Aritmetické hry a zábavy

14. Aritmetická paradoxa a sofismata

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 67–[74].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403042

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

$- \gamma_n)$; 2. n je liché: $\widehat{AA}_{n-1} \sim 180^\circ + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma - \gamma_n)$. Poněvadž pro n ustavičně rostoucí jest $\alpha_\infty = \beta_\infty = \gamma_\infty = 60^\circ$, jest v prvním případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\gamma - 120^\circ = \frac{2}{3}(180 - \beta - \gamma) - 120^\circ = \frac{2}{3}(\gamma - \beta)$ a v druhém případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}(\gamma - \beta) + 180^\circ$, takže výsledné trojúhelníky (oba rovnostranné) jsou vlastně dva. (Uvažte důvod.)

O konvergenci geometrických řad viz v odstavci následujícím.

14.

ARITMETICKÁ PARADOXA A SOFISMATA.

Matematickými sofismaty nebo paradoxy nazýváme zřejmě nesprávné výsledky odvozené zdánlivě správným způsobem. Školený čtenář snadno nalezne chybu; vždy se jedná o nesprávné, nebo neúplné použití některé matematické poučky.

1. Budiž $a \neq b$, $a + b = c$, pak jest $a = c - b$, $b = c - a$. Jistě jest $a(c - a) = b(c - b)$, odečtěme na obou stranách ab: vyjde nám $a(c - a - b) = b(c - b - a)$. Krátíme-li nyní $c - a - b$, obdržíme $a = b$, což jest v rozporu s předpokladem. Jest totiž $c - a - b = 0$, a nulou děliti ani krátiti nelze.

2. Budiž $a^2 - b = c^2 - d$, $a \neq c$ a předpokládejme $b : a = d : c$. Přičtěme na obou stranách $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{d^2}{4c^2}$; na obou stranách dostaneme úplné čtverce, po jichž odmocnění jest $a - \frac{b}{2a} = c - \frac{d}{2c}$. Přičtěme nyní na obou stranách $\frac{b}{2a} = \frac{d}{2c}$, čímž obdržíme $a = c$. Při odmocňování jsme totiž zapomněli, že nutno psáti

$$a - \frac{b}{2a} = \pm\left(c - \frac{d}{2c}\right)$$

a že jest nutno vzíti znaménko dolní; pak je $a - \frac{b}{2a} = -$ $-c + \frac{d}{2c}$, čili $a + c = \frac{b}{2a} + \frac{d}{2c} = \frac{bc + ad}{2ac} = \frac{2bc}{2ac} = \frac{b}{a}$ a posléze $a(a + c) = b$; k témuž výsledku však dojdeme, když do první rovnice dosadíme $d = \frac{bc}{a}$; jest totiž $a^2 - b =$ $= c^2 - \frac{bc}{a}$, čili $(a - c)(a + c) = \frac{b}{a}(a - c)$ a po krácení $a - c$ skutečně $a + c = \frac{b}{a}$.

3. Vyjděme z rovnice $2 \log a > \log a$, čili $\log a^2 > \log a$, a proto $a^2 > a$. Na př. pro $a = \frac{1}{2}$, jest $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. Nesmíme zapomenout, že první rovnice platí, pokud $\log a > 0$, t. j. $a > 1$.

Podobně jest $3 > 2$, a též $3^m > 2^m$, tedy pro $m = -1$ je $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$; druhá rovnice však platí jen pro $m > 0$.

4. Ve vyšší matematice se dokazuje, že součet nekonečné řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ jest $\log 2$, kde log značí přirozený logaritmus. Násobme tuto řadu dvěma:

$$2 \log 2 = 2 - 1 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

čili

$$\log 4 = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Sčítance kladné i záporné zůstaly tytéž, jen jejich pořad se vyměnil a přec jen součet řady zvětšil se dvakráte. — Zde se dopouštíme této chyby: Věta, že ve sčítání lze zaměniti pořad kladných i záporných sčítanců, platí jen v tom případě, že počet sčítanců jest konečný; toto pravidlo nesmíme tak beze všeho přenésti na součty o nekonečně mnoha sčítancích čili na nekonečné řady.

4. Něco podobného platí i o nekonečných součinech. Uvažujme o nekonečném součinu $(1 + 1)(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})$.

$\cdot\,(1 - \frac{1}{4}) \ldots$; podržíme-li prvních n činitelů, obdržíme $s_{2n} = 1$, podržíme-li $2n + 1$ prvních činitelů, jest jejich součin $\frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$, necháme-li n ustavičně vzrůstati, jest $\frac{1}{2n+1} = 0$, takže hodnota součinu jest opět 1. Pravíme prostě: Součin s má hodnotu 1. — Ukažme především, že součin $s_1 = (1 + \;)(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5}) \ldots \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$ s rostoucím n roste nad každou mez; jest totiž

$$s_1 > 1 + 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{17}\right) + \ldots > 2 + \frac{2}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

takže učiníme-li takových souhrnů n, jest $s_1 > 2 + \frac{n}{4}$; zřejmě tedy s_1 s rostoucím n roste nad každou mez, nebo jak říkáme, roste do nekonečna.

Ukážeme nyní, že první součin s lze změnou pořadu činitelů změniti v jiný součin, jehož činitelé jsou vesměs větší než 1, takže jeho hodnota jest větší než 1, což jest v rozporu s prvním tvrzením. Vezměme vždy tolik činitelů se znaménkem kladným a jeden se znaménkem záporným, aby jejich součin byl větší než 1, na př. $1 + 1$; $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7}) \cdot (1 + \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{64}{63}$.

Nyní vytvořme další součin tak, aby

$$\left(1 + \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{11 + 2n - 2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) > 1,$$

čili $\left(1 + \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{11 + 2n - 2}\right) > \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

Stačí tedy voliti n tak, aby

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{9+2n}>\frac{1}{3},$$

což nastane, volíme-li n tak, aby $\frac{n}{9+2n}>\frac{1}{3}$, t. j. $n>9$; na př. $n=10$. Jest tedy

$$\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{29}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)>1.$$

Nyní bychom hledali n tak, aby

$$\left(1+\frac{1}{31}\right)\left(1+\frac{1}{33}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{31+2n-2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)>1;$$

týmž postupem bychom stanovili $n>\frac{29}{3}$, stačí tedy $n=10$, atd.

Vhodné n jsme s to vždy nalézti, jelikož hodnota součinu s roste nad každou mez, takže naše zásoby jsou nevyčerpatelné.

5. Čtenář obeznámený s derivováním funkcí jedné proměnné ví, že derivace $\sin^2 x$ a $-\cos^2 x$ jest táž jsou rovna $2\sin x\cos x$; nelze však z toho usuzovati, že $\sin^2 x = (-\cos^2 x)$! Příslušná poučka zní: Funkce lišící se o konstantu mají derivace stejné, skutečně v našem případě jest $\sin^2 x-(-\cos^2 x)=1$.

6. Pojem konvergence řad se tříbil velmi zvolna a lze říci, že úplně objasněn byl až matematiky z počátku předešlého století. Jest tedy přirozeno, že v dřívějších dobách objevily se některé výsledky, na něž se dnes díváme s úsměvem, předkládajíce je začátečníkům jako snadno vysvětlitelná sofismata. Současník Jakuba Bernoulliho, italský matematik Grandi, provedl obvyklým způsobem dělení $1:(1+x)$ s výsledkem $1-x+x^2+x^3+x^4-\ldots$ a položil do tohoto výsledku $x=1$. Na levé straně obdržel $\frac{1}{2}$; sečetl-li na pravé straně sudý počet členů, obdržel 0, součet

lichých členů pak jest vždy 1. Jest tedy buď $0 = 1$, nebo $0 = \frac{1}{2}$ a tedy též $\frac{1}{2} = 1$, takže po násobení dvěma jest $1 = 2$ atd. Vysvětlení jest pro nás velmi jednoduché: podíl $1 - x + x^2 + x^3 + \ldots$ jest vlastně geometrická řada, která konverguje jen tenkráte, když $-1 < x < 1$: nelze tedy dosazovati ani $x = -1$, ani $x = +1$. Grandi si však při svém výkladu pomáhal touto historkou: Otec umírá, má dva syny a rozkáže, aby se o zbylé jmění rozdělili naprosto stejným způsobem. Jeho přání jest splněno, zbývá však jen drahocenný prsten, který dědicové nechtějí rozpůliti. I dohodnou se, že jeden rok bude nosit tento prsten první, druhý rok pak druhý syn a opět první a po něm druhý atd. Majetek vztahující se k prstenu prý jest dán řadou $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$: tedy každý z bratrů prsten má i nemá a oba jej mají na polovičku.

Jak vysvětlíte toto paradoxon: $\dfrac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - x^{m+2n} + \ldots$, $m < n$; dosadíme-li $x = 1$, jest napravo opět řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, vlevo pak $\dfrac{m}{n}$; takže $0 = 1 = \dfrac{m}{n}$?

7. Paradoxně zní i tento výsledek: Obec má povinnost jednou za třicet let provésti opravu mostu nákladem 1000 K; kolik musí najednou složit, aby se své povinnosti jednou pro vždy zbavila? Při první úvaze zdá se, že se jedná o částku nesmírně velikou, ne-li nekonečně velikou; avšak — postavila-li obec právě most, jest hodnota příštích povinných splátek dána konvergentní geometrickou řadou:

$$\frac{1000}{r^{30}} + \frac{1000}{r^{40}} + \frac{1000}{r^{50}} + \ldots = \frac{1000}{r^{30} - 1}, \quad r = 1 + \frac{p}{100},$$

p počet procent.

8. Množinou nazýváme soubor věcí přesně definovaných — na př. množinou jest prvních deset čísel celých, nebo

všechna čísla celá, nebo všechna čísla dělitelná sedmi; množinou jsou všechny body, v nichž se protíná n přímek, nebo všechny body na kružnici; množinu však tvoří na př. všechny body v Baťově prodejně. Množinou jest však i soubor i jiných množin, na př. množina množin čísel dělitelných 7, nebo 11, nebo 13. Jsou pak dva druhy množin: První druh jsou množiny, které obsahují samy sebe jako prvek; sem patří na př. množina všech abstraktních pojmů, poněvadž pojem množiny abstraktních pojmů jest rovněž abstraktní pojem. K druhému druhu náleží množiny, které nejsou samy sobě prvkem, na př. množina 2, 4, 6, 8. Každá množina jest tedy buď prvního, nebo druhého druhu. Uvažujme nyní množinu, jejíž prvky jsou všechny množiny druhého druhu, nazvěme ji M. Má-li patřiti k prvnímu druhu, musí obsahovati sebe jako prvek, ale to odporuje způsobu, jakým byla utvořena. Musí tedy patřiti k množinám druhého druhu. Tu by však náležela M do M — což jest opět proti jejímu výtvarnému zákonu.

Jsou však úlohy, jež svým řešením překvapují ne méně než paradoxa. Na př. lze dokázati, že v Praze jsou aspoň dva lidé, kteří mají týž počet vlasů na hlavě — výsledek jest samozřejmý, uvědomíme-li si, že počet obyvatelstva Prahy blíží se milionu, kdežto počet vlasů nedosahuje čtvrt milionu. Základní myšlenky této úlohy, za jejíhož původce bývá pokládán Voltaire, užívá se často v matematických důkazech, a lze jí dáti tento přehledný text: Máme-li m skřínek a v nich $n > m$ penízů, jistě aspoň v jedné skřínce jsou dva peníze. Neboť kdyby v každé skřínce byl nejvýše jeden peníz nebo právě po jednom penízi, bylo by ve skřínkách nejvýše m penízů, bylo by nejméně $n - m$ penízů mimo skřínky — proti předpokladu.

Překlady. 1. Dívka má na půdě pět párů punčoch bílých a pět černých. Jde-li si po tmě pro punčochy určité barvy (na př. bílé), kolik ~~párů~~ punčoch si musí vzíti, aby měla jistě 2 punčochy volené barvy? (12.) (Chce-li však obléci punčochy stejné barvy — aniž jí záleží na tom, zdaž jsou bílé nebo černé, stačí, přinese-li si punčochy tři.)

2. Pavel jest dlužen Karlovi 102 K; Karel ho vyzve, aby mu dlužnou částku poslal jedinou poštovní poukázkou. Porto na částku činí 2 K; strhne-li si je Pavel, má poslati pouze 100 K, na něž stačí porto 1 K; vydělává tedy 1 K proti svolení Karlovu. Strhne-li si však pouze 1 K, má poslati částku 101 K a musí platiti porto 2 K, zkracuje tedy sebe o 1 K. — Jest to tedy úloha v jistém smyslu neřešitelná, leč bychom připustili zaslání této částky dvěma poštovními poukázkami po 50 K; pak na každou nutno dáti korunové porto, čímž povolená srážka jest vyčerpána.