým směrovým kosinům nových os určiti souřadnice kteréhokoliv bodu na vrcholové tvořící přímce.

Z rovnic rovin $x - y = 0$, $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$, jimiž je tato přímka určena, vyplývá, že bod $\Omega\,(0; 0; -2\sqrt{2})$ na ní leží. Lze tedy rovnice transformace napsati podle schematu

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Z}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Ω	0	0	$-2\sqrt{2}$

t. j.

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y + \tfrac{1}{2}Z, \\ y &= -\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y + \tfrac{1}{2}Z. \\ z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Příklad 6. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2y - 1 = 0.$$

Její rovnice charakteristická

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 1-\varrho & 0 & 1 \\ 0 & -1-\varrho & 0 \\ 1 & 0 & 1-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\varrho^3 - \varrho^2 - 2\varrho = 0,$$

má kořeny $\varrho_1 = 2$, $\varrho_2 = -1$, $\varrho_3 = 0$. Není-li daná kvadrika složena z rovin, je proto buď paraboloid nebo neparabolický válec. Abychom o tom rozhodli, určeme oba hlavní směry a k nim příslušné hlavní roviny, korespondující kořenům ϱ_1 a ϱ_2. Známým způsobem nalezneme řešením soustavy (29,9) pro $i = 1$ resp. $i = 2$

$$l_1 : m_1 : n_1 = 1 : 0 : 1 \text{ resp. } l_2 : m_2 : n_2 = 0 : 1 : 0.$$

Hlavní rovina náležející k prvému resp. druhému z nich je polární rovina nevlastního bodu (1; 0; 1; 0) resp. (0; 1; 0; 0);

je tedy rovnice prvé hlavní roviny $f_1(x, y, z) + f_3(x, y, z) = 0$, druhé $f_2(x, y, z) = 0$, t. j. $x + z = 0$ a $y + 1 = 0$. O druhu kvadriky nyní rozhodnou průsečíky osy o — která je společnou přímkou obou určených hlavních rovin — s kvadrikou. Snadno zjistíme, že po dosazení $y = -1$, $z = -x$ do dané rovnice kvadriky vznikne identita, t. j. všechny body osy náleží ploše, která je proto nutně složena z rovin osou o procházejících. Obě tyto roviny, náležejíce svazku o ose o, mají rovnice tvaru

$$\lambda_1 (x + z) + \lambda_2 (y + 1) = 0$$

a

$$\mu_1 (x + z) + \mu_2 (y + 1) = 0.$$

Znásobením obou rovnic a porovnáním koeficientů součinu levých stran s koeficienty dané rovnice kvadriky — nebo jiným způsobem — zjistíme, že jest $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$ a daná kvadrika je složena z rovin o rovnicích $x - y + z - 1 = 0$ a $x + y + z + 1 = 0$.

Příklady k cvičení. V příkladech **113—121** určete z dané rovnice kvadriky její druh, napište normální tvar její rovnice, jakož i rovnice příslušné ortogonální transformace!

113. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0$ [trojosý elipsoid $\frac{1}{2}X^2 + Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 - 1 = 0$, transformace $x = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y - \frac{2}{3}Z + 1$, $y = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}Z - 2$, $z = \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}Y - \frac{1}{3}Z - 1$].

114. $7x^2 + 100y^2 - 48xz - 7z^2 + 62x - 100y - 34z + 98 = 0$ [dvojdíl. hyperboloid trojosý $X^2 - Y^2 - 4Z^2 - 1 = 0$; transf. rovnice $x = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - 1$, $y = Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y + 1$].

115. $2x^2 + 2y^2 + 4xz + 4yz - 8x - 12y + 1 = 0$ [trojosý kužel $\frac{1}{2}X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 0$, transf. rovnice $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{6}\sqrt{6}Z - \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{6}\sqrt{6}Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{3}\sqrt{6}Z + \frac{5}{3}$].

116. $315x^2 + 216xy + 66y^2 + 24xz + 240yz + 464z^2 - 216x + 882y - 578z - 441 = 0$ [elipt. paraboloid $X^2 + \frac{2}{3}Y^2 - 2Z = 0$, transf. rovnice $x = \frac{3}{13}X - \frac{12}{13}Y + \frac{4}{13}Z - \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{13}X - \frac{3}{13}Y - \frac{12}{13}Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{12}{13}X + \frac{4}{13}Y + \frac{3}{13}Z + \frac{1}{4}$].

117. $3(x^2 + y^2 + z^2) + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0$ [eliptický válec $\frac{1}{5}X^2 + \frac{2}{5}Y^2 - 1 = 0$, transform. rovnice $x = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y + \frac{2}{3}Z - 1$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(Y - Z)$, $z = -\frac{2}{3}\sqrt{2}X + \frac{1}{6}\sqrt{2}(Y + Z) + 1$].

118. $16x^2 - 96xy + 144y^2 + 24xz - 72yz + 9z^2 - 133x - 108y - 480z + 20\frac{1}{4} = 0$ [parabolický válec $Y^2 - 3X = 0$, transf. rovnice $x = \frac{1}{13}(3X + 4Y + 12Z)$, $y = \frac{1}{13}(4X - 12Y + 3Z) - \frac{7}{48}$, $z = \frac{1}{13}(12X + 3Y - 4Z) + \frac{1}{12}$].

119. $4x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 11xy + 14xz + 13yz + 17x + 14y + 11z + 4 = 0$ [dvě různoběž. roviny $x + 2y + 3z + 4 = 0$ a $4x + 3y + 2z + 1 = 0$].

120. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$ [dvě rovnoběž. roviny $x + y + z + 1 = 0$ a $x + y + z - 1 = 0$].

121. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 4x + 2y - 4z + 1 = 0$ [dvakrát počítaná rovina $2x - y + 2z - 1 = 0$].

122. Determinant $D(\varrho_1)$ má všechny minory druhého řádu rovny nule, jestliže $\varrho_1 = \varrho_2$ je dvojnásobný kořen rovnice $D(\varrho) = 0$. — Dokažte tuto větu alespoň za předpokladu, že hlavní směr náležející jednoduchému kořeni ϱ_3 je směr osy $\vec{z}$ (viz odst. 29). [Za tohoto předpokladu je $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ $a_{11} = a_{22} = \varrho_1$, $a_{33} = \varrho_3$ a v determinantu $D(\varrho_1)$ je pouze jeden prvek od nuly různý, čímž věta dokázána.]

123. Jaká jest kvadrika, v jejíž rovnici souhrn kvadratických členů $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ lze rozložiti v součin dvou lineárních trojčlenů [paraboloid, válec neparabolický, nebo dvě nikoliv rovnoběžné roviny, neliší-li se oba činitelé pouhým konstantním faktorem — v opačném případě plocha je parabolický válec, dvě roviny rovnoběžné nebo rovina dvakrát počítaná].