Jak se studují útvary v prostoru? I. část

II. Určení bodu v prostoru souřadnicemi rovnoběžkovými. Dvojice bodů

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují útvary v prostoru? I. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 21–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403021

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

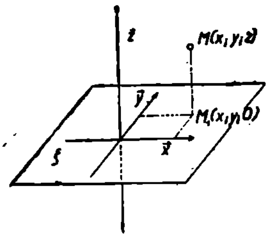
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

## II.

# URČENÍ BODU V PROSTORU SOUŘADNICEMI ROVNOBĚŽKOVÝMI. DVOJICE BODŮ.

**3. Nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru.** Uspořádaným trojicím čísel $(x; y; z)$ přiřaďme body v prostoru tímto způsobem: Zvolme tři navzájem kolmé a orientované přímky — souřadnicové osy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ — procházející týmž bodem, počátkem $O$ (obr. 5).

Od tohoto bodu počínaje jsou osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ očíslovány stejně jako v odst. 1, takže v jimi určené rovině $\zeta$ tvoří úplnou pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnic.



Obr. 5. Pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru.

Nyní je možno v rovině $\zeta$ vytknouti bod, jehož prvá souřadnice je $x$, druhá $y$. Označme jej $M'$ a veďme jím rovnoběžku se $\vec{z}$. Na ni nanesme od $M'$ do $M$ délku $z$ v měřítku vyznačeném na $\vec{z}$, jehož nulový bod též leží v počátku $O$. Aby výsledek tohoto kroku byl jednoznačný, dodejme, že smysl uvedeného nanášení se shoduje s kladným smyslem osy $\vec{z}$, je-li $z$ číslo kladné, kdežto při záporném $z$ smysl nanášení je opačný.

Je zřejmé, že též obráceně každému bodu v prostoru tímto způsobem je přisouzena jediná uspořádaná trojice čísel, jež opět nazýváme souřadnicemi onoho bodu. Pro prvé dvě — $x$ a $y$ — ponecháváme názvy zavedené v odst. 1, třetí z nich, $z$, nazýváme kotou (aplikátou) nebo prostě třetí souřadnicí bodu $(x; y; z)$. Někdy bod označujeme ještě písmenem, na př. $M$, které opět píšeme před závorku s jeho souřadnicemi, na př. $M\ (x;\ y;\ z)$.

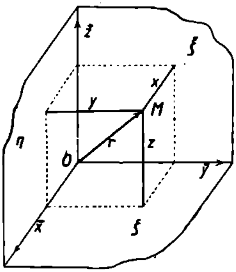
V obr. 5 znázorněný pravoúhlý trojhran je pravotočivý, neboť jeho hrany jsou uspořádány jako palec $(\vec{x})$, ukazováček $(\vec{y})$ a prostřední prst $(\vec{z})$ pravé ruky (t. zv. *pravidlo tří prstů*). Existují patrně také *levotočivé* trojhrany, jejichž hrany jsou uspořádány jako tytéž prsty levé ruky.

Dva pravoúhlé trojhrany s neorientovanými hranami $x, y, z$, resp. $x', y', z'$ lze vždy přemístiti tak, aby bylo $x \equiv x'$, $y \equiv y'$, $z \equiv z'$. Není však vždy možno přemístěním ztotožniti dva trojhrany $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$, jejichž hrany jsou orientovány, tak aby bylo $\vec{x} \equiv \vec{x}'$, $\vec{y} \equiv \vec{y}'$, $\vec{z} \equiv \vec{z}'$. Je to možno jen tehdy, jsou-li oba trojhrany *shodně orientovány*, t. j. jsou-li oba buď pravotočivé nebo levotočivé. (Podobně nelze natáhnouti pravou rukavici na levou ruku!) Je však možno dva různě orientované pravoúhlé trojhrany přemístiti tak, aby byly navzájem souměrně sdružené podle středu (inverse) nebo souměrně sdružené podle roviny (do stejné vzájemné polohy lze uvésti levou a pravou ruku). Orientace trojhranu se nemění při cyklických záměnách os, rovněž při změně smyslů dvou os.

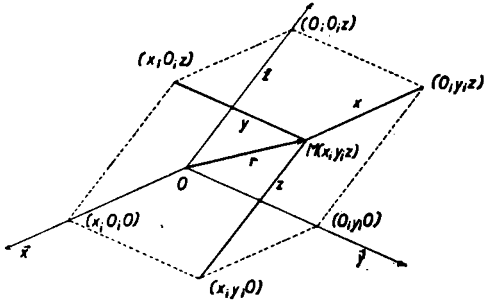
V analytické geometrii se zpravidla užívá pravotočivých čili positivních trojhranů; není to však nutno.

Je zřejmé, že souřadnicový trojhran $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ nemusí býti pravoúhlý, aby zprostředkoval oboustranně jednoznačnou korespondenci mezi množstvím bodů v prostoru a množstvím uspořádaných trojic čísel. Musí to však býti skutečný trojhran, t. j. jeho hrany nesmějí ležeti v jedné rovině. I kosoúhlé trojhrany jsou buď pravo- nebo levotočivé a i u nich rozpoznání orientace je možné podle pravidla tří prstů.

Pravoúhlé trojhrany se shodnými měřítky na osách budeme nazývati pravoúhlé kartézské trojhrany. Kosoúhlé trojhrany se shodnými měřítky na osách jsou *kosoúhlé trojhrany kartézské*. V obou případech nazýváme stejně i souřadnice bodu vzhledem k takovému trojhranu. Je-li trojhran kosoúhlý s různými měřítky na osách, nazveme jej *obecný trojhran kosoúhlý* a souřadnice bodu vzhledem k němu jsou *obecné souřadnice rovnoběžkové*.




Obr. 6. Pravoúhlá soustava souřadnic bodu v prostoru.




Obr. 7. Kosoúhlá soustava souřadnic bodu v prostoru.

Stěny souřadnicového trojhranu jsou určeny dvojicemi os. Označme je $\zeta \equiv (\overrightarrow{x\,y})$, $\eta \equiv (\overrightarrow{z\,x})$, $\xi \equiv (\overrightarrow{y\,z})$. Je-li to trojhran pravoúhlý kartézský (obr. 6), souřadnice $x, y, z$ bodu $M$ jsou prostě vzdálenosti bodu $M$ od *rovin souřadnic* $\xi, \eta, \zeta$, měřené společným měřítkem os. Při tom těmto vzdálenostem přisuzujeme určitá znaménka známým způsobem. Je-li trojhran kosoúhlý (obr. 7), pak místo na kolmicích k $\xi, \eta, \zeta$ měříme souřadnice $x, y, z$ bodu $M$ na rovnoběžkách s osami $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$ a podle jejich měřítek.

Souřadnicovému rovnoběžníku analytické geometrie rovinné v prostoru koresponduje *souřadnicový rovnoběžnostěn bodu*. Tři jeho hrany leží v osách souřadnic, tři jeho stěny leží v rovinách souřadnic. Souřadnice jeho vrcholů jsou patrné z obr. 7. Tamtéž vidíme, jaká je poloha bodů, majících jednu nebo dvě souřadnice rovny nule.

Souřadnicové roviny $\xi$, $\eta$, $\zeta$ rozdělují prostor na osm částí, t. zv. **oktantů**. Aby dva body $M_1$ $(x_1; y_1; z_1)$ a $M_2$ $(x_2; y_2; z_2)$ ležely v témž oktantu, k tomu je třeba a stačí, aby bylo

$$x_1x_2 > 0,\ y_1y_2 > 0,\ z_1z_2 > 0.$$

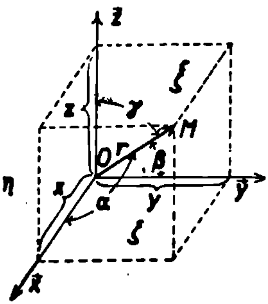
Oba body jsou totožné jen když $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, a jsou šikmo souměrně sdružené podle $\zeta$ ve směru $\vec{z}$, když

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = -z_2.$$

Obdobně se na souřadnicích dvou bodů projevuje jejich združenost podle roviny souměrnosti $\xi$ nebo $\eta$ ve směru $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$.

Vztahy $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$, $z_1 = -z_2$ charakterisují body, jejichž spojnice je rovnoběžná s $\xi$, protíná $\vec{x}$ a je tímto průsečíkem půlena.

Konečně je-li $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, $z_1 = -z_2$, oba body jsou souměrně sdružené podle počátku $O$.




Obr. 8. Polohový vektor bodu a jeho úhly s osami.

**4. Polohový vektor bodu. Směr přímky v prostoru.** Vektor $\mathfrak{r}$, jehož počátek se ztotožňuje s počátkem $O$ souřadnicové soustavy a jehož vrchol je od $O$ různý bod $M$ $(x; y; z)$, nazýváme polohovým vektorem bodu $M$ (obr. 8).

Předpokládejme do odvolání, že souřadnicová soustava je kartézská a pravoúhlá. Pak délka $\overline{OM}$ jako úhlopříčka souřadnicového pravoúhlého rovnoběžnostěnu bodu $M$ je dána výrazem

$$r = \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ r > 0. \tag{4,1}$$

Směr i smysl vektoru $\mathfrak{r}$ jsou určeny, jsou-li známy úhly

$\alpha, \beta, \gamma$, které vektor svírá s osami $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Tyto směrové úhly měříme v intervalu od 0° do 180°. Jejich kosiny, t. zv. směrové kosiny vektoru $\mathfrak{r}$, jsou čísla

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}. \tag{4,2}$$

Je-li $OM = r = 1$, pak z (4,2) vychází

$$\cos\alpha = x, \ \cos\beta = y, \ \cos\gamma = z,$$

takže směrové kosiny jednotkového vektoru (t. j. jehož délka je 1) polohového jsou rovny souřadnicím jeho vrcholu.

Sečtením čtverců rovnic (4,2) vychází s ohledem na (4,1)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0, \tag{4,3}$$

odkud je patrno, že směrové úhly nejsou nezávislé. Skutečně, jak snadno si lze představiti, dva dané úhly směrové, na př. $\alpha, \beta$, určují dvě rotační kuželové plochy (vytvořené rotací polopaprsku okolo osy procházející jeho koncovým bodem) o vrcholech v počátku a o osách v hranách $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Úhly $\alpha$ a $\beta$ určují obecně dva polopaprsky, které jsou společnými tvořícími polopaprsky ploch kuželových. Označíme-li jejich odchylky od $\vec{z}$ $\gamma$ a $\gamma'$, je patrně

$$\gamma + \gamma' = 180°, \tag{4,4}$$

neboť obě plochy, a tudíž i jejich společné polopaprsky, jsou souměrné podle roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$.

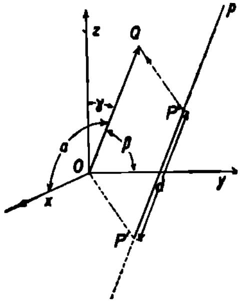
Z (4,4) vyplývá

$$\cos\gamma' = -\cos\gamma.$$

Lze tedy vysloviti větu:

Směr i smysl orientované přímky (vektoru) je určen buď 1. třemi jejími směrovými kosiny, které splňují rovnici (4,3), nebo 2. dvěma směrovými kosiny a znamením třetího.

Změní-li se smysl orientované přímky, změní se i její směrové úhly, a to v úhly výplňkové, odkud vyplývá, že změna orientace přímky má za následek změny znamének všech tří jejích směrových kosinů.




Obr. 9. Určení směrových parametrů přímky a délky úsečky.

Je-li souřadnicová soustava obecná rovnoběžková, určujeme směr přímky zpravidla jejími směrovými parametry. Patrně postačí uvažovati pouze o přímkách procházejících počátkem $O$ soustavy; směry paprsků tohoto trsu*) totiž vyčerpávají směry všech přímek v prostoru. Buď $r$ jeden z paprsků tohoto trsu a $(l; m; n)$ její bod od $O$ různý (obr. 7 a 9). Jeho souřadnice $l$; $m$; $n$ jej jednoznačně určují a s ním i paprsek $r$; avšak obráceně na $r$ leží celé množství bodů různých od $O$. Je-li $(l'; m'; n')$ jiný z nich, pak zajisté je

$$l' = \lambda l, \quad m' = \lambda m, \quad n' = \lambda n,$$

kde $\lambda \neq 0$, neboť souřadnicové rovnoběžnostěny obou bodů jsou homotetické, při čemž $O$ je střed a $\lambda$ poměr oné homotetie (stejnolehlosti).

Přísluší tudíž každému směru celé množství uspořádaných trojic směrových parametrů; je-li $(l; m; n)$ jedna z nich, obdržíme všechny další v trojicích $(\lambda l; \lambda m; \lambda n)$, kde $\lambda \neq 0$ je libovolné číslo. Toto množství budeme označovati symbolem

$$\{l; m; n\}. \tag{4,5}$$

V trojici směrových parametrů alespoň jeden je od nuly různý.

---

*) *Trs přímek* nebo *paprsků* je množství přímek, procházejících bodem v prostoru (vrcholem trsu). Je-li vrchol bod nevlastní, mluvíme o *osnově* rovnoběžných přímek.

Dvě přímky o trojicích směrových parametrů $(l_1; m_1; n_1)$, resp. $(l_2; m_2; n_2)$ jsou jen tehdy rovnoběžné, když

$$\{l_1; m_1; n_1\} = \{l_2; m_2; n_2\},$$

t. j. když obě množství jsou složena z týchž prvků. Jen tehdy, když obě přímky jsou různých směrů, obě množství jsou různá, t. j.

$$\{l_1; m_1; n_1\} \neq \{l_2; m_2; n_2\}.$$

Abychom určili směrové parametry kterékoliv přímky $q$ v prostoru (obr. 7), veďme počátkem $O$ přímku $r \parallel q$ a zvolme na ní libovolný bod $M$, různý od $O$. Trojice $x; y; z$ jeho souřadnic je současně trojicí směrových parametrů přímky $q$ a všech přímek s ní rovnoběžných.

Předpokládejme nyní opět, že soustava souřadnic je pravoúhlá, kartézská. Pak je (viz obr. 8, kde $x = l$, $y = m$, $z = n$)

$$l = r\cos\alpha,\quad m = r\cos\beta,\quad n = r\cos\gamma,$$

t. j. **směrové parametry jsou úměrné směrovým kosinům přímky.** K výpočtu směrových kosinů ze směrových parametrů postačí použíti vztahu (4,2) a (4,1), načež vychází

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\\ \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (4,6)$$

kde uvedená odmocnina je kladné číslo.

Je tedy i trojice směrových kosinů přímky jednou z uspořádaných trojic množství (4,5), jsou-li souřadnice kartézské pravoúhlé.

Rovnicemi (4,6) jsou směrové kosiny pouze zdánlivě určeny i se svými znaménky. Odporovalo by to okolnosti, že přímka není orientována. Vzpomeňme však, že bod $(l; m; n)$ je libovolný bod (od $O$ různý) přímky $r$! Lze jej proto nahraditi kterýmkoliv jiným bodem přímky $r$, na př. bodem $(-l; -m; -n)$, při čemž všechny tři směrové kosiny změní znaménka.

**Příklady k cvičení.**

17. Co je geometrickým místem bodů, jejichž a) dvě souřadnice jsou stálé a třetí proměnlivá? b) jedna souřadnice je stálá a dvě jsou proměnlivé? [a) přímka, rovnoběžná se souřadnicovou osou b) rovina, rovnoběžná se souřadnicovou rovinou.]

18. Určete čtvrté vrcholy všech rovnoběžníků, které mají prvé tři vrcholy v bodech $O\,(0; 0; 0)$, $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$! [$(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$, $(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$, $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$].

19. Je dán rovnoběžnostěn, jehož jeden vrchol je počátek. Jsou-li $(x_i; y_i; z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ vrcholy sousední k počátku, jaké jsou souřadnice ostatních čtyř vrcholů? [$(x_i + x_k; y_i + y_k; z_i + z_k)$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$ a $(x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3; z_1 + z_2 + z_3)$].

20. Určete směrové kosiny vektoru $\overrightarrow{OM}$, kde $O$ je počátek a $M\,(3; -4; 12)$! [$\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}$.]

21. Jaké podmínce vyhovují siny směrových úhlů? [$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 = 0$.]

**5. Homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru.** Obdobně k homogenním souřadnicím bodu v rovině definujeme homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru vzhledem k trojhranu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ takto:

Buď

$$x_1; x_2; x_3; x_4 \tag{5,1}$$

uspořádaná čtveřice čísel, z nichž alespoň jedno je různé od nuly. Je-li $x_4 \neq 0$, pak (5,1) je čtveřice homogenních rovnoběžkových souřadnic bodu, jehož nehomogenní souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{5,2}$$

Je-li $x_4 = 0$, pak (5,1) je čtveřice homogenních rovnoběžkových souřadnic nevlastního bodu ve směru o parametrech

$$l = x_1, \; m = x_2, \; n = x_3.$$

Z této definice vyplývá, že každé uspořádané čtveřici číslo (5,1) náleží celé množství čtveřic homogenních rovnoběžkových souřadnic v dané soustavě souřadnic. Je-li (5,1) jednou z čtveřic tohoto množství a je-li $\lambda \neq 0$, pak

$$\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3; \lambda x_4$$

je čtveřicí téhož množství, jež budeme opět označovati

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\},$$

nebo stručněji

$$\{x\}.$$

Body v rovině $\xi$, resp. $\eta$, resp. $\zeta$ jsou charakterisovány rovnicí $x_1 = 0$, resp. $x_2 = 0$, resp. $x_3 = 0$, body nevlastní rovnicí $x_4 = 0$. Poslední z nich je též lineární; proto množství všech nevlastních bodů v prostoru nazýváme jeho **rovinou nevlastní**.

Tato rovina nemá ovšem všechny vlastnosti ostatních rovin. Nemá na př. směr, takže nelze mluviti o rovinách a přímkách s ní rovnoběžných nebo na ni kolmých. Dva, resp. tři její body neurčují úsečku, resp. trojúhelník atd.

Homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu $x$ označíme opět $x_1, x_2, x_3, x_4$, což stručně vyjadřuje symbol $x\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$, obdobně $y\,(y_1; y_2; y_3; y_4)$ značí bod $y$ o souřadnicích $y_1, y_2, y_3, y_4$.

Body $x$ a $y$ se ztotožňují jen tehdy, když $\{x\} = \{y\}$, a různé jsou jen tehdy, když $\{x\} \neq \{y\}$.

Z nehomogenních souřadnic bodu $P\,(x; y; z)$ snadno nalezneme jeho souřadnice homogenní v téže soustavě souřadnic. Je to čtveřice $(x; y; z; 1)$ nebo kterákoliv jiná čtveřice množství $\{x; y; z; 1\}$.

Podobně nevlastní bod o směrových parametrech $\{l; m; n\}$ má čtveřici homogenních souřadnic $(l; m; n; 0)$, nebo kteroukoliv jinou čtveřici množství $\{l; m; n; 0\}$.

**6. Dvojice bodů.** Dva body $P'\,(x'; y'; z')$ a $P''\,(x''; y''; z'')$, dané svými nehomogenními rovnoběžkovými souřadnicemi, určují přímku $p$ a omezují na ní úsečku $\overline{P'P''}$.

Směrové parametry přímky $p$ určíme snadno: mysleme si ji rovnoběžně posunutu tak, aby (obr. 9) bod $P'$ padl do počátku $O$! Bod $P''$ pak zaujme polohu $Q$. Souřadnice bodu $Q$

$$x'' - x'; \; y'' - y'; \; z'' - z' \tag{6,1}$$

jsou směrové parametry přímky $p$ ve smyslu odst. 4.

Je-li souřadnicový trojhran pravoúhlý kartézský, lze snadno vyjádřiti i délku úsečky $\overline{P'P''} = d$. Protože se při uvedeném rovnoběžném posunutí vzdálenost obou bodů zajisté nezměnila, je $\overline{P'P''} = \overline{OQ}$. Délka $\overline{OQ}$ polohového vektoru bodu $Q$ je podle (4,1)

$$d = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}, \tag{6,2}$$

kde $d > 0$.

Z (4,2) vychází pro směrové kosiny vektoru $\overrightarrow{P'P''}$

$$\cos\alpha = \frac{x'' - x'}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y'' - y'}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z'' - z'}{d}. \tag{6,3}$$

Pokládáme-li v (6,3) $d$ za danou délku, $x'; y'; z'$ za souřadnice daného bodu $P'$ orientované přímky $\vec{p}$ o daných směrových kosinech $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, vychází z (6,3)

$$x'' = x' + d\cos\alpha, \quad y'' = y' + d\cos\beta, \quad z'' = z' + d\cos\gamma. \tag{6,4}$$

Rovnice (6,4) představují tudíž řešení úlohy: Na orientované přímce $\vec{p}$, dané bodem $P'(x'; y'; z')$ a směrovými kosiny určiti souřadnice bodu $P''(x'', y'', z'')$, vznikajícího nanesením délky $d$ v kladném smyslu na $\vec{p}$ od $P'$.

Položme v (6,4) $x' = x_0$, $y' = y_0$, $z' = z_0$ a $x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$ a v nové soustavě rovnic

$$x = x_0 + d\cos\alpha, \quad y = y_0 + d\cos\beta, \quad z = z_0 + d\cos\gamma \tag{6,5}$$

pokládejme $x, y, z$ za běžné souřadnice bodu na přímce $\vec{p}$, $d$ za proměnný parametr. Pak (6,5) jsou **parametrické rovnice** orientované přímky $p$ dané bodem $P_0(x_0; y_0; z_0)$

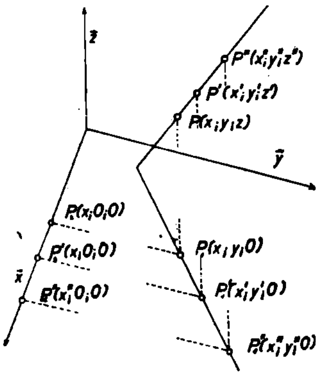
a směrovými kosiny $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Mění-li se parametr $d$, bod $P\,(x; y; z)$ vytvořuje přímku $\vec{p}$, při čemž kladný smysl na $\vec{p}$ koresponduje rostoucímu parametru $d$.

Kdyby místo směrových kosinů byly dány pouze směrové parametry $l, m, n$ přímky $p$, pak též je možno napsati její parametrické rovnice

$$x = x_0 + l\,.\,t,\; y = y_0 + mt,\; z = z_0 + nt, \qquad (6,6)$$

kde však parametr $t$ není vzdálenost $P_0P$, nýbrž pouze veličina této vzdálenosti úměrná. Oproti rovnicím (6,5), odvozených za předpokladu, že soustava souřadnic je pravoúhlá kartézská, rovnice (6,6) neztrácejí svůj smysl ani v obecných souřadnicích rovnoběžkových.

Odvoďme ještě parametrické rovnice přímky $p$, dané opět body $P'$ a $P''$, v kterých však parametrem je dělicí poměr $\lambda$ vytvořujícího bodu $P$ vzhledem k dvojici bodů $P'P''$ [srovnej s (2,20)].




Obr. 10. Dělicí poměr bodu na přímce v prostoru a na průmětu přímky.

K odvození použijeme věty:

Dělicí poměr se rovnoběžným promítáním nemění.

Skutečně, promítneme-li tři body $PP'P''$ přímky $p$ rovnoběžně (obr. 10) do bodů $P_1P'_1P''_1$ přímky $p_1$, různoběžné s $p$ (pro rovnoběžku tvrzení je triviální,) je — podle známé věty o úměrnosti úseků vyťatých osnovou rovnoběžek na různoběžných příčkách — dělicí poměr

$$\lambda = \overline{P'P} : \overline{P''P}$$

roven dělicímu poměru $\overline{P'_1P_1} : \overline{P''_1P_1}$, což bylo dokázati.

Promítněme tedy body $P, P', P''$ přímky $p$ ve směru osy $\vec{z}$ do bodů (obr. 10) $P_1, P'_1, P''_1$ přímky $p_1$ v rovině $(\vec{x}\,\vec{y})$. Tuto trojici bodů promítněme znovu ve směru $\vec{y}$ do $\vec{x}$, čímž vznikne trojice $P_2 P'_2 P''_2$. Je pak podle věty právě uvedené

$$\lambda = \frac{\overline{P'P}}{\overline{P''P}} = \frac{\overline{P'_1P_1}}{\overline{P''_1P_1}} = \frac{\overline{P'_2P_2}}{\overline{P''_2P_2}} = \frac{x - x'}{x - x''}.$$

Odtud plyne

$$\left.\begin{aligned} &x = \frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda} \\ &\text{a obdobným postupem} \\ &y = \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z' - \lambda z''}{1 - \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{6,7}$$

V těchto rovnicích jsou obsaženy rovnice (2,20).

Přejdeme-li k homogenním rovnoběžkovým souřadnicím kladouce

$$x' = \frac{y_1}{y_4}, \quad y' = \frac{y_2}{y_4}, \quad z' = \frac{y_3}{y_4},$$

$$x'' = \frac{z_1}{z_4}, \quad y'' = \frac{z_2}{z_4}, \quad z'' = \frac{z_3}{z_4},$$

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

a

$$\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_4}{y_4} \tag{6,8}$$

je

$$\{x\} \equiv \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1;\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2;\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3;\ \lambda_1 y_4 + \lambda_2 z_4\},$$

což — nedbáme-li geometricky bezvýznamného faktoru úměrnosti při $x$ — lze vyjádřiti symbolickou rovnicí

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \tag{6,9}$$

kde $\lambda_1$ a $\lambda_2$ nejsou současně rovny nule.

Platí tedy v prostoru stejně jako v rovině, že bod $x$ leží na spojnici dvou různých bodů $y$ a $z$ jen tehdy, když je jejich lineární kombinací tvaru (6,9). Čísla $\lambda_1, \lambda_2$, nikoliv současně rovná nule, existují jen tehdy, když matice

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}\right\| \tag{6,10}$$

je hodnosti nižší než 3, t. j. když všechny její minory třetího řádu jsou rovny nule. Je-li tomu tak, body $x, y, z$ nazýváme lineárně závislé, jinak jsou lineárně nezávislé.

Rovnice (6,9) byla odvozena za předpokladu, že žádný z bodů $x, y, z$ není nevlastní. Ukažme, že tento předpoklad je nepodstatný.

Je-li na př. bod $z$ nevlastní, takže $z_4 = 0$, leží ve směru o parametrech $z_1; z_2; z_3$. Parametrické rovnice přímky $(yz)$ lze pak psáti ve tvaru (6,6), kde

$$x_0 = \frac{y_1}{y_4}, \quad y_0 = \frac{y_2}{y_4}, \quad z_0 = \frac{y_3}{y_4}, \quad t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 y_4},$$

$$l = z_1, \; m = z_2, \; n = z_3,$$

načež vychází

$$\{x\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1;\; \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2;\; \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3;\; \lambda_1 y_4 + \lambda_2 z_4\},$$

odkud opět vychází (6,9), c. b. d.

Jsou-li oba dané body $y$ a $z$ nevlastní, je $y_4 = z_4 = 0$. Z (6,9) plyne v tomto případě $x_4 = 0$, t. j. každá lineární kombinace nevlastních bodů je opět bod nevlastní na jimi určené nevlastní přímce; obráceně, každý bod této přímky lze vyjádřiti jako lineární kombinaci dvou jejích různých bodů.

Zcela stejným způsobem jako v anal. geometrii rovinné (odst. 2) odvodíme z výrazu (6,8) pro dělicí poměr, že dvojpoměr čtyř bodů

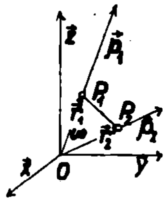
$$y, z, x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, u = \mu_1 y + \mu_2 z$$

je opět dán výrazem (2,26). Rovnice (2,27) opět vyjadřuje, že dvojice $y, z$ a $x, u$ se oddělují harmonicky.

**7. Úhel dvou směrů.** Dva body nevlastní, t. j. dva směry určují úhel. Je-li soustava souřadnic kartézská a pravoúhlá a jsou-li

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \quad \text{a} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

trojice směrových úhlů dvou přímek, můžeme předpokládati, že procházejí počátkem $O$. Směrovými úhly je ovšem na obou přímkách vytčen též smysl, takže jde o přímky




Obr. 11. Úhel dvou směrů.

orientované, jež označíme $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. Směry i smysly obou přímek buďtež dány jednotkovými vektory $\overrightarrow{OP_1}$ a $\overrightarrow{OP_2}$ (obr. 11), takže je $r_1 = \overline{OP_1} = r_2 = \overline{OP_2} = 1$. Souřadnice bodu $P_1$ jsou rovny směrovým kosinům přímky $\vec{p}_1$, t. j. $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$; $\cos\gamma_1$, podobně souřadnice bodu $P_2$ jsou $\cos\alpha_2$; $\cos\beta_2$; $\cos\gamma_2$. Čtverec vzdálenosti obou bodů je podle (6,2)

$$\overline{P_1P_2}^2 = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)^2,$$

t. j. po snadné úpravě

$$\overline{P_1P_2}^2 = 2 - 2\,(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

Podle kosinové věty pro trojúhelník $OP_1P_2$ je

$$\overline{P_1P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\omega = 2 - 2\cos\omega.$$

Porovnáním obou výrazů pro $\overline{P_1P_2}^2$ vychází

$$\cos\omega = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \quad (7,1)$$

Úhel $\omega$ v intervalu $(0°, 180°)$ je svým kosinem (7,1) jednoznačně určen.

Pro kolmost přímek $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ $(\omega = 90°)$ vychází odtud nutná i postačující podmínka pro jejich směrové kosiny

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0. \quad (7,2)$$

Protože — jak jsme zjistili v odst. 4 (viz 4,6) — směrové kosiny jsou úměrné směrovým parametrům, vychází ze (7,2) zcela snadno podmínka kolmosti dvou směrů o parametrech $(l_1; m_1; n_1)$, resp. $(l_2; m_2; n_2)$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{7,3}$$

Určeme ještě parametry směru, který je kolmý současně na oba uvažované směry. Jsou-li $(l; m; n)$ jeho parametry, platí podle (7,3) rovnice

$$l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$$

a

$$l l_2 + m m_2 + n n_2 = 0,$$

odkud

$$l : m : n = \left\| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix} \right\|. \tag{7,4}$$

**Příklady k cvičení.**

**22.** Dokažte, že dvojpoměr čtyř bodů téže přímky se nemění středovým promítáním. [V rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ volte čtyři paprsky svazku, jehož střed je počátek $O$! Dva z nich buďtež $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Čtveřinu paprsků protněte dvěma různými příčkami a dokažte uvedenou větu pro obě čtveřiny průsečíků!]

**23.** Podle příkladu 22 lze definovati dvojpoměr čtyř paprsků svazku jako dvojpoměr čtyř bodů ležících na kterékoliv jejich příčce. Dokažte větu:

Dvě čtveřiny paprsků, jimiž se čtyři body přímky ze dvou různých bodů promítají, mají stejné dvojpoměry!

**24.** Dokažte, že věty příkladů 22 a 23 platí i pro čtveřinu bodů nevlastní přímky!

**25.** Čemu se rovná dvojpoměr čtyř bodů, z nichž jeden je nevlastní a všechny jsou různé? Uvažte všechny 4 případy! [Uplatněte, že dělicí poměr nevlastního bodu vzhledem k dvojici bodů vlastních je $+1$!]

**26.** Jaké podmínce vyhovují úhly, které svírá přímka $p$ se stěnami $\xi$, $\eta$, $\zeta$ pravoúhlého trojhranu?

$$[\sin^2 (p\xi) + \sin^2 (p\eta) + \sin^2 (p\zeta) - 1 = 0.]$$

**27.** Určete vzdálenost bodů $P'$ $(2; -3; 4)$ a $P''$ $(5; -7; -8)$ a směrové kosiny spojnice $P'P''$! [$d = 13$, $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = -\frac{4}{13}$, $\cos\gamma = -\frac{12}{13}$.]

28. Jaký úhel svírají polohové vektory bodů (2; 3; 4) a (3; — 4; — 1)? $\left[\cos\omega = \frac{-10}{\sqrt{754}}\right]$.

29. V pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou dány dva směry trojicemi směrových parametrů (1; 2; 3), (2; 3; 4). Určete směrové kosiny směru na oba dané kolmého! $\left[\pm\frac{\sqrt{6}}{6};\ \mp\frac{\sqrt{6}}{3};\ \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$.

30. Dokažte: Nutná a postačující podmínka pro to, aby tři směry $(l_i; m_i; n_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, byly rovnoběžné s touže rovinou (čili komplanární) je

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[Uvažte hodnost matice (6,10) ze souřadnic $(l_i; m_i; n_i; 0)$ nevlastních bodů v těchto směrech ležících!]

31. Vypočtěte souřadnice těžiště a) trojúhelníka; b) čtyrstěnu o vrcholech $(x_i; y_i; z_i)$! Rozhodněte, v kterých souřadnicích platí výsledné vzorce! [a) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, podobně $y, z$. b) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, podobně $y, z$. — Vzorce platí i v obecných rovnoběžkových souřadnicích.]