Aritmetické hry a zábavy

4. Zajímavá čísla a posloupnosti

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 15–18.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403032

niny $1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Přibeřme další mocninu 3^{n-1} a uvažujme dvě čísla $3^{n-1} + A$, $3^{n-1} + B$, kdež A, B jsou čísla utvořena mocninami $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Kdyby $3^{n-1} + A = 3^{n-1} + B$, musilo by býti $A = B$ — proti předpokladu. Avšak ani žádné z čísel $3^m + a$, kdež a je utvořeno mocninami $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{m-1}$ není rovno žádnému z čísel $3^{n-1} - A$ když $m < n - 1$. Neboť *největší* z čísel vytvořených mocninami o základu 3 a mocnitelích, 1, 2, 3, …, $n - 2$ je $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$; kdežto *nejmenší* vytvořené mocninou 3^{n-1} a nižšími jest: $3^{n-1} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots 3^{n-2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$. Jest tedy rozdíl čísel $3^{n-1} - A$, $3^m + a$, $(m < n - 1)$, roven nebo je větší jedné; jsou tedy čísla $3^{n-1} - A, 3^m + a$, $(m < n - 1)$ vesměs různá. Naše věta pro $n = 1$ jest triviální, pro $n = 2$ jest $S_2 = 4$ a skutečně lze psáti $1;\ 2 = 3 - 1;\ 3;\ 4 = 3 + 1$, věta tedy platí pro $n = 2$, proto platí i pro $n = 3$, platí-li pro $n = 3$, platí i pro 4 atd. Lze tedy všechna čísla v intervalu $< 1; \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) >$ napsati ve tvaru $3^{n-1} \pm 3^{n-2} \pm 3^{n-3} \pm \ldots \pm 3 \pm 1$ a podobně v témž intervalu pomocí závaží $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-1}$ lze realisovati každou váhu, ovšem musí býti dovoleno klásti závaží i na misku váženého zboží.

4.
ZAJÍMAVÁ ČÍSLA A POSLOUPNOSTI.

I při nejjednodušších početních výkonech setkáváme se s výsledky, jichž jednoduchost, nebo souměrnost, nebo podobná sestava překvapuje, na př.

1. $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $12^2 = 144$, $21^2 = 441$, $13^2 = 169$, $31^2 = 961$, $101^2 = 10201$, $102^2 = 10404$, $201^2 = 40401$, $103^2 = 10609$, $301^2 = 90601$, $112^2 = 12544$, $211^2 = 44521$, $113^2 = 12769$, $311^2 = 96721$, $122^2 = 14884$, $221^2 = 48841$.

2. Starověk velmi zajímaly tyto dva vztahy $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

3. Ukažte, že součet prvních, druhých a třetích mocnin

čísel 1, 5, 6, 14, 15, 19 jest týž jako součet týchž mocnin čísel 2, 3, 7, 13, 17, 18.

4. Jiné takové výpočty jsou: $4^2 = 16$, $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$, $3334^2 = 11115556$ atd. Číslo $3_{n-1}4$ nechť nám značí číslo, na jehož $n - 1$ prvních místech stojí 3, pak jest

$$3_{n-1}4 = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = \frac{10^n + 2}{3},$$

a jeho čtverec:

$$\frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4\,\frac{10^n - 1}{9} +$$

$$+ \frac{1 + 4 + 4}{9} = 1_{2n} + 4_n + 1.$$

5. Podobně jest $67^2 = 4489$, $667^2 = 444889$ atd. Číslo $6_{n-1}7$ lze psáti $\frac{2}{3}(10^n - 1) + 1 = \dfrac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$ a jeho čtverec $\dfrac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \dfrac{4(10^{2n} - 1)}{9} + \dfrac{4(10^n - 1)}{9} +$

$$+ \frac{1 + 4 + 4}{9} = 4_{2n} + 4_n + 1.$$

6. Velmi zajímavé jest periodické číslo $0,\overline{9}$, užijeme-li známého pravidla pro stanovení hodnoty ryze periodických zlomků, obdržíme $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$; podobně $1,\overline{9} = 2$; $0,6 = 0,5\overline{9}$ a pod.; lze tedy každé číslo racionální (t. j. celé nebo lomené) vyjádřiti dvojím způsobem v desítkové soustavě. — Odtud řešení této úlohy: Napiš sto čtyřmi devítkami: Každý po kratší úvaze píše $99\frac{9}{9}$, avšak úlohu: napiš sto třemi devítkami, rozřeší jen ten, jemuž jest známo, že $0,\overline{9} = 1$; tedy $100 = 99,\overline{9}$.

7. Před nedávnou dobou nebylo jediné zábavné hlídky v denním tisku, aby neuveřejnila a nežádala vysvětlení tohoto výpočtu (i reklama se zmocnila tohoto příkladu): Číslo 142857 postupně násobeno 2, 3, 4, 5, 6 dává postupně

čísla: 285714, 428571, 571428, 714285, 857142; tedy čísla psaná týmiž číslicemi jako původní násobenec. Naproti tomu jest sedminásobek daného čísla roven 999999. Vysvětlení jest na snadě: 142857 jest perioda zlomku $\frac{1}{7}$. Všimněme si tohoto naznačeného dělení blíže. Částeční dělenci jsou postupně: 10, 30, 20, 60, 50, 40 a jim odpovídají zbytky 3, 2, 6, 5, 4, 1 při částečných podílech 1, 4, 2, 8, 5, 7 — více částečných podílů není. Provádíme-li dělení $\frac{2}{7} = 2 : 7$, jsou částeční dělenci 20, 60, 50, 40, 10, 30, jim odpovídají zbytky 6, 5, 4, 3, 1, 2 a částečné podíly jsou 2, 8, 5, 7, 1, 4. Podobně tomu jest při $3 : 7 = \frac{3}{7} = \frac{1}{7} . 3$, atd. Poněvadž lze psáti:

$$\frac{142587}{10^6} + \frac{142587}{10^{12}} + \frac{142587}{10^{18}} + \ldots = 1,\text{*)}$$

jest po násobení sedmi

$$1 = \frac{999999}{10^6} + \frac{999999}{10^{12}} + \frac{999999}{10^{18}} + \ldots = 0,\overline{9}.$$

V číselné teorii se dokazuje, že existují prvočísla p taková, že perioda zlomku má právě $p - 1$ míst, na př. taková prvočísla jsou 17, 19:

$$\tfrac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}, \qquad \tfrac{1}{19} = 0,\overline{052631578947368421}.$$

Tato čísla násobena 2, ..., 16, resp. 2, ..., 18 dávají výsledky složené z téhož počtu týchž číslic jako čísla základní s nepatrnou změnou v pořadí jako čísla základní. — Jak vypočísti nejrychleji sedmináctinásobek posledně uvedeného čísla? Vypočteme $17 : 19 = 0,89\ldots$, hledáme v základním čísle skupinu 89 a píšeme výsledek:

$$0,894736842105263157.$$

8. V Rozhledech matematicko-přírodovědeckých, roč. XIII, str. 60, jsou uveřejněna řešení rovnic $\log x = \frac{x}{10}$,

---

*) Konvergentní řada geometrická o podílu $\frac{1}{10^6}$.

$\log x = \frac{x}{10^2}, \ldots, \log x = \frac{x}{10^n}$, čímž vznikají tyto zajímavé vztahy:

$$\log 1{,}371288574238542 = 0{,}1371288,$$
$$\log 10{,}00000.. = 1{,}000...$$
$$\log 237{,}5812 = 2{,}375812 \text{ atd.}$$

Tamtéž na str. 118 čteme tuto zajímavou posloupnost

$$\begin{array}{llll}
\sin 0^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}}, & \sin 60^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}}, \\
\sin 15^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, & \sin 67^\circ\,30' & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \\
\sin 22^\circ\,30' & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, & \sin 75^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \\
\sin 30^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}}, & \sin 90^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}}. \\
\sin 45^\circ & = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{0}}, & &
\end{array}$$

9. Napišme čísla celá tak, jak za sebou jdou, vedle sebe; která číslice stojí na miliontém místě?

9	1cifer. čísel zaujme	$9 = 10 - 1$ míst,
90	2cifer. čísel zaujme	$90 \,.\, 2 = 200 - 20$ míst,
900	3cifer. čísel zaujme	$900 \,.\, 3 = 3000 - 300$ míst,
9000	4cifer. čísel zaujme	$9000 \,.\, 4 = 40000 - 4000$ míst,
90000	5cifer. čísel zaujme	$90000 \,.\, 5 = 500000 - 50000$ míst;

tedy tato všechna čísla celkem $543210 - 54321 = 438889$ míst, dalších 561111 míst již zaujímají čísla šesticiferná, nutno jich tedy ještě napsati $561111 : 6 = 93518$, zbytek jest 3; 93518té číslo šesticiferné jest $99999 + 93518 = 193517$, další číslo jest 193518, hledaná číslice 3.

5.
ČÍSLA FIBONACCIOVA.

Uvažujme o rovnici $\varrho^2 - \varrho - 1 = 0$, mající kořeny $\varrho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Především jest $\varrho_1^2 = \varrho_1 + 1$, $\varrho_2^2 = \varrho_2 + 1$; a též, pro číslo n celé kladné, $\varrho_1^{n+3} = \varrho_1^{n+2} + \varrho_1^{n+1}$, $\varrho_2^{n+3} =$