Aritmetické hry a zábavy

3. Soustavy číselné

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 12–15.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403031

3.

SOUSTAVY ČÍSELNÉ.

Odedávna všichni národové kulturní užívají při zapisování čísel a počítání s nimi soustavy desítkové (dekadické). Ale nebylo tomu tak vždy a všude; ještě dnes v našem počítání projevuje se orientální soustava šedesátková (dělení úhlů a času). Máme zaručené zprávy o užívání soustavy pětkové i dvacítkové — zřejmě jako desítková — souvisí s počtem prstů na jedné, dvou rukou, případně i nohou. Pět, deset, dvacet lidských prstů jest první počítací stroj člověka.

Německý matematik Leibniz byl na omylu, přičítal-li Číňanům počítání v soustavě dvojkové (binární, dyadické), jež se opírá o tato pravidla: 1. pro číslice jsou jen dva znaky, 2. dvě jednotky řádu nižšího tvoří jednu jednotku řádu vyššího. Pro minimální počet znaků, jež tato soustava potřebuje k vyjádření jakéhokoliv celého čísla, je pro některé problémy velmi výhodná, zejména jedná-li se o čísla poměrně malá. Číslice 0, 1 můžeme nahraditi kterýmikoliv dvěma znaky +, —; □, ○, rub a líc mince, sirky položené hlavičkou dolů i nahoru a libovolné číslo tak znázorniti; to jest pak základem některých kouzelných triků, ovšem hádající musí býti smluven s někým ze společnosti. (Viz též Kowalewski: Alte und neue Spiele, 21—35, Die geheimnisvollen Reste oder der Gedankenleser.)

Rozřešme některé úlohy: 1. Kterému číslu v soustavě desítkové odpovídá v soustavě dvojkové číslo $(10100101)_{II}$? Nejvyšší jednotky jsou řádu 7., tedy $(10100101)_{II} = 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1 = 128 + 32 + 4 + 1 = 165$.

2. Vyjádřete v soustavě dvojkové $(1000)_X$. Na nejnižším místě bude zbytek dělení 1000 : 2 = 500, tedy 0, na dalším místě bude zbytek dělení 500 : 2 = 250, tedy zase 0, dále 250 : 2 = 125, tedy 0; 125 : 2 = 62 se zbytkem 1, 62 : : 2 = 31, zbytek 0, atd. Jest tedy $(1000)_X = (1111101000)_{II}$. Snadno nahlédneme, že kterékoliv číslo v soustavě dvojkové

může býti znázorněno jediným způsobem; tato okolnost ve spojení se skutečností, že dvojkový systém obsahuje pouze dva znaky — 0, 1 — jest základem mnoha vtipných obratů. Uvedeme některé z nich.

3. Přepsati dekadický násobitel do dvojkové soustavy a pak prováděti násobení, jest prastará metoda do střední Evropy přišlá asi z Orientu; i u nás jí bylo užíváno a slula duplace (nejstarší asi pojmenování „dvojení" oproti „rozmnožení" = násobení viz Flajšhans: Claret a jeho družina, díl I, str. 15; Praha 1926). Máme-li tedy provésti násobení 136×19, pišme $19 = 2^4 + 2 + 1$ a proveďme násobení tak, že násobenec postupně násobíme dvěma a současně dělitel dělíme dvěma (tak ho vlastně převádíme do soustavy dvojkové)

136 ×	19	(1)
272	9	(1)
544	4	(0)
1088	2	(0)
2176	1	(1)

a nyní sečteme částečné součiny, u nichž stojí zbytek 1. Jest tedy $136 \times 19 = 2176 + 272 + 136 = 2584$.

4. Napišme všechna čísla od 1 do 40 v soustavě dvojkové; čísla, v nichž jest jako sčítanec zastoupeno $2^0 = 1$, $2^1 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, vepišme postupně do tabulek nadepsaných 1, 2, 4, 8, 16, 32:

1			
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39

2			
2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	38		

4			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	38		

8			
8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40			

16			
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

32			
32	33	34	35
36	37	38	39
40			

Vyzvěme nyní někoho, aby si myslil číslo do 40 a aby označil, v kterých tabulkách jest myšlené číslo: to jest pak rovno součtu čísel nadepsaných jednotlivým tabulkám; proč?

5. Poněvadž každé celé číslo lze napsati jako součet různých mocnin čísla 2, lze každou váhu na př. do 100 g odvážiti pomocí závaží, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 g na př. 89 g $=$ $= 64$ g $+$ 16 g $+$ 8 g $+$ 1 g. Praxe ovšem používá soustavy 1 g, 2 g, 2 g, 5 g; těmito závažími lze jednoduše uskutečniti všechny váhy 1 g až 10 g, nad to má tato soustava tu výhodu, že součet těchto závaží jest právě jedna jednička vyššího řádu, zde 10 g $=$ 1 dkg. Již Bachet de Méziriac zabýval se otázkou, jak voliti váhu jednotlivých závaží aby při jich nejmenším počtu bylo možno uskutečniti vážení v rozsahu co největším. Zkoušel proto soustavu $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, atd., pak ovšem musil připustiti, aby bylo dovoleno klásti závaží i na misku váženého zboží. Stanovme, kolik jest možno napsati čísel pomocí mocnin $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^{n-1}$, spojujeme-li tato čísla znaménkem $+$ i $-$; značme tento počet S_n. Především jsou zde čísla napsaná jedinou mocninou, těch je n; dále čísla napsaná dvěma mocninami ve tvaru $3^{n_1} \pm 3^{n_2}$, $n_1 > n_2$, těch jest $2\binom{n}{2}$; čísel tvaru $3^{n_1} \pm 3^{n_2} \pm 3^{n_3}$ $(n_1 > n_2 > n_3)$ jest $2^2\binom{n}{3}$ atd. Tudíž jest

$$S_n = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{3} + \ldots + 2^{n-1}\binom{n}{n}.$$

Avšak

$$2S_n + 1 = 1 + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \binom{n}{3}2^3 + \ldots + \binom{n}{n}2^n = \\ = (1 + 2)^n = 3^n,$$

takže $S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Všimněme si, že největší číslo, kterého docílíme, jest rovněž $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Tvrdím, že uvedenými mocninami lze napsati kterékoliv celé číslo v intervalu $< 1; \frac{1}{2}(3^n - 1) >$; lze-li tak učiniti, jest zřejmo, že lze tak učiniti jediným způsobem. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Budiž naše tvrzení správné pro mocniny $1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Přibeřme další mocninu 3^{n-1} a uvažujme dvě čísla $3^{n-1} + A$, $3^{n-1} + B$, kdež A, B jsou čísla utvořena mocninami $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Kdyby $3^{n-1} + A = 3^{n-1} + B$, musilo by býti $A = B$ — proti předpokladu. Avšak ani žádné z čísel $3^m + a$, kdež a je utvořeno mocninami $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{m-1}$ není rovno žádnému z čísel $3^{n-1} - A$ když $m < n - 1$. Neboť *největší* z čísel vytvořených mocninami o základu 3 a mocnitelích, 1, 2, 3, ..., $n - 2$ je $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$; kdežto *nejmenší* vytvořené mocninou 3^{n-1} a nižšími jest: $3^{n-1} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots 3^{n-2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$. Jest tedy rozdíl čísel $3^{n-1} - A$, $3^m + a$, $(m < n - 1)$, roven nebo je větší jedné; jsou tedy čísla $3^{n-1} - A, 3^m + a$, $(m < n - 1)$ vesměs různá. Naše věta pro $n = 1$ jest triviální, pro $n = 2$ jest $S_2 = 4$ a skutečně lze psáti 1; $2 = 3 - 1$; 3; $4 = 3 + 1$, věta tedy platí pro $n = 2$, proto platí i pro $n = 3$, platí-li pro $n = 3$, platí i pro 4 atd. Lze tedy všechna čísla v intervalu $< 1; \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) >$ napsati ve tvaru $3^{n-1} \pm 3^{n-2} \pm 3^{n-3} \pm \ldots \pm 3 \pm 1$ a podobně v témž intervalu pomocí závaží $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-1}$ lze realisovati každou váhu, ovšem musí býti dovoleno klásti závaží i na misku váženého zboží.

4.
ZAJÍMAVÁ ČÍSLA A POSLOUPNOSTI.

I při nejjednodušších početních výkonech setkáváme se s výsledky, jichž jednoduchost, nebo souměrnost, nebo podobná sestava překvapuje, na př.

1. $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $12^2 = 144$, $21^2 = 441$, $13^2 = 169$, $31^2 = 961$, $101^2 = 10201$, $102^2 = 10404$, $201^2 = 40401$, $103^2 = 10609$, $301^2 = 90601$, $112^2 = 12544$, $211^2 = 44521$, $113^2 = 12769$, $311^2 = 96721$, $122^2 = 14884$, $221^2 = 48841$.

2. Starověk velmi zajímaly tyto dva vztahy $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

3. Ukažte, že součet prvních, druhých a třetích mocnin