Aritmetické hry a zábavy

6. Magické čtverce

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 23–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403034

a odtud

$$\sin \varrho = \frac{1}{\sqrt{2117}}, \quad \varphi = 1^\circ\, 14'\, 43''.$$

Příklady. 1. Je-li $b_0 = p$, $b_1 = q$, $b_2 = p + q$, $b_3 = p + 2q$, ..., ukažte, že

$$b_n b_{n+2} - b^2_{n+1} = (-1)^n (p^2 + pq - q^2),$$

a že

$$5b_n^2 + 4(-1)^{n+1}(p^2 + pq - q^2)$$

jest úplný čtverec. Odmocniny tvoří opět čísla Fibonacciova o počátečních podmínkách $\bar{b}_0 = -p + 2q$, $\bar{b}_1 = 2\bar{p} + q$.

2. Vysvětlete a propočtěte záhadu vzniklou proměnou čtverce o straně 13 v obdélník o stranách 8 . 21

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 8^2}\sqrt{5^2 + 13^2}}, \quad \varphi = 28'\, 14''.$$

3. Ukažte, že $u^2_n + u^2_{n+1}$ jest rovněž člen téže Fibonacciho posloupnosti.

4. Stanovte obecný člen posloupnosti, v níž $A_0 = m_0$, $A_1 = m_1$, $A_2 = A_0 A_1$, ..., $A_n = A_{n-1} \cdot A_{n-2}$.

6.

MAGICKÉ ČTVERCE.*)

Snad žádný ze zábavných problémů nemůže se vykázati — až na slovní rovnice — tak bohatou kulturní historií a literaturou jako magické čtverce. Nazýváme tak čtverce o n krát n polích, do nichž jest vepsáno po jednom z čísel 1, 2, 3, ..., n^2, tak uspořádaných, že součty v řádcích i ve sloupcích i na hlavní a vedlejší úhlopříčce jsou tytéž. Tento součet jest $\frac{1}{2}(1 + n^2) : n$ a sluje konstantou daného čtverce. Magické čtverce jsou nesporně původu orientálního, vznik jejich jest však zahalen neproniknutelnou rouškou — prostě vězí v neúnavné lidské hravosti. Připomeňme aspoň jednu z nejstarších forem magického čtverce. Novoplatonik Theon (2. stol. po Kr.) zpozoroval, že ve čtverci

*) Novější literatura o magických čtvercích: *Fitting*, Jahresbeder d. Mathematikervereinigung, 40, str. 177, 1931; *Schubert-Fitting*, Mathem. Mussestunden, str. 132; *Kowalewski:* Magische Quadrate und mag. Parketierung, Scientia delectans II. 1937; viz téhož autora: Grossen Mathematiker 1939, str. 37/41.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

jest číslo 5 aritmetickým středem čísel nalézajících se v témže řádku nebo v témž sloupci nebo úhlopříčce. Jak již název ukazuje, zmocnily se těchto čtvercových schemat t. zv. „tajné vědy“ a namnoze i obyčejná pověra: amulety s magickými čtverci chránily děti před nemocemi, jezdcova koně před úrazem; byly vtesávány do zdí, aby chránily budovy; čtverce, jichž konstanta rovnala se některému datu, přinášely štěstí atd. Ještě v r. 1865 vydává vídeňský lékař F. Liharžik (nar. ve Val. Meziříčí 1813, zemř. 1866) spis: *Das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues.* I v dějinách magických čtverců opakuje se známý zjev, že zájem o problém rázem utuchá, jakmile jest známo dokonalé řešení. Omezíme se jen na nejdůležitější údaje.

A) Nejjednodušší magický čtverec jest pro $n = 3$, jeho konstanta jest $\frac{1}{2}(1 + 9) \cdot 3 = 15$. Jeho konstrukce jest velmi jednoduchá: Do prostředního pole druhého řádku napišme 5, do rohových polí čísla 2, 4, 6, 8 tak, aby v úhlopříčkách byl součet 15, a nyní lichými čísly vyplňme prázdná místa tak, aby součet opět byl patnáct. Na př.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1.

α_1	α_2	α_3
α_4	α_5	α_6
α_7	α_8	α_9

2.

α^{α_1}	α^{α_2}	α^{α_3}
α^{α_4}	α^{α_5}	α^{α_6}
α^{α_7}	α^{α_8}	α^{α_9}

3.

Snadno zjistíme, že počet různých čtverců jest 8.

1. Ukažte, že třetí ze schemat shora uvedených má tu vlastnost, že součiny mocnin v témž řádku, sloupci i úhlopříčce jsou tytéž, je-li čtverec 2. magický.

2. Je-li N nejmenší společný násobek čísel $\alpha = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$, jsou ve čtverci, jehož prvky jsou $N : \alpha$ ve všech směrech čísla v harmonickém poměru.

3. Jsou-li a, b čísla ve dvou sousedních rozích magického čtverce, jest hodnota determinantu daného magickým čtvercem $45\,(a - b)\,(a + b - 10)$.

4. Sestavte magický obdélník ze štítků domina (2,6), (0,1), (1,5); (1,2), (1,4), (1,6); (1,3), (3,6), (1,1).

B) Nejstarší čtverec známý ve střední Evropě jest na A. Dürerově mědirytině z r. 1514 nesoucí název Melencolia (viz Prameny č. 42, 1941, A. Dürer, str. 31). Jest to alegorická postava sedící ženy, obklopené různými předměty symbolisujícími vědy a zaměstnání: koule a mnohostěn značí geometrii, magický čtverec o 16 polích pak aritmetiku, — melencolia — melancholie neznačí zde jednu z letor, nýbrž jest tak pojmenováno úsilovné přemýšlení a bádání. Dürerův čtverec jest tento:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Konstanta tohoto čtverce jest $\frac{1}{2}\,(1 + 16)\,.\,4 = 34$, prostřední dvě čísla v poslední řádce udávají rok, kdy obraz vznikl.

Jiný magický čtverec o 16 polích vznikne ze schematu

1	*2*	*3*	4
5	6	7	*8*
9	10	11	*12*
13	*14*	*15*	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	1

v němž *ležatá* čísla doplníme do 17.

C) Konstrukcí magických čtverců o lichém počtu polí jest známo několik, vyložíme si metodu pocházející od

Bacheta de Méziriac, zvanou též metodou teras. Volme $n = 5$; napišme toto schema

				5				
		A	4		10		*B*	
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
		C	16		22		*D*	
				21				

3	16	9	22	15
20	8	21	4	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Terasu na AB položme na základnu CD, terasu podél strany BD položme na AC atd.

Pokuste se základní schema napsati jinak a odvoditi jiný magický čtverec o 25 polích.

D) Sestrojiti magický čtverec o sudém počtu polí jest nesnadnější; nutno rozeznávati dva případy: n jest buď tvaru $2(2m + 1)$, nebo $4m$ (čísla sudolichá a sudosudá). Konstrukce těchto čtverců opírá se o tyto vlastnosti čtvercového schematu, do jehož polí jsme postupně napsali čísla $1; 2; 3; \ldots; n^2$, tak jak za sebou jdou. Součet členů v k-té řádce tvořících řadu aritmetickou (první člen jest $(k - 1)\,n + 1$, rozdíl 1) jest $s_k = kn^2 - \frac{n-1}{2}\,n$, podobně jest součet prvků v řádce stejně vzdálené od druhé vodorovné strany čtverce $s_{n-k+1} = (n - k + 1)\,n^2 + \frac{(n-1)\,n}{2}$; poněvadž konstantou čtverce jest $C = \frac{n(n^2+1)}{2}$, lze psáti

$$s_k = C - \frac{n^2(n+1-2k)}{2}, \; s_{n-k+1} = C + \frac{n^2(n+1-2k)}{2},$$

$$k < \frac{n}{2}.$$

Značíme-li P_k, P_{n-k+1} součty ve sloupci k-tém a $n - k + 1$, vypočteme podobně $P_k = C - \frac{n(n+1-2k)}{2}$,

$$P_{n-k+1} = C + \frac{n(n+1-2k)}{2}, \; k < \frac{n}{2}.$$

Nedostává se tedy a nadbývá ve sloupcích i řádcích stejně od krajů vzdálených táž veličina; ve vhodné záměně prvků v těchto řádcích a sloupcích spočívá metoda sestrojiti magické čtverce o sudém n, kterou vyložíme na dvou zvláštních případech.

a) Budiž $n = 6$. Napišme do čtverce jako dříve čísla 1, 2, 3, ..., 36 a všimněme si, že čísla stojící v obou úhlopříčkách mají součet rovný konstantě čtverce $\frac{1}{2}(1+36) \cdot 6 = 111$. V dalším tato čísla zůstanou již na úhlopříčkách.

α) Čísla v obou úhlopříčkách napišme v opačném sledu.

β) Zaměňme nyní čísla (3; 33); (7; 25); (14; 20): součty ve všech řádcích jsou 111, součty ve sloupcích postupně jsou: 106; 108; 110; 112; 114; 116.

γ) Zaměňme nyní čísla (2; 5); (9; 10); (13; 18); nyní i součty ve všech sloupcích činí 111 a magický čtverec zní:

36	5	33	4	2	31
25	29	10	9	26	12
18	20	22	21	17	13
19	14	16	15	23	24
7	11	27	28	8	30
6	32	3	34	35	1

b) Budiž nyní $n = 8$, tedy číslo sudosudé. Opět vepišme do čtverce čísla 1; 2; 3; ...; 64, konstanta čtverce jest 260. Součty v řádcích jsou: 260 — 224; 260 — 160; 260 — 96; 260 — 32; 260 + 32; 260 + 96; 260 + 160; 260 + 224; součty v řádcích pak: 260 — 28; 260 — 20; 260 — 12; 260 — 4; 260 + 4; 260 + 12; 260 + 20; 260 + 28.

Vyměňme nyní mezi sebou sledy

3; 4; 5; 6 za 62; 61; 60; 59,
11; 12; 13; 14 za 54; 53; 52; 51,
17; 25; 33; 41 za 48; 40; 32; 24,
18; 26; 34; 42 za 47; 39; 31; 23,
59; 60; 61; 62 za 6; 5; 4; 3,

čímž docílíme žádaného čtverce:

1	2	62	61	50	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	56	6	5	4	3	63	64

Rozdělte původní čtverec na 4kráte 4 čtverečků po 4 polích pak jest zřejmo, že jsme zaměnili prvky v 2. a 3. čtverečku za prvky ve 14. a 13. čtverečku, dále jsme zaměnili prvky v 5. a 9. čtverečku s prvky ve čtverečku 12. a 8. Zkuste zaměniti prvky v ostatních polích ponechávajíce právě jmenované čtverečky beze změny!

E) Byly však rozřešeny i obecnější úlohy, na př. sestrojit magický čtverec, jehož část jest opět magickým čtvercem, sestrojiti magické mnohoúhelníky a krychle atd.; viz na př. *Schubert-Fitting*: Mathem. Mussestunden, 1941, str. 153. O sestrojování magických čtverců o sudém počtu polí viz *Aupic*: Magické čtverce, Praha, 1932 (v komisi Jednoty č. matematiků a fysiků).

7.
PLNĚNÍ NÁDOB.

Mějme N-litrovou nádobu až po okraj naplněnou vodou a dvě nádoby prázdné o n_1 a n_2 litrech; kdy jest možno přeléváním vody docíliti množství $\frac{1}{2}N$? Řešení této úlohy (staré přes 500 let a to pro čísla $N = 8$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$) lze provésti dvojím způsobem: Budiž $n_1 > n_2$; buď naplníme nejprve nádobu o n_1 litrech a z ní nádobu o n_2 litrech, načež obsah této nádoby vlijeme opět do nádoby n_2-litrové a opět naplníme nádobu o n_1 litrech atd., nebo počneme plniti nádobu o n_2 litrech a potom obsah vlijeme do nádoby o n_1 litrech. Znovu naplníme nádobu n_2-litrovou a pokračujeme způsobem popsaným. Pohodlnější jest způsob první:

N	n_1	n_2
N	0	0
$N - n_1$	n_1	0
$N - n_1$	$n_1 - n_2$	n_2
$N - n_1 + n_2$	$n_1 - n_2$	0
$N - n_1 + n_2$	0	$n_1 - n_2$
$N - 2n_1 + n_2$	n_1	$n_1 - n_2$
$N - 2n_1 + n_2$	$2n_1 - 2n_2$	n_2
$N - 2n_1 + 2n_2$	$2n_1 - 2n_2$	0

A nyní by se pořadí opakovalo; je-li $N - 2n_1 + 2n_2 = 2n_1 - 2n_2$, t. j. $n_1 - n_2 = \frac{1}{4}N$, jest původní množství vody roz-