$\log x = \frac{x}{10^2}, \ldots, \log x = \frac{x}{10^n}$, čímž vznikají tyto zajímavé vztahy:

$$\log 1{,}371288574238542 = 0{,}1371288,$$
$$\log 10{,}00000.. = 1{,}000...$$
$$\log 237{,}5812 = 2{,}375812 \text{ atd.}$$

Tamtéž na str. 118 čteme tuto zajímavou posloupnost

$$\begin{array}{llll}
\sin 0^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}}, & \sin 60^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}}, \\
\sin 15^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, & \sin 67^\circ 30' & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \\
\sin 22^\circ 30' & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, & \sin 75^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \\
\sin 30^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}}, & \sin 90^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}}. \\
\sin 45^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{0}}, & &
\end{array}$$

9. Napišme čísla celá tak, jak za sebou jdou, vedle sebe; která číslice stojí na miliontém místě?

9	1cifer. čísel zaujme	$9 = 10 - 1$ míst,
90	2cifer. čísel zaujme	$90 . 2 = 200 - 20$ míst,
900	3cifer. čísel zaujme	$900 . 3 = 3000 - 300$ míst,
9000	4cifer. čísel zaujme	$9000 . 4 = 40000 - 4000$ míst,
90000	5cifer. čísel zaujme	$90000 . 5 = 500000 - 50000$ míst;

tedy tato všechna čísla celkem $543210 - 54321 = 438889$ míst, dalších 561111 míst již zaujímají čísla šesticiferná, nutno jich tedy ještě napsati $561111 : 6 = 93518$, zbytek jest 3; 93518té číslo šesticiferné jest $99999 + 93518 = 193517$, další číslo jest 193518, hledaná číslice 3.

5.
ČÍSLA FIBONACCIOVA.

Uvažujme o rovnici $\varrho^2 - \varrho - 1 = 0$, mající kořeny $\varrho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Především jest $\varrho_1{}^2 = \varrho_1 + 1$, $\varrho_2{}^2 = \varrho_2 + 1$; a též, pro číslo n celé kladné, $\varrho_1{}^{n+3} = \varrho_1{}^{n+2} + \varrho_1{}^{n+1}$, $\varrho_2{}^{n+3} =$

$= \varrho_2^{n+2} + \varrho_2^{n+1}$, a po odečtení $\varrho_1^{n+3} - \varrho_2^{n+3} = (\varrho_1^{n+2} - \varrho_2^{n+2}) + (\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})$.

Označme $\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1} = A_n$, pak lze psáti: $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$.

Když $n = 0$, jest $A_0 = \varrho_1 - \varrho_2 = \sqrt{5}$; když $n = 1$, jest $A_1 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2) = \sqrt{5}$, takže $A_2 = A_1 + A_0 = 2\sqrt{5}$, $A_3 = A_1 + A_2 = 3\sqrt{5}$, ...

Budeme uvažovati o posloupnosti čísel

$$\frac{A_0}{\sqrt{5}}, \frac{A_1}{\sqrt{5}}, \frac{A_2}{\sqrt{5}}, \dots;$$

značme ji

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = \frac{\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1}}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

I o členech této posloupnosti platí

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{2}$$

za počátečních podmínek $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

Prvních deset členů této posloupnosti tedy jest

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55.

Tato čísla, jež mají mnoho pěkných a zajímavých vlastností, slují čísly Fibonacciovými dle přízviska Leonarda Pisanského, italského matematika, žijícího ve XIII. století, o jehož úloze vedoucí k těmto číslům se ještě zmíníme.

Jak z předchozího patrno, lze je buď počítati ze vzorce (1), nebo z výtvarného zákona (2); poslední způsob při vyšších indexech jest velmi nepohodlný; upravme si proto vhodně pro veliká n způsob první.

Poněvadž jest $\varrho_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618\dots$, jest $\frac{\varrho_2}{\sqrt{5}} = -0{,}277\dots$, $\frac{\varrho_2^2}{\sqrt{5}} = +0{,}171\dots$, $\frac{\varrho_2^3}{\sqrt{5}} = -0{,}108\dots$, $\frac{\varrho_2^4}{\sqrt{5}} =$

$= + 0{,}067\ldots$, $\dfrac{\varrho_2^5}{\sqrt{5}} = -0{,}041\ldots$, $\dfrac{\varrho_2^6}{\sqrt{5}} = +0{,}025\ldots$, atd.
Lze tedy s velmi malou chybou ε nahraditi číslo a_n číslem $a_n = \dfrac{\varrho_1^{n+1}}{\sqrt{5}}$, při čemž $-1 < \varepsilon < 0$ pro lichá n a $0 < \varepsilon < 1$ pro sudá n. Rostou tedy Fibonacciova čísla pro velká n jako geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Při praktickém počítání nutno užíti logaritmů sedmi a vícemístných.

Na př. pro $n = 15$ jest $\log \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 0{,}2089785$ a tedy $a_{15} = 987{,}0023$ místo správného $a_{15} = 987$.

1. Nahraďme původní počáteční podmínky jinými kladouce $b_0 = p$, $b_0 = q$; tak obdržíme posloupnost

$$p,\ q,\ p + q,\ p + 2q,\ 2p + 3q,\ \ldots,$$

takže s ohledem na původní posloupnost jest

$$b_n = pa_{n-2} + qa_{n-1}.$$

2. Snadno stanovíme součet prvních n členů Fibonacciových. Jest totiž:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1}),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varrho_1 \frac{\varrho_1^{n+1} - 1}{\varrho_1 - 1} + \varrho_2 \frac{\varrho_2^{n+1} - 1}{\varrho_2 - 1} \right];$$

poněvadž jest

$$\varrho_1(\varrho_1 - 1) = 1,\ \varrho_2(\varrho_2 - 1),\ \varrho_1 = \frac{1}{\varrho_1 - 1},\ \varrho_2 = \frac{1}{\varrho_2 - 1},$$

jest $$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varrho_1^{n+3} - \varrho_1^2 - \varrho_2^{n+3} + \varrho_2^2) = a_{n+2} - a_1.$$

3. V městě se objevila epidemická nemoc, která se objeví u postiženého až druhý den, nazítří tohoto dne pacient umírá nakaziv v každém z obou dní další jednu osobu.

a) Kolik nemocných jest během n-tého dne?
b) Kolik nemocných zemře koncem n-tého dne?
c) Kolik osob zemřelo během těchto n dní?

V n-tý den nechť jest nemocno b_n pacientů, jsou to ti, kteří byli nakaženi předevčírem v počtu b_{n-2}, dále nakažení dne předchozího v počtu b_{n-1}; jest tedy $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$. První den jest $b_0 = 1$ jeden nemocný, druhý den týž a ještě jedna osoba předešlého dne nakažená, tedy $b_1 = 2$. Jedná se tedy o posloupnost 1; 2; 3; 5; 8; ... Jest totožná s posloupností námi uváženou, platí však o ní $b_n = a_{n+1}$. Koncem n-tého dne zemřou pacienti nakazivší se den před tím, jest tedy $c_n = a_{n-1}$; celkový počet mrtvých jest pak

$$d_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2} = a_n - a_2 \text{ lidí.}$$

Tedy 14. den po vypuknutí choroby jest nemocno $a_{15} = 987$, koncem 14. dne zemře $a_{13} = 377$ lidí a celkový počet úmrtí je $a_{16} - 1 = 986$ lidí.

U Fibonacciho čteme tuto úlohu v tomto znění. Pár králíků vrhne každý měsíc další pár, kolik párů králíků jest koncem roku, nezajde-li žádný z králíků?

4. Z jiných vlastností těchto čísel uveďme, že $N_n = 5a_n^2 + 4(-1)^{n+1}$ jest úplný čtverec. Jest totiž

$$N_n = \frac{5(\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})^2}{5} + 4(\varrho_1\varrho_2)^{n+1} = (\varrho_1^{n+1} + \varrho_2^{n+1})^2.$$

Avšak čísla $B_0 = \varrho_1 + \varrho_2$, $B_1 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$, $B_2 = \varrho_1^3 + \varrho_2^3, \ldots$ též hoví rovnici $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$, neboť jest:

$$\varrho_1^{n+1} + \varrho_2^{n+1} - \varrho_1^n - \varrho_2^n - \varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1} =$$
$$= \varrho_1^{n+1}(\varrho_1^2 - \varrho_1 - 1) + \varrho_2^{n+1}(\varrho_2^2 - \varrho_2 - 1) \equiv 0$$

avšak pro počáteční hodnoty $B_0 = 1$, $B_1 = 3$, takže řada odmocnin jest: 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

5. Dále jest

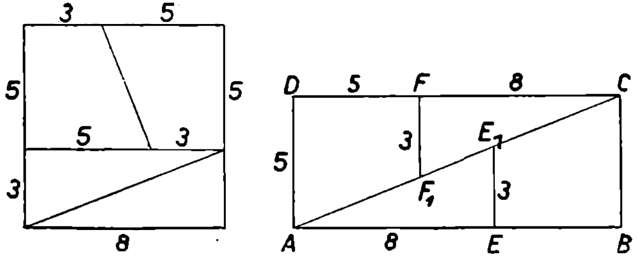
$$a_n a_{n+2} - a^2_{n+1} = (-1)^n.$$

Jest totiž levá strana rovna

$$\frac{(\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})(\varrho_1^{n+3} - \varrho_2^{n+3}) - (\varrho_1^{n+2} - \varrho_2^{n+2})^2}{5} =$$

$$= \frac{-(\varrho_1\varrho_2)^{n+1}(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{5} = (-1)^n.$$

Znázorněme nyní součiny a_n, a_{n+2}, a^2_{n+1} jako obsahy obdélníka a čtverce o stranách a_n, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, resp. o straně a_{n+1}; je-li n dostatečně velké, nepostřehneme, že tyto dvě plochy se různí o jednotku plošné míry. Toho využijeme k vysvětlení této záhady. Rozstřihněme čtverec a složme jej dle přiloženého návodu:



Obr. 1.

V druhém uspořádání se nám zdá, že jsme získali jednu jednotku plošné míry. Avšak nakreslená úhlopříčka není úsečkou; mezi jednotlivými částmi uvnitř obdélníka vznikl protáhlý kosodélník o ploše zadarmo získané 1. Kdyby body A, F_1, E_1, C ležely v jedné přímce, musilo by býti

$\overline{AE} : \overline{EE_1} = \overline{AB} : \overline{BC}$, odkud $\overline{EE_1} = \overline{AE} \cdot \overline{BC} : \overline{AB} = 3\frac{1}{13}$.

Avšak my jsme volili $\overline{EE_1} = 3$, leží tedy ve skutečnosti bod E_1 o $\frac{1}{13}$ pod skutečnou úhlopříčkou; podobně zjistíme, že bod F_1 leží nad skutečnou úhlopříčkou. Jaký úhel φ svírají strany tohoto kosoúhelníka ve vrcholu A? Jest

$\overline{AE_1} = \sqrt{8^2 + 3^2}$, $\overline{AF_1} = \sqrt{5^2 + 2^2}$, takže $\sqrt{73} \cdot \sqrt{29} \sin \varphi = 1$

a odtud

$$\sin \varrho = \frac{1}{\sqrt{2117}}, \quad \varphi = 1^\circ\, 14'\, 43''.$$

Příklady. 1. Je-li $b_0 = p$, $b_1 = q$, $b_2 = p + q$, $b_3 = p + 2q, \ldots$, ukažte, že

$$b_n b_{n+2} - b^2_{n+1} = (-1)^n (p^2 + pq - q^2),$$

a že

$$5b_n^2 + 4(-1)^{n+1}(p^2 + pq - q^2)$$

jest úplný čtverec. Odmocniny tvoří opět čísla Fibonacciova o počátečních podmínkách $\bar{b}_0 = -p + 2q$, $\bar{b}_1 = 2\bar{p} + q$.

2. Vysvětlete a propočtěte záhadu vzniklou proměnou čtverce o straně 13 v obdélník o stranách 8 . 21

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 8^2}\sqrt{5^2 + 13^2}}, \quad \varphi = 28'\, 14''.$$

3. Ukažte, že $u^2_n + u^2_{n+1}$ jest rovněž člen téže Fibonacciho posloupnosti.

4. Stanovte obecný člen posloupnosti, v níž $A_0 = m_0$, $A_1 = m_1$, $A_2 = A_0 A_1, \ldots, A_n = A_{n-1} \cdot A_{n-2}$.

6.

MAGICKÉ ČTVERCE.*)

Snad žádný ze zábavných problémů nemůže se vykázati— až na slovní rovnice — tak bohatou kulturní historií a literaturou jako magické čtverce. Nazýváme tak čtverce o n krát n polích, do nichž jest vepsáno po jednom z čísel 1, 2, 3, ..., n^2, tak uspořádaných, že součty v řádcích i ve sloupcích i na hlavní a vedlejší úhlopříčce jsou tytéž. Tento součet jest $\frac{1}{2}(1 + n^2) : n$ a sluje konstantou daného čtverce. Magické čtverce jsou nesporně původu orientálního, vznik jejich jest však zahalen neproniknutelnou rouškou — prostě vězí v neúnavné lidské hravosti. Připomeňme aspoň jednu z nejstarších forem magického čtverce. Novoplatonik Theon (2. stol. po Kr.) zpozoroval, že ve čtverci

*) Novější literatura o magických čtvercích: *Fitting*, Jahresbeder d. Mathematikervereinigung, 40, str. 177, 1931; *Schubert-Fitting*, Mathem. Mussestunden, str. 132; *Kowalewski:* Magische Quadrate und mag. Parketierung, Scientia delectans II. 1937; viz téhož autora: Grossen Mathematiker 1939, str. 37/41.