Aritmetické hry a zábavy

9. Slovní rovnice

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 31–42.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403037

2. Složme 27 karet do tří hromádek po devíti; nechť si někdo pamatuje jednu z karet právě skládaných a nechť označí hromádku, v níž karta leží. Složme nyní hromádky k sobě tak, že hromádka obsahující myšlenou kartu přijde doprostřed; opět rozdělme karty do tří hromádek. Osoba znovu označí hromádku, ve které karta leží, načež hromádky složíme týmž způsobem jako prve. A tento postup opakujeme ještě jednou. Myšlená karta jest pak 14. počítána shora nebo zdola. Vysvětlení pak jest toto: Označme karty nacházející se s volenou kartou v téže hromádce +, ostatní —. Pak po prvním kroku jest ve všech hromádkách toto uspořádání: — — — + + + — — —. Po druhém kroku jest v každé hromádce toto rozdělení karet: — + — — + — — + —, a po třetím: — — — — — — — — — v první, + + + + + + + + + v druhé a — — — — — — — — — v třetí hromádce. Snadným rozborem zjistíme, že po prvním složení karet jest myšlená karta s ostatními kartami v původní hromádce na místě 10.—18., po druhém složení karet jest na místě 13.—15. a po třetím složení karet octne se na místě 14. Podobnou úvahou dokažte, dáváme-li hromádku s myšlenou kartou vždy navrch (vždy vespod), že objeví se na místě 7 (21).

Tato hra jest zvláštním případem hry nazvané po francouzském matematikovi Gergonnovi, který odvodil toto pravidlo: Vložíme-li hromádku s myšlenou kartou postupně na místo a-té, b-té, c-té, objeví se myšlená karta po třetím kroku na místě $9a - 3b + c$. — Jak se upraví tato hra, dáme-li hromádku s myšlenou kartou po prvé navrch a po druhé vespod? Při třetím rozložení karet objeví se myšlená karta nahoře, takže osoba sama si na kartu ukáže.

9.

SLOVNÍ ROVNICE.

Nevyčerpatelným zdrojem matematické zábavy všech časů i národů byly, jsou a jistě i budou úlohy, jež vedou na řešení rovnic o jedné nebo více neznámých prvního i vyššího stupně. Úlohám těmto říká se slovní rovnice, my budeme tohoto názvu užívati jen o těch úlohách, jež jsou vysloveny ve formě stručného sdělení o nějaké události neb skutečnosti; na př. úloha stanoviti hloubku rybníka, vyčnívá-li trám zaražený třetinou své délky do dna a ve vodě ponořený polovinou, jeden metr nad vodu, jest slovní rovnice.

Slovní rovnice vznikaly buď ze skutečného pozorování, nebo vhodnou úpravou a rozšířením jeho obsahu; odíti v povídkové roucho příběh a jinou skutečnost jest dávným zvykem blízkého i vzdáleného Orientu.

A) Než přistoupíme k vlastnímu tématu, zmiňme se stručně o matematice věštecké (mathematica divinatoria); tak ještě počátkem XIX. století nazývalo se řešení jednoduchých úloh, jichž výsledek hádající buď snadno uhádl (t. j. snadno vypočetl) nebo dokonce znal výsledek již předem; zhusta se jedná o řešení jednoduchých rovnic nebo jich systému.

1. Výkon, který předepisujeme, nesmí býti příliš jednoduchý, aby uhodnutí nebylo příliš brzo odhaleno, ani příliš složitý, aby hádajícímu nepůsobil nesnází. Na př.: Mysli si číslo, násob je dvěma a odečti 1, tento výkon opakuj ještě dvakráte, kolik ti vyšlo? Oznámí-li pak počítající výsledek n, myslil si číslo $\frac{1}{4}(n - 1) - 1$, poněvadž se jedná o řešení rovnice $2(2x + 5) - 5 = n$.

2. Mysli si číslo, násob je číslem o 1 větším, kolik vyšlo? Jest to rovnice $x(x + 1) = n$, hádající musí znáti vhodné rozklady čísla n v činitele.

3. Mysli si dvě čísla, řekni mi jejich součet s a rozdíl r. Myšlená čísla jsou $\frac{1}{2}(s + r)$, $\frac{1}{2}(s - r)$; jsou to řešení rovnic $x + y = s$, $x - y = r$.

4. Ze svého roku narození ponech číslo stanovené desítkami a jednotkami, udej mi součet tohoto čísla s řadovým číslem měsíce s_1 a součet s řadovým číslem měsíce, v němž

ses narodil s_2; posléze řekni mi součet řadového čísla měsíce s řadovým číslem dne tvého narození s_3. Proč jest den narození dán výrazem $S - s_1$, měsíc $S - s_2$, desítky a jednotky roku $S - s_3$, kdež S jest poloviční součet čísel $s_1 + s_2 + s_3$?

5. Jindy se volí aritmetický předpis tak, že výsledek jest nezávislý na myšleném čísle, na př. mysli si číslo, násob je 3, přičti 12, násob 4, přičti 4, děl 12 a odečti myšlené číslo; že ti vyšla 1? Ovšem, neboť

$$\frac{(3x + 12)\,4 + 4}{12} = (x + 1) - x = 1.$$

6. Na zcela jiném základě jest vybudována tato hádanka: Napiš si jakékoliv na př. čtyřmístné číslo; napiš si další na př. troj- nejvyše čtyřmístné sčítance, i já si napíši troj- nejvýše čtyřmístné sčítance a jsem s to, říci součet těchto sedmi čísel dříve, nežli napíšeš své tři sčítance. Ukažme postup na konkretním případě. Bylo-li voleno první číslo 4321, tvrdím, že jeho součet s dalšími třemi čísly bude 34318, kteréžto číslo z předchozího vzniklo odečtením 3 od čísla daného a napsáním 3 před tento rozdíl. Dále jest $34318 - 4321 = 29997 = 3 \times 9999$; napíše-li protivník čísla a_1, a_2, a_3, stačí, abych napsal čísla $9999 - a_1$, $9999 - a_2$, $9999 - a_3$, což provedu tak, že číslice napsaných tří sčítanců doplňuji do devíti. Na př. ke sčítancům 1268, 8431, 612 píši sčítance 8731, 1568, 9387.

Dále sem patří uhodnutí ok na dvou či třech kostkách, o nichž předpokládáme, že součet ok na protějších stěnách jest 7. Napiš dvouciferné číslo, jehož číslice jsou dány počtem volených ok, obrať nyní kostky a dvojciferné číslo (pozor na pořadí kostek) napiš vpravo vedle prvního. Toto číslo děl jedenácti a odečti sedm, kolik ti vyšlo? Výsledek dělíme devíti, dvojciferné číslo tak vyšlé svými desítkami a jednotkami udává volený počet ok na kostkách. Skutečně jest čtyřciferné číslo $1000a + 100b + 10\,(7 - a) + (7 - b) = 100\,(10a + b) + 77 - (10a + b) = 99\,(10a + b) + 77$ děleno 11 dává $9\,(10a + b) + 7$, odkudž další jest již zřejmo.

Obměňte tento postup pro tři kostky dělíce šesticiferné číslo 111.

7. Mysli si kterékoliv tři číslice, napiš všech šest dvojciferných čísel těmito čísly, který jest jejich součet? Dělíme-li tento součet 22, obdržíme součet myšlených číslic.

B) Slovní rovnice vyskytují se již v nejstarší známé učebnici počtů, jest jí rhindský papyros, chovaný nyní v britickém museu. Jeho autorem jest egyptský písař Ahmes, žijící asi 2000 let př. Kr. Jest to tedy asi současník biblického Abrahama. V této učebnici jsou uloženy počtářské zkušenosti, k nimž Egypťané dospěli při stavbě svých monumentálních budov; známá pyramida Cheopsova byla postavena asi tisíc let před Ahmesem.

1. Prastará čínská hádanka jest tato: Pán vyšel si do bažantnice a ulovil králíky i bažanty, celkem kořist měla dvacet hlav a 50 noh. Kolik bylo bažantů a králíků? Úlohu lze řešiti jednoduchou úvahou: ke každé hlavě patří nejméně dvě nohy, tedy celkem 40, $50 - 40 = 10$ zbývajících noh patří králíkům, těch jest tedy 5 a bažantů 15.

2. Z Indie pochází tato úloha: Dívka z natrhaných lotosových květů věnovala bohu Šiva $\frac{1}{3}$, Višnu $\frac{1}{5}$, Slunci $\frac{1}{6}$, Bhavani $\frac{1}{4}$; svému ctihodnému učiteli darovala zbylých 6 květů; kolik utrhla celkem květů? Úloha vede na rovnici

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{4} + 6 = x; \quad x = 120.$$

3. Řecký měřič Heron (asi 170—100 př. Kr.) uměl řešiti úlohu o nádržkách, jež doznala četných obměn jak v rouchu tak i obsahu: Do nádržky přitéká voda 4 rourami, z nichž každá naplní sama o sobě nádržku za 1, 2, 3, 4 dny, přitéká-li však voda všemi rourami najednou, kdy bude nádržka naplněna? Je-li krychlový obsah nádržky V, přiteče za den jednotlivými rourami $\frac{1}{1}V$, $\frac{1}{2}V$, $\frac{1}{3}V$ $\frac{1}{4}V$ tedy za x dní

$$x\left(\frac{V}{1} + \frac{V}{2} + \frac{V}{3} + \frac{V}{4}\right) = V,$$

odkudž $x = \frac{12}{25} = 0{,}48$ dne, t. j. 11 hod. 31 min. 12 vteřin.

4. Známe však i zajímavou úlohu pocházející od římských právníků z druhého století po Kr. Otec očekávající narození dítěte umírá a stanoví, narodí-li se syn, aby dostal dvakráte tolik jako matka, narodí-li se dcera, aby matka dostala dvakráte tolik jako dcera. Po jeho smrti se však narodí syn i dcera, jak nyní rozdělíme otcovo jmění? (Úloha po právní stránce jest ovšem sporná: Závěť jest v tomto případě neplatná a nastoupí zákonné předpisy; což narodí-li se dva synové, nebo jedno dítě, avšak mrtvé?) Úloha tato se pak řešívá takto: Dostane-li dcera x, má matka dostati $2x$, syn $4x$, tedy jest řešiti rovnici $x + 2x + 4x = K$. Má-li se tedy otcovo přání splniti, dostane dcera $\frac{1}{7}K$, matka $\frac{2}{7}K$, syn $\frac{4}{7}K$.

5. Jiná úloha vyplynulá svým obsahem ze středověkých představ, jest tato: Ďábel potká poutníka a slíbí mu, přejde-li poutník tento most, že zdvojnásobí peníze, které právě u sebe bude míti, ale zato poutník přijda do poloviny mostu, musí pro ďábla hoditi 64 penízů do řeky. Když poutník šestkráte most přešel, nezbylo mu ničeho; kolik peněz měl původně u sebe? Měl-li u sebe x penízů, má po jednotlivých přechodech $2x - 64$, $4x - 192$, $8x - 448$, $16x - 960$, $32x - 1984$ a posléze $64x - 4032$, což položeno rovno 0 dává $x = 63$.

V létech 1923-24 americká veřejnost bavila se touto úlohou: Marii jest dvacet čtyři let, při tom je dvakráte tak stará, jako byla Anna, když bylo Marii tolik let, jako jest dnes Anně. Jak jest stará Anna? Napišme si toto schema:

	Marie	Anna
dnes	24	x
tenkráte	x	12

Všichni stárneme stejně, proto $24 - x = x - 12$, odkudž $x = 18$, což jest nynější stáří Annino.

7. Nejstarší úlohy české vedoucí na lineární rovnice zaznamenány jsou v Aritmetice Görla z Görlštejna (1577), jedna z nich zní: Jeden jde z Prahy; tázán kolik hodin bilo na pražském hradě, když vyšel, odpovídá: Kdyby bylo bilo

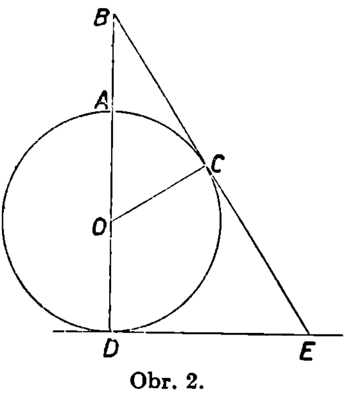
hodin ještě jednou tolik a polovinu tolik a ještě 7 ran k tomu udeřilo, tehdy by bylo 12 hodin (byly 2 hod.). První úlohy tohoto druhu v periodickém našem tisku se objevily v Hýblových Rozmanitostech, vydávaných od r. 1816; uveřejňoval je berounský piarista Kornel Bělecký, tehdy učitel na hlavní škole v Berouně u Prahy. Úlohy v Rozmanitostech nadepsané „Pro lámání hlavy některé algebraické dávky" asi pocházejí od piaristy a profesora fysiky V. Sedláčka v Plzni. Rovněž v Květech vydávaných v létech třicátých minulého století Hostivítem Pospíšilem přicházejí slovní rovnice. Lidové úlohy tohoto druhu viz Bartoš: Naše Děti, 1888, str. 164-165; K. Jar. Erben: Prostonárodní české písně a říkadla, 1864; str. 23.

8. Tato úloha pochází od kněze Václava Šimerky (nar. 1819 ve Vys. Veselí, zemř. 1887 v Praskačce u Hradce Králové), jehož vědecká činnost zejména v číselné teorii dnes již upadla v zapomenutí. Působil na chudé farce v Jenšovicích u Vys. Mýta a z jeho tísně asi vyrostla tato úloha: Ze tří svic, které se na jedné straně oltáře nacházejí a stejně tlusté jsou, má jedna 22, druhá 18, třetí 16 palců délky. Kostelník má z nich vždy dvě spolu nechat stejně dlouho hořeti. Jak musí jimi svítiti, aby mu žádný zbytečný oharek nezůstal? Svíce mohou spolu hořet ve 3 párech: 1. a 2., 2. a 3., 3. a 1.; ukažte, uhoří-li postupně x, y, z palců, že platí: $12 - x - z = 0$, $14 - x - y = 0$, $16 - y - z = 0$. Sečtením těchto rovnic a dělením dvěma obdržíme $21 - x - y - z = 0$, a postupným odčítáním předchozích tří rovnic $x = 5$, $y = 9$, $z = 7$.

9. První slovní úlohou kvadratickou jest asi úloha, která jest v učebnici Inda Bhaskara Acarya (XII. stol. po Kr.). Počet opic, dělen osmi a umocněn dvěma udává ty, které poskakovaly v háji, zbylých 12 opic zůstalo na pahorku a hašteřilo se; kolik opic bylo ve stádě? Úlohu řeší rovnice

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x, \quad x = 48; \;\; 16.$$

10. O sto let později a o půltřetího sta let dříve, než se italští matematici začali soustavně zabývati řešením rovnic třetího stupně, podává Číňan Chin-Chin-Shao tuto hádanku: Obvod města jest kružnice; přesně na sever i jih vedou brány. Jdu-li směrem severním, dorazím ve vzdálenosti 300 stop ode zdi ke stromu, jenž se mi začíná právě ukazovati za zdí, jdu-li jižní bránou 900 m k západu. Jaký jest průměr kružnice vyznačené ohradní zdí? Je-li poloměr kružnice r, jest $\overline{OB} = 300 + r$, $\overline{BC} = \sqrt{(r + 300)^2 - r^2}$, $\overline{DE} = 900$, $\overline{BE} = \sqrt{(2r + 300)^2 + 900^2} = \sqrt{300(2r + 300)} + 900$. Tuto rovnici nejpohodlněji rozřešíme takto: Položme $D = 2r - 300$, pak jest $D^2 = 1800\sqrt{300D} + 300D$, značme $D = 300\delta$, po krácení 300 máme: $\delta^2 = 6\sqrt{\delta} + \delta$, čili $\delta^2 - \delta = 6\sqrt{\delta}$; umocníme-li dvěma a krátíme-li δ, jest $\delta^3 - 2\delta^2 + \delta - 36 = 0$. Jediným reálným a kladným kořenem této rovnice jest $\delta = 4$, takže $D = 2r + 300 = 1200$; jest tedy průměr města 900 stop. Všimněme si, že $\overline{BE} = 1500$, jedná se tedy o pravoúhlý trojúhelník 900, 1200, 1500 — tedy vlastně o známý trojúhelník 3, 4, 5.



Obr. 2.

V Pospíšilových Květech (roč. 1837, str. 32), čteme tuto úlohu Běleckého: Sedlka přinesši w létě na trh několik liber másla prodala ge tak, že za každé dvě libry tři slepičky dostala. Slepičky ty na potom nesly vegce. Dostawši od každé tolik wagec, co třetina slípek obnášela, wzala ge (Wegce) wšecky a dawši do košika na trh zanesla, i wšecky šťastně prodala. — Odebrawši za každých dewět wagec tolik kreycarů na stř., kolik wagec každá slepička snesla, udržila za ně tři zl. Wíd. čjsla. Kolik liber másla, kolik slepic měla a kolik wagec prodala ta sedlka? — Označíme-li x počet slepic, snesla každá $\frac{x}{3}$ vajec, každé pak stálo $\frac{x}{27}$ krejcarů stříbrné měny; utržila tedy celkem $\frac{x^3}{81}$ kr. stř. m. čili dle úlohy 3 zl. víd. č., t. j. 3 . 24 = 72 kr. stř. m.; jedná se tudíž o rovnici $\frac{x^3}{81} = 72$, $x = 18$. Bylo tedy másla 12 liber, slepic 18, každá snesla 6 vajec, jedno vejce stálo $\frac{2}{3}$ kr.

12. I ve zmíněné početnici Görlově čteme slovní rovnici tohoto druhu: Panna Maruška má frejíře (ženicha) Janka, zeptá se paní matky, mohla-li by sobě za manžela vzíti. „Má milá Maruško! Jestliže se tobě líbí a ty ho miluješ, a s ním se živit míníš, můžeš ho sobě vzíti. Nejsi tak mladá, neboť kdybys polovinu, čtvrtinu, osminu svých let spolu rozmnožila (znásobila), jest bez šesti let 70.“ Jak jest Maruška stará? (16 let.)

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{8} + 6 = 70.$$

Rovněž prastaré jsou úlohy vedoucí k neurčitým systémům rovnic, t. j. když k řešení úlohy jest dáno méně rovnic, než jest neznámých. Takový systém má ovšem nekonečně mnoho řešení, avšak pro úlohu mívají význam řešení pouze v číslech celých kladných. Zhusta číselné údaje jsou takové, že vedou k jedinému řešení v číslech celých a kladných.

Již Archimedovi se připisuje řešení o volech různé barvy (problema bovinum), ale nelze přesně zjistiti, zda Archimedes se skutečně tímto problémem zabýval a nepochází-li tato úloha až z ranného středověku. Problémy těmito zabýval se Řek Diofantos (žijící kol r. 300 po Kr.). Metod řešících tyto úlohy jest několik; nejznámější pochází od Bacheta de Méziriac (1587—1638); viz Rychlík: Úvod do elementární teorie číselné, 1931, str. 40-41. Velmi často vystačíme s postupem, který vyložíme na této úloze: Mám nádobu šesti- a sedmilitrovou, jakým způsobem načerpám těmito nádobami 50 l? První nádoby užiji x-kráte, druhé y-kráte, jest tedy řešiti rovnici $6x + 7y = 50$. Připojme rovnici $6x + 6y = 6r$, kdež r jest libovolné číslo celistvé. Odečtením obou rovnic obdržíme $y = 50 - 6r$, takže $x = 7r - 50$. Nyní x i y jsou jen tehdy celá kladná čísla, když $r = 8$, takže $x = 7$, $y = 6$.

13. Z Číny pochází tato úloha: Pán dá sluhovi třicet penízů, aby za ně zakoupil 30 ptáků a to pávy po 3, bažanty po 2 a holuby po 1 penízi. Kolik kterých koupí? Úloha vede k dvěma rovnicím: $x + y + z = 30$, $3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$. Po vyloučení z jest $5x + 3y = 30$, a tato rovnice ve spojení s rovnicí $6x + 3y = 3r$ dává $x = 3r - 30$, $y = 60 - 5r$, $z = 2r$; jen pro $r = 11$ jsou všechna čísla celá kladná: $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.

Tato úloha stala se v pravém slova smyslu mezinárodním tématem, které nalezneme u všech národů a časů. V učebnici Alkuinově (byl to učitel a přítel Karla Velikého) zní takto: Jest rozděliti sto mírek mezi 100 mužů, žen a dětí tak, aby mužové dostali po 3 mírkách, ženy po 2 a děti po půl mírce. V jedné staroněmecké učebnici uvedena jest tato úloha v tomto rouše: Do krčmy přišli zbrojnoši, muži a ženy. Utratili dohromady 20 grošů; kolik bylo kterých, bylo-li dohromady dvacet osob a utratil-li zbrojnoš 5 gr., muž 3 gr. a žena $\frac{1}{2}$ gr.? U Adama Riese (kol r. 1550) sluje tato úloha úlohou společného cechu; poněvadž někdy místo zbrojnošů, mužů a žen uvádějí se muži, ženy a panny, sluje zvláštní metoda pro řešení těchto rovnic metodus virginum (m. panen, též m. potatorum, pijáků, nejčastěji pak m. coeci; doslovně metodou slepého, tápajícího, není však vyloučeno, že slovo coeci vzniklo neporozuměním z der Zeche — účtu). Tato metoda spočívá v tomto obratu: Kdyby všech 20 účastníků byly panny, utratily by celkem $20 \cdot \frac{1}{2}$ gr. $= 10$ gr. Zbývajících tedy $20 - 10 = 10$ gr. připadá tedy na muže a ženy, o nichž nyní předpokládáme, že utratili $4\frac{1}{2}$, resp. $2\frac{1}{2}$ gr.

Tento obrat je vlastně eliminace neznámé z z rovnic $x + y + z = 20$, $5x + 3y + \frac{1}{2}z = 20$; výslednou rovnici $4\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}y = 20$ je pak nutno řešiti zkusmo.

14. Naznačme řešení ještě jiné úlohy: Kolikerým způsobem lze vyplatiti 5 K pomocí mincí 1 K, 50 hal. a 25 hal.? Zde však přicházejí v úvahu i nulové hodnoty pro neznámé. Příslušná rovnice zní $25x + 50y + 100z = 500$ a po krácení $x + 2y + 4z = 20$. Položme

$x = 0$,	pak	$y + 2z = 10$	podává	6	řešení,
$x = 2$,	,,	$y + 2z = 9$	,,	5	,,
$x = 4$,	,,	$y + 2z = 8$	,,	5	,,
$x = 6$,	,,	$y + 2z = 7$	,,	4	,,
$x = 8$,	,,	$y + 2z = 6$	,,	4	,,
$x = 10$,	,,	$y + 2z = 5$	,,	3	,,
$x = 12$,	,,	$y + 2z = 4$	,,	3	,,
$x = 14$,	,,	$y + 2z = 3$	,,	2	,,
$x = 16$,	,,	$y + 2z = 2$	,,	2	,,
$x = 18$,	,,	$y + 2z = 1$	,,	1	,,
$x = 20$,	,,	$y + 2z = 0$	,,	1	,,

tedy celkem 36 řešení.

15. Jiná úloha tohoto druhu jest: Kolikerým způsobem pomocí známek 20hal., 30hal., 40hal., 60hal., lze získati frankaturu 1 K 20 hal.?

Jsou však neurčité rovnice i stupňů vyšších; omezíme se jen na rovnice kvadratické. Již v nejstarších dobách budil pozornost pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5, podávaje tak řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$. Číňané půltřetího tisíce let př. Kr. znali jiné řešení této rovnice, jak vidno z této úlohy: Přesně uprostřed čtvercové nádržky o straně 10 stop trčí rákosový prut jednu stopu nad vodou. Skloní-li se prut přesně k půlícímu bodu kterékoliv strany, ponoří se právě pod vodu; jak jest nádržka hluboká? Je-li hloubka x, platí $(x + 1)^2 = x^2 + 25$, odkudž $x = 12$. Tak jsme došli k pravoúhlému trojúhelníku 5, 12, 13. Existuje více pravoúhlých trojúhelníků, jichž strany jsou dány celými čísly? Těchto trojúhelníků (zvaných pythagorejskými, nebo též racionálnými) jest nekonečně mnoho a sestrojíme je takto: Volme si dvě celá kladná čísla $m > n$, pak trojúhelník o odvěsnách $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, má za přeponu $m^2 + n^2$. Na př. onen čínský trojúhelník obdržíme kladouce $m = 3$, $n = 2$. Snadno se ukáže, že pythagorejské trojúhelníky mají obsahy, poloměry kružnic opsané, vepsané i připsané vyjádřeny čísly racionálnými, t. j. buď čísly celými, nebo čísly, která jsou podílem číslem celých. I tangenty polovičních ostrých úhlů jsou vyjádřeny čísly racionálnými:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m-n}{m+n}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{n}{m}.$$

16. Již Heron znal kosoúhlé trojúhelníky, jichž obsahy, poloměry jmenovaných kružnic i tangenty polovičních úhlů jsou vyjádřeny čísly racionálnými. Takové trojúhelníky slují Heronovy, jejich konstrukce jest snadná. Volme 4 celá kladná čísla m, n, m_1, n_1 tak, aby $mn = m_1n_1$, a sestrojme z nich dva pravoúhlé trojúhelníky, které zřejmě mají jednu odvěsnu stejnou. Přiložme je touto odvěsnou k sobě tak, aby vznikl trojúhelník o stranách $a = m^2 + n^2$, $b = m_1{}^2 + n_1{}^2$, $c = m^2 - n^2 + m_1{}^2 - n_1{}^2$; to je žádaný trojúhelník. Jeho racionálné vlastnosti se dokáží snadno.

Ukažte, že $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{mm_1 - nn_1}{mn_1 + nm_1}$, a obsah trojúhelníka $(mm_1 - nn_1)(mn_1 + m_1n)$.

Odvoďte podobné vzorce skládajíce dva pythagorejské trojúhelníky, o nichž platí $m^2 - n^2 = m_1{}^2 - n_1{}^2$.

Avšak pythagorejské trojúhelníky, nebo též čísla pythagorejská, daly podnět ještě k jiným úvahám: Když existují celá kladná čísla x, y, z, o nichž platí $x^2 + y^2 = z^2$, existují též celá kladná čísla (jiná než předchozí), o nichž by platilo $x^3 + y^3 = z^3$ nebo $x^4 + y^4 = z^4$ nebo obecně $x^n + y^n = z^n$, kdež n jest číslo celé kladné? A to jest ona slavná úloha Fermatova, o níž Fermat (1601—1665) vyslovil bez důkazu větu, že nelze udati tři celá kladná čísla, o nichž by platilo

$x^n + y^n = z^n$, jakmile $n > 2$. Důkaz tohoto tvrzení,*) zvaného též velká nebo poslední věta Fermatova, posud podán nebyl.

Řešte pomocí Fibonacciových čísel rovnici $5x^2 + 4 = y^2$ čísly celými a kladnými.

10.
ÚLOHY Z FORONOMIE.

Jak oblíbenými tak i často velmi nesnadnými jsou úlohy z foronomie, t. j. z nauky o pohybu, které lze v podstatě redukovati na dvě základní úlohy.

A) Dvě tělesa vzdálena od sebe d pohybují se po přímce proti sobě rychlostmi c_1 a c_2 v jednotce času; kdy se potkají? To se stane za x jednotek, první těleso urazí dráhu c_1x, druhé c_2x, platí tedy rovnice $c_1x + c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 + c_2}$.

B) Dvě tělesa vzdálená od sebe o d pohybují se po přímce za sebou rychlostmi c_1 a c_2 v jednotce času. Kdy těleso, jehož rychlost na př. c_1 jest větší, dožene těleso druhé? Stane se tak za x jednotek času: první těleso urazí dráhu c_1x, druhé c_2x; úloha vede na rovnici $c_1x - c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 - c_2}$.

a) Z nádraží na letovisko jest 12 km; pro rodinu přijede auto, jež není s to najednou odvésti rodinu a její zavazadla. Otec se synem jdou pěšky; až auto s ostatními dojedou na letovisko, vrátí se pro otce a syna. Kdy bude opět rodina pohromadě, jede-li auto 30 km za hodinu, jde-li otec se synem 4 km za hodinu a zdrží-li se auto na letovisku 6 minut? Aby ujelo auto 12 km, potřebuje $\frac{12}{30}$ hodiny = 24 min.; otec jde se synem celkem 24 + 6 minut = 30 minut pěšky, za tuto

*) Viz Rychlík, l. c. str. 93 a n.; zde budiž jen podotčeno, že věta platí pro prvočísla < 307 a pro čísla složená z prvočísel < 307; připojíme-li podmínku, že žádné z čísel x, y, z není dělitelno n, platí pro prvočísla n < 14000 a čísla z nich složená.