$x^n + y^n = z^n$, jakmile $n > 2$. Důkaz tohoto tvrzení,*) zvaného též velká nebo poslední věta Fermatova, posud podán nebyl.

Řešte pomocí Fibonacciových čísel rovnici $5x^2 + 4 = y^2$ čísly celými a kladnými.

10.
ÚLOHY Z FORONOMIE.

Jak oblíbenými tak i často velmi nesnadnými jsou úlohy z foronomie, t. j. z nauky o pohybu, které lze v podstatě redukovati na dvě základní úlohy.

A) Dvě tělesa vzdálena od sebe d pohybují se po přímce proti sobě rychlostmi c_1 a c_2 v jednotce času; kdy se potkají? To se stane za x jednotek, první těleso urazí dráhu c_1x, druhé c_2x, platí tedy rovnice $c_1x + c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 + c_2}$.

B) Dvě tělesa vzdálená od sebe o d pohybují se po přímce za sebou rychlostmi c_1 a c_2 v jednotce času. Kdy těleso, jehož rychlost na př. c_1 jest větší, dožene těleso druhé? Stane se tak za x jednotek času: první těleso urazí dráhu c_1x, druhé c_2x; úloha vede na rovnici $c_1x - c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 - c_2}$.

a) Z nádraží na letovisko jest 12 km; pro rodinu přijede auto, jež není s to najednou odvésti rodinu a její zavazadla. Otec se synem jdou pěšky; až auto s ostatními dojedou na letovisko, vrátí se pro otce a syna. Kdy bude opět rodina pohromadě, jede-li auto 30 km za hodinu, jde-li otec se synem 4 km za hodinu a zdrží-li se auto na letovisku 6 minut? Aby ujelo auto 12 km, potřebuje $\frac{12}{30}$ hodiny $= 24$ min.; otec jde se synem celkem $24 + 6$ minut $= 30$ minut pěšky, za tuto

*) Viz Rychlík, l. c. str. 93 a n.; zde budiž jen podotčeno, že věta platí pro prvočísla < 307 a pro čísla složená z prvočísel < 307; připojíme-li podmínku, že žádné z čísel x, y, z není dělitelno n, platí pro prvočísla $n < 14000$ a čísla z nich složená.

dobu urazí 2 km. Vzdálenost mezi nimi a vyjíždějícím autem nyní jest 10 km, takže platí $x(30 + 4) = 10$, odkudž $x = \frac{10}{34}$ hod., což jest asi 18 minut. Auto a pěší setkají se za 18 minut a tolikéž potřebují k dosažení letoviska. Tedy za $30 + 18 + 18 = 66$ minut jest opět rodina pohromadě.

b) Dva přátelé jdou za sebou ve vzdálenosti D rychlostí c_1. Od prvního vyběhne pes rychlostí $c_2 > c_1$, dostihne druhého chodce a vrátí se k prvnímu. Ušel-li každý z chodců d m, jakou dráhu proběhne pes? Než doběhne pes druhého chodce, spotřebuje čas $\frac{D}{c_2 - c_1}$, než se vrátí k prvnímu spotřebuje čas $\frac{D}{c_2 + c_1}$, tedy celkem $\frac{D}{c_2 - c_1} + \frac{D}{c_2 + c_1}$. Za tu dobu chodci ujdou dráhu $\left(\frac{D}{c_2 + c_1} + \frac{D}{c_2 - c_1}\right) c_1 = d$ a pes uběhne dráhu $\left(\frac{D}{c_2 + c_1} + \frac{D}{c_2 - c_1}\right) c_2 = x$, a dělením obou rovnic $\frac{c_1}{c_2} = \frac{d}{x}$, odkudž $x = \frac{dc_2}{c_1}$.

c) Tato úloha — v jednodušším znění — vyskytá se již u Alkuina, učitele a přítele Karla Velikého. Zajíc uskočil před psem 50 skoků; kolik zajíc ještě uskočí skoků, než ho pes dostihne, je-li 9 skoků zaječích na délku rovno 7 skokům psím, a učiní-li zajíc v téže době šest skoků jako pes pět? Za jednotku času volme dobu, kterou zajíc spotřebuje k jednomu skoku, jest tedy rychlost zajíc 1, rychlost psa pak jest $\frac{9}{7} : \frac{6}{5} = \frac{15}{14}$; značí-li x počet námi zvolených časových jednotek, jest $x(\frac{15}{14} - 1) = 50$. Z této rovnice plyne $x = 700$ zaječích skoků.

d) Jel jsem do města autem rychlostí 30 km za hodinu a zpět rychlostí 20 km, jaká jest průměrná rychlost? Nesprávné by bylo počítati rychlost $(30 + 20) : 2 = 25$; nutno postupovati takto: Je-li vzdálenost obou míst d, jest čas potřebný pro první jízdu $\frac{1}{20}d$ a pro jízdu $\frac{1}{30}d$, tedy průměrná rychlost

$$2d : \left(\frac{d}{20} + \frac{d}{30}\right) = \frac{2 \cdot 20 \cdot 30}{20 + 30} = 24 \text{ km},$$

což jest harmonický střed obou rychlostí.

e) Z dvou míst A a B současně proti sobě vyjdou dva chodci jdoucí různými rychlostmi; setkají se $d_1 = 10$ m před A. První osoba dojde do B, druhá do A a obě zachovávajíce své původní rychlosti vrací se do svých východišť, při čemž se potkají ve vzdálenosti $d_2 = 12$ před B; jaká jest vzdálenost B od A? Označíme-li ji D a rychlosti obou chodců c_1 a c_2, jest jednak

$$\frac{10}{c_1} = \frac{D - 10}{c_2},$$

a dále

$$\frac{D - 10}{c_1} + \frac{12}{c_1} = \frac{10}{c_2} + \frac{D - 12}{c_2},$$

čili:

$$\frac{D + 2}{c_1} = \frac{D - 2}{c_2}$$

dělíme-li nyní rovnici rovnicí třetí, obdržíme

$$\frac{10}{D + 2} = \frac{D - 10}{D - 2},$$

odkud $D = 18$. — Ukažte, že obecně platí $D = 3d_1 - d_2$.

f) Běží-li běžec A trať $d = 500$ m dlouhou a zůstane-li běžec B za ním o $d_1 = 7$, a běží-li podobně běžec B a C tutéž trať, při čemž běžec C zůstane o $d_2 = 8$ m za B, oč asi zůstane při běhu po téže trati běžec C za běžcem A? Jsou-li rychlosti běžců c_1, c_2, c_3, platí rovnice:

$$\frac{500}{c_1} = \frac{500 - 8}{c_2}, \quad \frac{500}{c_2} = \frac{500 - 7}{c_3}, \quad \frac{500 - x}{c_3} = \frac{500}{c_1},$$

znásobením těchto rovnic jest

$$500 \cdot 500\,(500 - x) = 492 \cdot 493 \cdot 500$$

a odtud $x = 14{,}39$ m a nikoliv, jak by se při zběžné úvaze zdálo $7 + 8 = 15$ m.

Ukažte, že v případě n běžců s rozdíly v dráze $d_{1,2}$, $d_{2,3}$, $d_{3,4}$, …, $d_{n,n-1}$ zůstane n-tý běžec při společném závodu s prvním běžcem zpět o

$$d_{1,n} = d\left[1 - \left(1 - \frac{d_{1,2}}{d}\right)\left(1 - \frac{d_{2,3}}{d}\right)\dots\left(1 - \frac{d_{n-1,n}}{d}\right)\right].$$

g) Před nedávnou dobou prošla snad všemi hádankářskými besídkami úloha, kterou budeme řešiti hned v obecných číslech. Dva přátelé mají se dostaviti na místo vzdálené D m. První sedne na kolo a rychlostí v_1 projede d m. Druhý jde pěšky. Když první projede dráhu d m, sestoupí s kola, uloží je vedle silnice a jde nyní d m pěšky rychlostí v_2 m; až druhý dojde k odloženému kolu, vsedne na ně a jede rychlostí v_1 m vzdálenost d m, načež je odloží a jde pěšky d m. A tak tento postup oba opakují, až stihnou cíle; kdy se tak stane? 1. V čase $\dfrac{d_1}{v_1}$ ujede první d a druhý ujde $\dfrac{d}{v_1}v_2$; 2. nyní jdou oba pěšky a to tak dlouho, dokud nedojde druhý ke kolu, musí tedy ujíti $d - \dfrac{dv_2}{v_1} = d\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right)$ a tuto dráhu urazí za čas $d\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right) : v_2 = d\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right)$; 3. první jde ještě pěšky, druhý jede vzdálenost d na kole, potřebuje k tomu čas $\dfrac{d}{v_2}$. První urazil celkem $d + d\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right)v_2 + \dfrac{d}{v_1}v_2 = 2d$, druhý urazil rovněž $2d$; snadno vypočteme, že oba spotřebovali tentýž čas

$$\frac{d}{v_1} + d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) + \frac{d}{v_1} = d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right);$$

jest tedy průměrná rychlost

$$2d : d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Je-li $D : d$ číslo celé, dosáhnou cíle za

$$D : \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{D}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \text{ minut;}$$

není-li $D : d$ číslo celé, jest nutno výpočet poněkud upraviti.

Sem patří i četné úlohy o pohybu hodinových ručiček.

h) Jest právě 8 hodin, kdy budou ručičky tvořiti přímý úhel? Minutová ručička se pohybuje rychlostí $\frac{360°}{60} = 6$ stupňů za minutu, hodinová pak se pohybuje rychlostí dvanáctkráte menší, t. j. $\frac{6°}{12} = \frac{1°}{2}$. V 8 hodin jsou obě ručičky od sebe vzdáleny o 240°, přímý úhel budou tvořiti za x minut. Ukazují-li hodiny 12 hodin, ukazují *polohu základní*; od této polohy bude hodinová ručička vzdálena 240°, minutová o $6x$; dle úlohy má býti $(240 + \frac{1}{2}x) - 6x = 180$, tedy $x = 10\frac{10}{11}$ minut.

Řešte úlohu obecnější: Ručičky svírají úhel α, kdy budou svírati úhel β? Úhel počítáme kladně ve směru pohybu ručiček. Rovnice zní:

$$\alpha \pm \frac{11}{2} x = \beta;$$

znaménko $\pm$ dle toho, je-li $\alpha \lesseqgtr \beta$.

i) První hodiny ukazují 2 hodiny a každou hodinu se předcházejí o $1\frac{1}{2}$ min., druhé ukazuje tři hodiny a zpožďují se každou hodinu o 1 min. Kdy budou tyto hodiny ukazovati stejně? Kolik budou ukazovati? Kolik bude správně hodin, je-li nyní půl třetí? Úloha jest totožna s touto: Dva chodci jdou proti sobě rychlostí $1\frac{1}{2}$ a 1 jsouce od sebe vzdáleni o 60, kdy se potkají? $x = 60 : (1\frac{1}{2} + 1) = 24$ hod. Správně tedy bude opět půltřetí, avšak hodiny budou ukazovati 2 hod. + + 24 × $1\frac{1}{2}$ min. = 2 hod. 36 min.

j) Rozřešme tuto úlohu: Kdy lze zaměniti hodinové ručičky mezi sebou, aby zase ukazovaly jistý čas? (Je-li 6 hod. a zaměníme-li ručičky, neukazují žádný čas.)

Svírá-li hodinová ručička se základní polohou úhel α, svírá minutová úhel β dvanáctkráte větší: je-li to úhel větší 360°, stanovíme tento úhel jako zbytek při dělení 12α číslem 360; nebo též takto: dělíme α třiceti (podíl jsou celé hodiny), zbytek zanedbejme, znamenejme tento výsledek $E\left(\frac{\alpha}{30}\right)$, pak jest $\beta = 12\alpha - 360E\left(\frac{\alpha}{30}\right)$: má-li poloha (β, α) udávati též nějaký čas, musí býti podobně $\alpha = 12\beta - 360E\left(\frac{\beta}{30}\right)$. Pišme stručně $E\left(\frac{\alpha}{30}\right) = k_1$, $E\left(\frac{\beta}{30}\right) = k_2$; obě čísla mohou nabýti hodnot $0; 1; 2; \ldots; 11$. Řešme nyní rovnice dle α, β a obdržíme

$$\alpha = \frac{(12k_1 + k_2) \cdot 360}{143}, \beta = \frac{(k_1 + 12k_2)\, 360}{143}.$$

Poněvadž výraz $12k_1 + k_2$ nabývá pro různá možná k_1 i k_2 všech celých hodnot $0; 1; 2; \ldots; 143$, lze říci, že $\alpha = \frac{k \cdot 360}{143}$, kde $k = 0; 1; 2; \ldots; 143$. Úloze tedy hoví 143 různých úhlů určených hodinovou ručičkou. Když $k_1 = k_2$, ručičky se kryjí; vylučme tento triviální případ, pak zbývá pro α celkem 132 úhlů, odpovídající $132 : 2 = 66$ různým časům.

k) Ručička hodinová svírá se základní polohou úhel α, minutová úhel β; z předchozího je patrno, že nelze obecně zaměniti polohu ručiček, aby ukazovaly jistý čas. Tažme se však, když zaměníme polohu (α, β) na (β, α) a při tom ponecháme ručičkám původní rychlost, zda průběhem doby dosáhnou polohy, jež by definovala skutečný čas. Stane se tak za x minut; o základní poloze platí $\beta = 12\alpha - 360E\left(\frac{\alpha}{36}\right) = 12\alpha - 360k_1$; ve změněné poloze po x minutách, má-li ukazovati jistý čas, musí býti

$$\alpha + 6x = 12\left(\beta + \frac{x}{2}\right) - 360E\left(\frac{2\beta + x}{60}\right)$$

čili

$$\alpha = 12\beta - 360E\left(\frac{2\beta + x}{60}\right) = 12\beta - 360k_3,$$

kdež $k_1, k_3 = 0, 1, 2, \ldots, 11$. Odečteme-li však třetí rovnici od první, jest $13(\alpha - \beta) = 360(k_1 - k_3)$, t. j. pravá strana má býti dělitelna 13, což však za předpokladu o k_1, k_3 není možné jinak, než když $k_1 = k_2$, t. j. $\alpha = \beta$. Tedy po této záměně hodinových ručiček ukazují hodiny správný čas, jen když se kryjí.

Proveďte některé tyto úvahy v případě, že ciferník jest rozdělen od 1 do 24 hodin.

11.
ÚLOHY O ČASE.

Základních vět A) i B) vyložené v úvodu k úlohám z foronomie lze užíti i k výkladům některých úloh o měření času, z nichž nejznámější jest tato: Ten, kdo cestuje ustavičně směrem východním, jde Slunci vstříc a má den o tolikráte 4 minuty kratší, kolik prošel za den šířkových stupňů, jichž délka v naší šířce jest asi 75 km; Slunce totiž při svém zdánlivém pohybu projde jeden šířkový stupeň za 4 minuty. Kdo tedy ujede za den 300 km stále na východ, projel 4 šířkové stupně, den se mu zkrátil o 4kráte 4 minuty, t. j. 16 minut, což se projeví tím, že jeho hodinky jsou zpožděny o 16 minut. Ten, kdo ujede za den 300 km směrem západním, má den delší o 16 minut, jeho hodinky proti místnímu času budou o 16 minut napřed. Kapitán lodi, jež Suezským průplavem vyjela směrem východním na cestu kolem světa, byla po návratu do východní stanice o 360 × 4 min. čili celý den napřed — to se stalo na př. panu Phileasu Foggovi a jeho věrnému sluhovi Passpartoutovi ve známém Verneově románě Cesta kolem světa za 80 dní. Aby datování po návratu souhlasilo, počítá posádka lodi jedouc přes stoosm-