	M	N
do 1699	22	2
1700—1799	23	3
1800—1899	23	4
1900—1999	24	5
2000—2099	24	5
2100—2199	24	6
2200—2299	25	0
2300—2399	26	1
2400—2499	25	1

velikonoce jsou pak buď $22 + d + e$ března nebo $d + e - 9$ dubna. Nejnižší možné datum jest 22. března, t. j. $d = e = 0$; lze snadno ukázati, že v době 1600—2499 nastalo nebo nastane v letech: 1693, 1761, 1818, 2285, 2353, 2437. I datum nejblíže vyšší jest vzácné, 23. III. byla velikonoční neděle posledně v r. 1913.

O nejzazším datu pak platí: Vyjde-li $d = 29$, $l = 6$, takže velikonoční neděle by měla býti $29 + 6 - 9 = 26$. dubna, volí se vždy datum 19. dubna; tak tomu bude r. 1981. Vypočteme-li však $d = 28$, $e = 6$, a je-li mimo to zbytek při dělení $11(M + 1)$ třiceti menší než 19, jsou velikonoce 18. IV, nikoliv 25. IV. Nejzazší datum 25. dubna jest velmi vzácné: bylo na př. 1886, bude 1943 a pak až v r. 2038. Středověký verš o tomto datu praví: Usque Marcus pascha dabit, Antonius pentecosabit, totus mundus vae clamabit, t. j. Až na sv. Marka (25. dubna) budou velikonoce, na sv. Antonína (13. VI.) svatodušní svátek, zaběduje celý svět.

V r. 1848 byla velikonoční neděle 24. dubna.

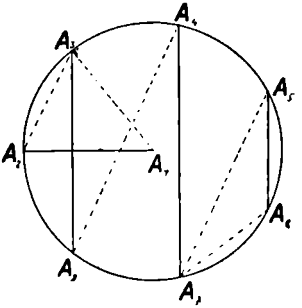
12.

ÚLOHY Z KOMBINATORIKY.

Slovem kombinatorika v tomto odstavci budeme rozuměti něco více než obvyklou nauku o permutacích, variacích a kombinacích; budeme míti na zřeteli jakékoliv řadění daných předmětů buď všech daných nebo některých z nich.

Stopy kombinatoriky lze postihnouti již u Řeků; k velikému rozkvětu kombinatoriky přispěl v XVIII. století počet pravděpodobnosti; v poslední době zájem o kombinatoriku (v užším slova smyslu) mizí. — Málokterý problém, jimiž se zabýváme, přilákal tolik zvučných matematických jmen, jako některé z úloh, jimiž se budeme zabývati.

1. Chovanky pensionátu denně se procházejí; jak je sestavíme do páru, aby každá s každou během určitého počtu dní se mohla procházeti a to jen jednou? Nutno rozeznávati případy dva: počet chovanek jest buď sudý nebo lichý, druhý případ převedeme ihned na první, přibéřeme-li k chovankám ještě vychovatelku, s kterou zbývající dívka vytvoří další pár. Mějme tedy $2n$ dívek. Rozdělme obvod kružnice na $2n - 1$ dílků, dělící body ($n = 4$) buďtež A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8. Střed kružnice označme A_1. Spojnice A_3A_8, A_4A_7, A_5A_6, nám udávají tři páry; učiňme $A_1A_2 \perp A_3A_8$, pak A_1A_2 nám udává čtvrtý pár. Otočme nyní kružnicí a s ní pevně souvisícím poloměrem tak, až poloměr přejde do bodu A_3, při tomto otáčení poloha původních dělících bodů zůstala nezměněna. Spojnice A_1A_3, A_2A_4, A_5A_8, A_6A_7 nám pak udávají páry, v nichž 8 dívek jde na procházku druhý den. Tak pokračujeme, až se poloměr opět vrátí do polohy základní, načež seskupení párů se počne opakovati. Důkaz, že každý den jde každá dívka pokaždé s jinou, jest jednoduchý; plyne z toho, že spojnice udávající páry kteréhokoliv dne, jsou různoběžny se spojnicemi, udávající páry pro jiný den.

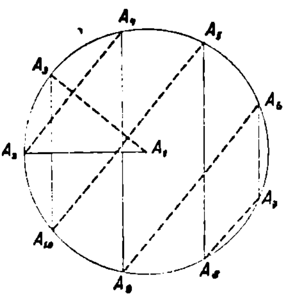


Obr. 3.

2. Tímto způsobem lze seskupiti $2n$ šachistů hrající v turnaji, v němž každý hráč s každým během za sebou jdoucích $2n - 1$ dní jen jednou; je-li počet šachistů lichý, doplníme

jich počet myšleným hráčem — jmenujme jej mistrem Imaginárním — má-li kdo z hráčů s tímto mistrem hráti, má toho dne volno.

Avšak s naším řešením by pravověrní šachisté asi spokojeni nebyli, ničeho jsme totiž neustanovili o tom, kdo má kameny bílé a kdo černé. S tímto řešením bychom vystačili tenkráte, hrál-li by každý hráč s každým hráčem dvě partie — pak by se vlastně turnaj rozpadl v turnaje dva; měl-li hráč A_m při hře s hráčem A_n kameny bílé, má v druhém utkání s tímto hráčem kameny černé. Ale takové turnaje trvají — zejména při větším počtu hráčů — příliš dlouho a proto nejsou oblíbeny. Uvažujme na př. deset hráčů $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. Všimněme si připojeného obrázku (obr. 4), na němž jsou zakresleny páry pro první dva dny; spojnice tvoří uzavřený tah. První den hraje A_1 jako bílý s A_2, druhý den hraje A_1 s A_3 jako černý, který minulého dne jako černý hrál s A_{10}. Podobně tomu jest dále, až projdeme všemi vrcholy uzavřeného tahu. Jest tedy pro první dva dny tento pořad A_1A_2, A_4A_9, A_6A_7, A_8A_5, $A_{10}A_3$; A_2A_4, A_9A_6, A_7A_8, A_5A_{10}, A_3A_1, při čemž hráč uvedený na prvním místě hraje jako bílý. Podobně stanovíme pořadí hráčů pro třetí čtvrtý, pro pátý a šestý, sedmý a osmý den. O devátém utkání nutno rozhodnouti buď úmluvou nebo losem. Je-li počet účastníků lichý, pozvěme opět mistra Imaginárního, označme jej A_1. Ten hraje postupně s hráči A_2, A_3, A_4, $A_5, \ldots$, při čemž hráči se sudým indexem mají figury černé, hráči s lichým indexem bílé. Ve skutečnosti nehrají a ztrácejí sudí jednou černé a liší jednou bílé figury. Ale poslední utkání, jak se snadno přesvědčíme, jest tak upraveno, že vždy hraje sudý



Obr. 4.

hráč s lichým, takže v tomto utkání jest možno tuto nerovnoměrnost odstraniti, sudí hrají jako černí, liší jako bílí.

3. Kirkmann předložil r. 1850 v zábavném časopise tuto úlohu: Patnáct dívek chodí denně na procházku, jak jest je seskupiti ve trojice, aby během týdne každá dívka každý den šla s dvěma jinými dívkami, s každou pak pouze jedenkráte? Úlohou zabýval se na př. Cayley, Sylvestr, Burnside; známe různá řešení této úlohy, z nichž nejsnadnější pochází od B. Peirce. Označme jednu z dívek p, ostatní a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7. Pak sestava pro první den jest pa_1b_1, $b_4a_5a_7$, $b_6a_3a_4$, $b_7a_2a_6$, $b_2b_3b_5$. Řešení pro další dny obdržíme, zvětšíme-li indexy o 1, při čemž místo 8 píšeme opět 1; týmž způsobem stanovíme pořad pro třetí a další dny. (Důkaz viz na př. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, II, str. 104.)

Počet všech trojic řešících naši úlohu jest $5 \times 7 = 35$, kdežto počet všech možných trojic jest $\binom{15}{3} = 35 \,.\, 13 = 455$; i nadhodil Sylvestr úlohu, možno-li těchto 455 trojic rozvrhnouti ve 13 systémů tak, aby každý systém byl řešením Kirkmannovy úlohy — tedy aby dívky po celý čtvrtrok mohly se procházeti podle daných podmínek; zdá se, že tento poslední požadavek splniti nelze.

4. S naukou o permutacích souvisí rozřešení úlohy obsažené ve hře Boss Puzzle (hra s knoflíky, Fünfzehnerspiel, Taquin), která v letech sedmdesátých minulého století jako epidemie zachvátila celý svět. Seydlerův článek o této hře v Časopise pro pěst. matem. a fysiky, roč. X, jest ohlasem tohoto zájmu i u nás. Hra vypadá takto: V dřevěné ploché skřínce jest čtyřikráte čtyři pole, v nichž jest umístěno patnáct destiček označených čísly 1, 2, 3, ..., 15. Poslední místo v poslední řadě ponecháváme volné; posunováním destiček přes toto volné a v dalším vždy uvolněné jedno místo jest z libovolného uspořádání destiček přejíti v toto schema

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Záhy hráči zjistili, že z některých počátečních postavení lze předepsaného postavení dosíci, z jiných pak nikoliv. Nutné a postačující podmínky, dle nichž by se z počátečního postavení poznalo, zda lze k předepsanému postavení přijíti či nikoliv, stanovil šachový problémista S. Loyd; a ku podivu: ihned ustal vysoko zvířený zájem o tuto hru.

Nutno se především zmíniti o tom, co nazýváme inversí v dané permutaci na př. pěti prvků a, b, c, d, e; prvek b pokládáme za vyšší než a, c za vyšší než b i a, podobně prvek d jest vyšší než oba předchozí, prvek e jest nejvyšší. Přichází-li vyšší prvek v dané permutaci před nižším, pravíme, že tvoří inversi; na př. v permutaci 5, 3, 4, 1, 2, tvoří 5 inversi vůči všem prvkům, 3 pak jest v inversi vůči 1, 2, jest tedy v dané permutaci $4 + 2 = 6$ inversí; pravíme, že daná permutace jest sudá; je-li počet inversí lichý, jest permutace lichá. — Která permutace nemá žádných inversí? (Základní: počítáme ji k sudým). Která permutace má nejvyšší počet inversí a který? (Permutace psaná v opačném sledu vůči základní.) Je-li prvků n, jest počet inversí v takové permutaci

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \binom{n}{2}.$$

Loydovo kriterium pak zní: Nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti úlohy jest, aby základní postavení bylo sudou permutací čísel 1, 2, 3, ..., 15.

5. Velmi stará jest tato úloha; budeme ji zváti úlohou o 15 Turcích a 15 křesťanech. Z těchto 30 mužů má býti 15 popraveno, o jejich osudu má se rozhodnouti náhodou. Postaví se do řady, každý devátý bude popraven, při čemž dojdeme-li konce řady, počítáme znovu. Kam jest umístiti křesťany, aby byli všichni zachráněni? O jejich umístění lze rozhodnouti pokusem: Napišme si vedle sebe 30 čárek, vyškrtněme každou devátou — počítajíce uvedeným předpisem — na místa vyškrtnutých prvních patnácti čárek umístíme Turky. Postavení pak jest toto: $4K$, $5T$, $2K$, $1T$, $3K$, $1T$, $1K$, $2T$, $2K$, $3T$, $1K$, $2T$, $2K$, $1T$.*)

*) $4K$, $5T$, ... značí, že stojí vedle sebe 4 křesťané, pak vedle nich (dole) 5 Turků atd.

Tvrdívá se, že tato úloha pochází z 1. století po Kr., jiní na př. Ahrens (Unterhaltungen, II. díl, 123 a n.) jest však mínění, že hra pochází až z počátku druhého tisíciletí po Kr., vyskytujíc se v nejrozmanitějších obměnách. Jedna — velmi jednoduchá — pochází od německého básníka ševce Hanse Sachse. — Velmi zajímavé znění této úlohy známe z Japonska. Statkář jest po druhé ženat, s první i druhou paní má po 15 dětech. Macecha touží, aby celé jmění otcovo připadlo jednomu z jejích dětí; i uprosí manžela, aby věc ponechal náhodě. I sestaví všech třicet dětí a odpočítává do desíti; dítě, na něž padne deset, musí z řady vystoupiti a jest z dědictví vyloučeno. V krátké době jest vyloučeno 14 dětí — vesměs nevlastních. Zbylé patnácté si vyprosí, aby se počalo počítati znovu, rovněž do desíti, avšak počínaje od něho a směrem opačným. Macecha jista svým vítězstvím svoluje — a ejhle: postupně odpadnou všechny její vlastní děti. I toto uspořádání lze zjistiti pokusem a jest:

$$2v,\ 1n,\ 3v,\ 5n,\ 2v,\ 2n,\ 4v,\ 1n,\ 1v,\ 3n,\ 1v,\ 2n,\ 2v,\ 1n.$$

Zpět počne se počítati od nevlastního dítěte stojícího na místě 14.

I touto úlohou zabývali se vynikající matematikové Euler, Cesaro a nejdůkladněji Busche, jenž v Mathematische Annalen, roč. 47, řešil tuto úlohu: Budiž dáno na obvodě kruhu n bodů označených 1; 2; 3; ...; n. Vylučujme způsobem popsaným každý d-tý bod, při čemž d může býti rovno, větší nebo menší než n. Tážeme se, jaké pořadí má v základní poloze bod r-tý, jenž bude vyloučen jako e-tý.

Česká verse této úlohy jest tato: Rychtář vede k odvodu 30 branců, mezi nimi své tři syny; odveden jest ten, na něhož při odpočítávání padne deset; má-li býti odvedeno 27 branců, kam umístí své syny, nemají-li býti odvedeni? (Na 17., 25. a 28. místo.)

6. Německý matematik Jakob Steiner řešil tuto úlohu: V rovině jest dáno n přímek vesměs mezi sebou různoběžných, z nichž žádné tři neprotínají se v témž bodě. V kolik

oblastí dělí tyto přímky rovinu? Označme toto číslo pro n přímek a_n, připojme další přímku splňující uvedené podmínky; původních n přímek protne ji v n bodech, prochází tedy $n + 1$ dosavadními oblastmi dělíc každou na dvě části, platí tedy $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Položme $n = 0; 1; 2; 3; \ldots; n - 1$, $a_0 = 1$ a sečteme tak vzniklé rovnice, tak obdržíme

$$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \tfrac{1}{2}n(n + 1) + 1 = \\ = \tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Steiner řešil podobnou úlohu i pro prostor. Mějme n rovin, jichž průsečnice jsou vesměs mezi sebou různoběžné; prostor se pak rozpadá v $A_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ oblastí.

Uvedeme ještě dvě úlohy složitější.

7. Píši n dopisů a n příslušných obálek; kolikerým způsobem mohu všechny dopisy zasunouti nesprávně? Značme dopisy $a_1, a_2, \ldots, a_n$, obálky pak $A_1, A_2, \ldots, A_n$, hledaný počet označme x_n. Uvažujme nejprve dopisy a_1, a_2 a obálky A_1, A_2; kolik jest případů, že a_1 se dostane do A_2 a a_2 do A_1? Jest jich x_{n-2}; kolik je dále případů, že a_1 se dostane do A_2, kdežto a_2 se neoctne v A_1? Těchto případů jest x_{n-1}. Tedy počet všech případů, kdy a_1 se octne v A_2, jest $x_{n-1} + x_{n-2}$. Počet případů, kdy se octne a_1 v $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_n$ jest stejně veliký, jest tudíž $x_n = (n - 1)(x_{n-1} + x_{n-2})$. Dělme tuto rovnici $n!$ a položme $\frac{x_n}{n!} = \xi_n$, pak předchozí rovnici lze psáti ve tvaru

$$\xi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi_{n-1} + \frac{1}{n}\,\xi_{n-2},$$

nebo též

$$\xi_n - \xi_{n-1} = -\frac{1}{n}(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}).$$

Pišme nyní $n = 3; 4; \ldots; n$, násobme tak vzniklé rovnice a obdržíme:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{(-1)^n(\xi_2 - \xi_1)}{3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, n},$$

poněvadž $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, jest $\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Dosaďme postupně za $n = 2; 3; \ldots; n$, sečteme-li jest:

$$\xi_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \pm \frac{1}{n!},$$

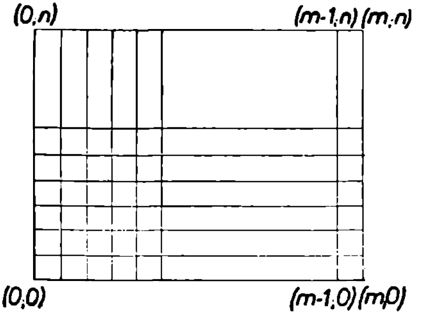
takže

$$x_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right);$$

na př. pro $n = 6$, jest

$$x_6 = 720\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 325.$$

8. Uvažujme mříž vzniklou m rovnoběžkami s osou Y, a n rovnoběžkami s osou X; tyto rovnoběžky mohou býti, ale nemusí býti od sebe stejně vzdáleny. Tážeme se, kolikerým způsobem lze se dostati z bodu $(0; 0)$ do bodu $(m; n)$, je-li dovolen pouze pohyb mřížovými body od leva napravo a zdola nahoru a to o libovolný počet dílců.



Obr. 5.

Příslušná čísla pro body $(m - 1; 0)$, $(m - 1; 1)$, $(m - 1; 2)$, $\ldots$, $(m - 1; n)$ značme $c_{m-1,0}$, $c_{m-1,1}$, $c_{m-1,2}$, $\ldots$, c_{m-1n}, a sestrojme řadu $f_{m-1}(x) = x^{m-1}(c_{m-1,0} + c_{m-1,1}x +$

$+c_{m-1,2}x^2+\ldots$). Kolikerým způsobem lze dosíci jednotlivých mřížových bodů na přímce $x = m$? Do bodu $(m; 0)$ dojdeme pouze z bodu $(m-1; 0)$, tedy $c_{m,0} = c_{m-1,0}$. Do bodu $(m; 1)$ lze dojíti jednak z bodu $(m-1; 0)$ jednak z bodu $(m-1; 1)$; jest tedy $c_{m,1} = c_{m-1,1} + c_{m-1,0}$. Podobně do bodu $(m; 2)$ lze dojíti jednak z bodu $(m-1; 0)$, jednak z bodu $(m-1; 1)$ a posléze z bodu $(m-1; 2)$; jest tedy $c_{m,2} = c_{m-1,0} + c_{m-1,1} + c_{m-1,2}$ atd. Sestrojme novou řadu

$$\begin{aligned} f_m(x) &= x^m(c_{m,0} + c_{m,1}x + c_{m,2}x^2 + \ldots) = \\ &= x^m[c_{m-1,0} + (c_{m1,0} + c_{m-1,1})\,x + (c_{m-1,0} + c_{m-1,1} + \\ &+ c_{m-1,2})\,x^2 - \ldots] = \\ &= x^m[c_{m-1,0}(1 + x + x^2 + \ldots) + c_{m-1,1}\,x\,(1 + x + x^2 + \\ &+ \ldots) + c_{m-1,2}x^2(1 + x + x^2 + \ldots) + \ldots] = \\ &= x^{m-1}(c_{m-1,0} + c_{m-1,1}x + c_{m-1,2}x^2 + \ldots)\,.\,x(1 + x + \\ &+ x^2 + \ldots) = x(1 + x + x^2 + \ldots)\,.\,f_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Bez újmy obecnosti lze předpokládati, že $|x| < 1$, a řadu v závorce pokládati za nekonečnou, součet této nekonečné geometrické řady jest $\frac{1}{1-x}$, takže lze psáti $f_m(x) = \frac{x}{1-x} f_{m-1}(x)$. Napišme tuto rovnici pro $m-1$, $m-2$, $\ldots$, 1 a znásobme tyto rovnice, výsledek jest

$$f_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^m} f_0(x),$$

kde $f_0(x)$ se vztahuje na body položené na ose $x = 0$, do jejíchž bodů lze se dostati pouze jednou; jest tedy

$$f_0(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

takže

$$f_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Koeficient při $(m+n)$-té mocnině v rozvoji pro zlomek

$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$ jest tedy číslo udávající, kolikráte předepsaným způsobem lze přejíti z bodu (0; 0) do bodu $(m; n)$. Tento koeficient určíme takto: V základech se binomická věta dokazuje pouze pro celé kladné mocnitele, připusťme formální její platnost i pro záporné mocniny, při čemž definujeme

$$\binom{-m}{n} = \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)\dots(-m-n+0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} =$$
$$= (-1)^n \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} =$$
$$= (-1)^n \binom{m+n-1}{n}.$$

Jest tudíž koeficient $(m+n)$-té mocniny rozvoje pro

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = x^m(1-x)^{-m-1}$$

dán vzorcem

$$c_{m,n} = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}.$$

Na př. z levého dolního rohu (místa a1) na šachovnici lze se dostati do pravého horního rohu (místa h8) celkem

$$\binom{8+8}{8} = \binom{16}{8} =$$

$$= 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 518\,918\,400 \text{ způsoby.}$$

Příklady. 1. Kolikráte v tomto schematě

d o b r o u
o b r o u n
b r o u n o
r o u n o c

lze čísti dobrou noc?

$$\left[\binom{5+3}{3} = \binom{8}{3} = 56.\right]$$

2. Šest chlapců a šest dívek má vytvořiti kolo, v němž by se chlapec a dívka střídali. Kolik jest možno sestav, aby každý chlapec vedle každé dívky stál pouze jednou? (Naznačte si 6 chlapců jako šest vrcholů pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kruhu, na obvod soustředného kruhu o menším poloměru týmž způsobem naznačte si šest dívek, takže každá jest uprostřed mezi dvěma sousedními chlapci. To jest prvá skupina; druhou obdržíte otočením menšího kruhu o 120 stupňů; jak obdržíte třetí a poslední skupinu? Upravte tento postup pro pět párů!)

3. Úlohu 8 tohoto odstavce lze uvažovati i v prostoru; počet cest, jimiž se lze dostati z bodu (0; 0; 0) do bodu $(m; n; p)$ jest $\binom{m+n+p}{m+n}\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$. Ukažte, kolik jest možných cest z bodu (0; 0; 0) do bodu (4; 4; 4)! $\left[\binom{12}{4} = 495.\right]$

13.

ŘADY.

Řadou nazýváme posloupnost čísel vytvořených dle jistého výtvarného zákona a spojených znaménkem kladným nebo záporným; i o sledu těchto znamének budeme předpokládati, že se řídí dle jistého pravidla. Výtvarný zákon může býti dán dvojím způsobem; explicitně; na př. $a_n = 2n - 1$, všechny členy buďtež spojeny znaménkem kladným; pišme $n = 1; 2; \ldots; 10$, tak obdržíme řadu $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ $\ldots + 21$. Jiné explicitní předpisy jsou $a_n = \frac{1}{n}$, všechna znaménka buďtež kladná, nebo nechť se znaménko kladné střídá se znaménkem záporným: tak vznikají řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} + \ldots,$$

z nichž dříve uvedená se jmenuje harmonická. Předpis, jímž byla dána posloupnost čísel Fibonacciových $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$