O souřadnicích v rovině

IV. Křivočaré souřadnice

In: Zdeněk Pírko (author): O souřadnicích v rovině. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 59–70.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403011

IV.

KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE.

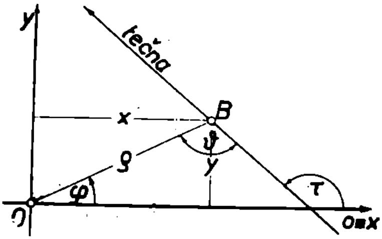
Polární souřadnice. Polohu bodu v rovině nejobecněji stanovíme, když tu zvolíme dvě různé soustavy čar Σ_1, Σ_2 tak, aby každým bodem B procházela právě jedna čára každé soustavy.[22]) Každé čáře pak přiřadíme jisté číslo (kótu); i určuje obecný bod dvě čísla, totiž kóty čar, které jím procházejí. Přitom kótu první čáry (ze soustavy Σ_1) píšeme jako první číslo, kótu druhé čáry (ze soustavy Σ_2) jako druhé číslo. Obráceně však dvě daná čísla, vzatá v určitém pořadí, mohla by určovati více bodů. Tak by tomu bylo, kdyby se obě příslušné čáry Σ_1, Σ_2 protínaly ve více než jednom bodě. V obecném případě tuto víceznačnost odstraníme tím, že se omezíme jen na studium určité oblasti bodů v rovině, takové, kde dvojice kót vede k jedinému průsečíku. Obě čísla, definovaná tímto způsobem, nazýváme křivočarými souřadnicemi uvažovaného bodu. V tomto pojetí jeví se kartézské souřadnice jen jako zvláštní případ křivočarých souřadnic: Σ_1, Σ_2 jsou soustavy rovnoběžek, obě dotčená čísla jsou vzdálenosti uvažovaného bodu, měřené ve směru přímek obou soustav, od dvou základních přímek těchto soustav. Jak je tomu v případě souřadnic nomografických?

A. Definice a transformace. Jestliže soustavu Σ_1 tvoří soustředné kružnice se středem v bodě O, soustavu Σ_2 svazek přímek jdoucích bodem O, a přiřadíme-li obecnému bodu B tato dvě čísla: poloměr ϱ kružnice soustavy Σ_1

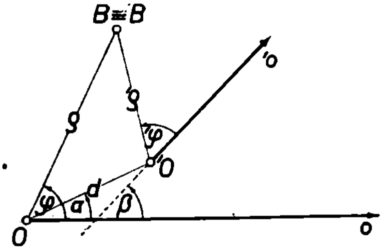
---

[22]) Čáry Σ_1, Σ_2 musí býti spojité (a bez vícenásobných bodů). V případech, které jsou uvedeny v dalším textu, kdy soustavy Σ_1, Σ_2 jsou tvořeny čarami prvního a druhého stupně (přímkami a kuželosečkami), je těmto požadavkům vyhověno.

jdoucí tímto bodem a úhel φ, který svírá přímka $\overrightarrow{OB}$ soustavy Σ_2 s jinou orientovanou přímkou o této soustavy, kterou jsme zvolili za základní, definovali jsme v rovině **polární souřadnice**. Kladné číslo ϱ se nazývá průvodič, úhel φ, měřený kladně v obvyklém smyslu (t. j. proti směru ručiček hodinových), nazývá se polární úhel. O je pól soustavy, o polární osa. Obecný bod určuje jednoznačně dvojici $(\varrho; \varphi)$ (výjimkou je pól O; jakou?); obráceně obecnou dvojicí $(\varrho; \varphi)$, $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, je určen jediný bod.



Obr. 9.



Obr. 10.

Souvislost polárních souřadnic s pravoúhlými je patrná z obr. 9. Platí

$$x = \varrho \cos \varphi,\ \ y = \varrho \sin \varphi;\ \ \varrho = \overset{}{\underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}}},\ \ \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{y}{x}.^{23)} \qquad (1)$$

Složitější je transformace polárních souřadnic ϱ, φ na jiné polární souřadnice $'\varrho, '\varphi$ (viz obr. 10). Je zřejmě určena rovnicemi

$$\varrho^2 = {'\varrho}^2 + d^2 + 2'\varrho d \cos('\varphi + \beta - \alpha) \qquad [1]$$

nebo

$$'\varrho^2 = \varrho^2 + d^2 - 2\varrho d \cos(\varphi - \alpha), \qquad [2]$$

$$'\varrho \sin('\varphi + \beta - \alpha) = \varrho \sin(\varphi - \alpha) \qquad [3]$$

---

[23]) Vztahem $\mathrm{tg}\,\varphi = y : x$ je polární úhel určen dvojznačně; kterou z obou hodnot máme vzíti, to nám ukazují rovnice $\sin \varphi = y : \varrho$, $\cos \varphi = x : \varrho$.

(odůvodněte!). Je-li dáno $'\varrho, '\varphi, \alpha, \beta, d$, je ϱ určeno rovnicí [1] a poté φ rovnicí [2] nebo [3]; výpočet necháváme čtenáři. Jednoduché jsou zvláštní případy těchto rovnic: $\beta = 0$ nebo $d = 0$, $\alpha = 0$; v druhém případě dostáváme výsledek, zřejmý i geometricky,

$$'\varrho = \varrho, \; '\varphi = \varphi - \beta \text{ (vyložte!).} \tag{2}$$

B. Čáry v polárních souřadnicích. Vztah mezi souřadnicemi ϱ a φ je rovnicí čáry v polárních souřadnicích. Tak na př. je $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 = \text{konst.}$) rovnicí přímky jdoucí pólem,

$$\varrho \cos(\varphi - \alpha) = d$$

rovnicí přímky, v níž d, α jsou polární souřadnice paty kolmice z pólu na přímku spuštěné (odůvodněte!); obráceně každá rovnice tvaru $\varrho^{-1} = a \cos\varphi + b \sin\varphi$ vyjadřuje přímku (které jsou její Plückerovy souřadnice?). Co vyjadřují rovnice $\varrho \sin\varphi = \text{konst.}$, $\varrho \cos\varphi = \text{konst.}$? Přímka, jdoucí dvěma body $(\varrho_i; \varphi_i)$, $i = 1, 2$ je určena rovnicemi

$$\varrho^{-1} = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \quad \varrho_i^{-1} = a\cos\varphi_i + b\sin\varphi_i, \quad i = 1, 2;$$

z nich plyne její rovnice ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \varrho^{-1} & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \varrho_1^{-1} & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \varrho_2^{-1} & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

(proveďte podrobněji!). A pod.

Rovnice kružnice, jejíž střed S má polární souřadnice $(d; \alpha)$ a jejíž poloměr je r, zní $(\overline{SB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OS}^2 - 2\overline{OB}.\overline{OS}\cos S\hat{O}B)$

$$\varrho^2 - 2d\varrho\cos(\varphi - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

Obráceně každá rovnice tvaru $\varrho^2 - 2(m\cos\varphi + n\sin\varphi)\varrho + b^2 = 0$ vyjadřuje kružnici (určete její střed a poloměr!). Jak zní rovnice kružnice, která prochází pólem? Co vyjadřují rovnice $\varrho = 2a\cos\varphi$, $\varrho = 2b\sin\varphi$, $\varrho = \varrho_0$ ($\varrho_0 = \text{konst.}$)?

Ohnisko kuželosečky zvolme za pól, hlavní osu za polární osu! Je-li d vzdálenost řídicí přímky kuželosečky od ohniska, platí podle definice těchto křivek $\varrho : (d + \varrho\cos\varphi) = \varepsilon$; pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ plyne odtud $p = \varepsilon d$ (ε numerická výstřednost, p parametr kuželosečky). I je rovnice kuželosečky (t. zv. ohnisková)

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{4}$$

Co vyjadřuje pro $\varepsilon \lesseqgtr 1$? Která křivka je obráceně vyjádřena rovnicí $\varrho = a : (b + c \cos \varphi)$? Obecnější vztah $\varrho = p : [1 - \varepsilon \cos (\varphi - \alpha)]$ vyjadřuje kuželosečku, jejíž (hlavní) osa svírá s polární osou úhel α [užijte transformace (2)!]. A obráceně snadno se přesvědčíme, že kuželosečka v této poloze je vyjádřena rovnicí $\varrho = a : (b + c \cos \varphi + d \sin \varphi)$. [16]

C. Podrobnější vlastnosti polárních souřadnic. Používajíce první skupiny rovnic (1), mohli bychom soustavně vybudovati analytickou geometrii v polárních souřadnicích. Tak na př. plyne z obr. 9, že $\tau = \varphi + \vartheta$. Poněvadž

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\varrho \sin \varphi)}{\mathrm{d}(\varrho \cos \varphi)} = \frac{\varrho \cos \varphi + \varrho' \sin \varphi}{-\varrho \sin \varphi + \varrho' \cos \varphi},$$

při čemž $\varrho' = \mathrm{d}\varrho : \mathrm{d}\varphi$, docházíme ke vztahu

$$\operatorname{tg} \vartheta = \varrho : \varrho', \ (\varrho' = \mathrm{d}\varrho : \mathrm{d}\varphi), \tag{5}$$

který nám umožňuje sestrojení tečny ke křivce $\varrho = f(\varphi)$ v daném jejím bodě.

Rovnici tečny ke křivce $\varrho = f(\varphi)$ v bodě $(\varrho_0; \varphi_0)$ $[\varrho_0 = f(\varphi_0)]$ nalezneme jako rovnici mezné polohy přímky, která spojuje dva její body $(\varrho_0; \varphi_0)$ a $(\varrho_0 + \Delta\varrho_0; \varphi_0 + \Delta\varphi_0)$ pro lim $\Delta\varrho_0 = 0$, lim $\Delta\varphi_0 = 0$. Po malé úpravě obdržíme z rovnice (3)

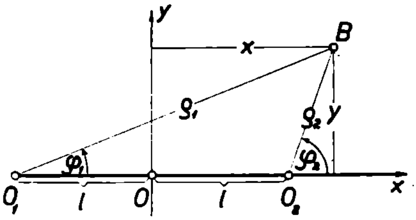
$$\begin{vmatrix} \varrho^{-1} & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \varrho_0^{-1} & \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ (\varrho^{-1})'_0, & -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{vmatrix} = 0,$$

při čemž $(\varrho^{-1})'_0$ je hodnota $\left(\frac{1}{\varrho}\right)'$ v bodě $\varrho = \varrho_0$. Atd. [17]

Úlohy k tomuto odstavci: 1—16.

Bipolární souřadnice. Tvoří-li soustavu Σ_1 soustředné kružnice o středu O_1, soustavu Σ_2 soustředné kružnice o středu O_2, můžeme obecnému bodu B přiřaditi tato dvě čísla: poloměry ϱ_1, ϱ_2 kružnic soustav Σ_1, Σ_2, bodem tím procházejících (biradiální nebo bivektoriální souřadnice). Zvolíme-li však za soustavy Σ_1, Σ_2 svazky přímek se středy v bodech O_1, O_2, můžeme pak obecnému bodu B přiřaditi jiná dvě čísla: úhly φ_1, φ_2, které svírají přímky soustav Σ_1, Σ_2, bodem tím jdoucí, s přímkou $\overrightarrow{O_1O_2}$ (biangulární souřadnice). Souborný název pro obě tyto soustavy je souřadnice bipolární. Délky ϱ_1, ϱ_2 považujeme za kladné, úhly φ_1, φ_2 měříme kladně v obvyklém smyslu. Viz obr. 11.

Obecný bod B určuje jednoznačně dvojici $(\varrho_1; \varrho_2)$ resp. $(\varphi_1; \varphi_2)$; výjimkou jsou póly O_i (jak?). Obráceně každou uspořádanou dvojicí kladných čísel $(\varrho_1; \varrho_2)$ resp. uspořáda-



Obr. 11.

nou dvojicí $(\varphi_1; \varphi_2)$ $(0 < \varphi_i < 2\pi)$ jsou určeny dva body (jaká je jejich vzájemná poloha?) resp. jediný bod. Souvislost bipolárních souřadnic s pravoúhlými je patrná z obr. 11. Platí (proveďte podrobněji!)

$$4lx = \varrho_1^2 - \varrho_2^2,\ 4ly = \pm\sqrt{16l^2\varrho_1^2 - (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + 4l^2)^2} \qquad (6)$$

a obráceně

$$\varrho_1 = \underset{+}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}},\ \varrho_2 = \underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \qquad (6')$$

resp.

$$x = l\,\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)},\ y = 2l\,\frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (7)$$

a obráceně

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y}{x+l},\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y}{x-l}.\text{[24]} \qquad (7')$$

---

[24]) Kterou z obou hodnot pro φ_1 resp. φ_2 vezmeme, o tom opět rozhodují výrazy pro $\sin\varphi_i$ a $\cos\varphi_i$.

Mezi oběma druhy bipolárních souřadnic pak platí vztahy

$$\varrho_1 : \varrho_2 : 2l = \sin \varphi_2 : \sin \varphi_1 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1).\,(^{18}) \tag{8}$$

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 17—22.

Eliptické souřadnice. Každé dvě (středové) kuželosečky, které mají společná ohniska (a tudíž i středy a osy), nazýváme konfokální. Při vhodné volbě pravoúhlé souřadnicové soustavy můžeme tyto křivky vyjádřiti rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \;\; (\lambda \text{ parametr}) \tag{9}$$

(odůvodněte!) Aniž by bylo na újmu obecnosti, můžeme předpokládati, že $a^2 > b^2$. Pro λ rostoucí od velkých záporných hodnot je kuželosečka (9) zprvu elipsa, jejíž poloosy stále klesají, až pro $\lambda = b^2$ přejde elipsa v dvojnásobnou hlavní osu. Roste-li λ nad b^2, přejde kuželosečka (9) v hyperbolu, jejíž hlavní osa se stále zmenšuje, vedlejší roste, až pro $\lambda = a^2$ přejde hyperbola v dvojnásobnou vedlejší osu. Obecným bodem procházejí dvě kuželosečky (9), jedna elipsa, druhá hyperbola, a obě se v uvažovaném bodě protínají kolmo (vyložte podrobněji!). Parametry λ_1, λ_2 obou kuželoseček jsou určeny rovnicí (9), která je pro λ kvadratická.

Z identity

$$(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - (b^2 - \lambda)\, x^2 - (a^2 - \lambda)\, y^2 \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

plyne pro $\lambda = a^2$ resp. $\lambda = b^2$

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{1}{e} \sqrt{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} \\ &\text{resp.} \\ y &= \pm \frac{1}{e} \sqrt{(\lambda_1 - b^2)(b^2 - \lambda_2)} \quad (e^2 = a^2 - b^2); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

obráceně pak řešením rovnice (9) nalezneme

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-x^2 - y^2 + a^2 + b^2 \pm \pm \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2y^2}\right). \qquad (10')$$

Rovnicemi (10) jsou vyjádřeny pravoúhlé souřadnice x, y parametry λ_1, λ_2, které v soustavě konfokálních kuželoseček (9) určují jednu elipsu a jednu hyperbolu, v tomto bodě kolmo se protínající; rovnice ty dále ukazují, že každé obecné dvojici $(\lambda_1; \lambda_2)$ odpovídají čtyři body $(\pm x; \pm y)$, po dvou souměrně sdružené podle souřadnicových os. Rovnice (10′) pak ukazují, že obráceně obecnému bodu $(x; y)$ (s výjimkou ohnisek; vyložte!) jsou přiřazena dvě čísla λ_1, λ_2; na jejich pořadí nezáleží.

Čísla λ_1, λ_2 se nazývají eliptické souřadnice bodu; bod v této souřadnicové soustavě je tedy určen jako průsečík dvou konfokálních kuželoseček, z nichž můžeme počítati na př. elipsy do soustavy Σ_1, hyperboly do soustavy Σ_2.(19)

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 23—25.

Jiné druhy křivočarých souřadnic. A. Parabolické souřadnice jsou definovány rovnicí

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2 \quad (\lambda \text{ parametr}), \qquad (11)$$

která vyjadřuje soustavu konfokálních parabol (odůvodněte!). Označíme-li λ_1, λ_2 kořeny rovnice (11), platí

$$x = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad y = \pm\sqrt{-\lambda_1\lambda_2} \qquad (12)$$

a obráceně

$$\lambda_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (12')$$

Rovnice ty ukazují, že každým obecným bodem $(x; y)$ procházejí dvě konfokální paraboly, osa jedné leží v kladné ose x, osa druhé v záporné ose x (vyložte podrobněji!).(20)

B. Hyperbolické souřadnice. Křivky soustav Σ_1, Σ_2 nechť jsou vyjádřeny rovnicemi

$$x^2 - \frac{1}{n} y^2 = \lambda^2, \quad xy^n = \mu \quad (\lambda, \mu \text{ parametry})! \qquad (13)$$

Snadno se přesvědčíme, že křivky obou soustav jsou navzájem ortogonální; zvolíme-li speciálně $n = 1$, obdržíme dvě kolmo se protínající soustavy rovnoosých hyperbol. Čísla λ_1, λ_2, definovaná rovnicemi

$$x^2 - y^2 = \lambda_1, \ 2xy = \lambda_2, \ (\lambda = \lambda_1, \ \mu = \tfrac{1}{2}\lambda_2) \qquad (14)$$

slují **hyperbolické souřadnice** bodu. Prozkoumejte je podrobněji!([21]) ([22])

Úlohy k tomuto odstavci: 26—33.

Úlohy ke cvičení.

1. Odvoďte polární rovnice některých čar transformací (1) z příslušných rovnic v pravoúhlých souřadnicích!

2. Bez použití pravoúhlých souřadnic řešte některé základní úlohy v polárních souřadnicích: a) vzdálenost dvou bodů, b) obsah trojúhelníku (a odtud rovnici přímky jdoucí dvěma body), c) úhel dvou přímek (kdy jsou rovnoběžné, kolmé?) a pod.!

[a) $\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$, b), c) transformujte příslušný výraz v pravoúhlých souřadnicích a také odvoďte vztah přímo!]

3. Jak zní rovnice přímky, která prochází bodem $(\varrho_1; \varphi_1)$ a s polární osou svírá úhel φ_2?

[$\varrho_1^{-1} \sin(\varphi_2 - \varphi) + \varrho^{-1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; rovnici (3) limitujte pro $\varrho_2^{-1} \to 0$; proč?]

4. Odvoďte polární úsekovou rovnici přímky!

[Je-li ϱ_0 úsek přímky na polární ose, φ_0 její úhel s polární osou, je $\varrho : \varrho_0 = \sin\varphi_0 : \sin(\varphi - \varphi_0)$.]

5. Co vyjadřuje rovnice $\varrho = a\cos\varphi + b\sin\varphi$?

[Kružnici jdoucí počátkem. Jak ji lze sestrojiti z kružnic $\varrho_1 = a\cos\varphi$, $\varrho_2 = b\sin\varphi$ $(\varrho = \varrho_1 + \varrho_2)$?]

6. Dokažte, že pro dva kolmé průvodiče ϱ_1, ϱ_2, vycházející ze středu elipsy, platí $\varrho_1^{-2} + \varrho_2^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ (a, b poloosy)!

[Z polární středové rovnice $\varrho^{-2} = a^{-2}\cos^2\varphi + b^{-2}\sin^2\varphi$.]

7. Co vyjadřují rovnice a) $\varrho^{-2} = a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + c$, b) $k\varrho^{-2} = \sin(\varkappa + 2\varphi)$ (k, $\varkappa$ konstanty)?

[a) kuželosečku, b) rovnoosou hyperbolu; je to speciální případ křivky a) $(c = 0)$.]

8. Jak zní polární rovnice a) rovnoosé hyperboly, je-li pól ve vzdálenosti její poloosy od středu a polární osa v hlavní ose její, b) kuželosečky ve tvaru vrcholovém, c) paraboly s ohniskem

v pólu a s osou v polární ose, d) elipsy se středem v pólu a s hlavní osou v polární ose?

[a) $\varrho = \pm 2a \cos \varphi : \cos 2\varphi$, b) $\varrho = 2p \cos \varphi : [1 - (1 + q) \cos^2 \varphi]$, kde $p = b^2 : a$, $q = b^2 : a$, speciálně pro $q = 0$, c) $p : \varrho = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, d) $b^2\varrho^{-2} = 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi$.]

9. Dokažte, že pro úseky sečny vedené v kuželosečce ohniskem a jím rozdělené platí $2p^{-1} = \varrho_1^{-1} + \varrho_2^{-1}$!

[Z ohniskové rovnice (4)!]

10. Odvoďte polární rovnici a) Dioklovy kisoidy, b) lemniskaty!

[a) Podle definice platí $\varrho = \dfrac{2r}{\cos \varphi} - 2r \cos \varphi$; $\varrho = 2r \sin^2 \varphi : \cos \varphi$. b) Platí $\varrho_{1,2}^2 = \varrho^2 + c^2 \pm 2\varrho c \cos \varphi$ a $\varrho_1\varrho_2 = c^2$; $\varrho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$. Co značí r, c? Odvoďte tyto rovnice také z pravoúhlých rovnic!]

11. Co je geometrickým místem pat kolmic spuštěných z průsečíku dvou přímek k sobě kolmých na úsečku stálé délky a, která se po nich pohybuje svými krajními body?

[Čtyřlistá růžice $\varrho = a \sin \varphi \cos \varphi$. Jak zní její rovnice v pravoúhlých souřadnicích?]

12. Budiž dána základní křivka s rovnicí $\varrho = f(\varphi)$. Čáru s rovnicí $\varrho = f(\varphi) \pm b$ (b = konst.) nazýváme konchoidou základní křivky vzhledem k pólu. Sestrojte a) konchoidu přímky (konchoidu Nikomedovu), b) konchoidu kružnice, jestliže pól leží na základní kružnici (závitnici Pascalovu)! Napište rovnice těchto křivek!

[a) $\varrho = \dfrac{a}{\cos \varphi} \pm b$ čili $(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0$; rozeznávejte $b \gtreqless a$! b) $\varrho = 2a \cos \varphi + b$ čili $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2 (x^2 + y^2) = 0$; povšimněte si případu $b = 2a$ (kardioida)!]

13. Které čáry vyjadřuje rovnice $\varrho^n = a^n \sin n\varphi$ (slují sinové spirály) pro $n = 1, 2, -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$? Jak sestrojíte jejich tečny?

[Kružnici; lemniskatu (užijte transformace $\varrho = {}'\varrho$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi - {}'\varphi$!); přímku; rovnoosou hyperbolu; kardioidu; parabolu. Z rovnice (5) plyne $\vartheta = n\varphi$; vyšetřete podrobně jednotlivé případy!]

14. Odvození rovnice tečny, v textu jen naznačené, proveďte podrobněji!

15. Sestrojte křivku $\varrho = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$! Dokažte, že křivka touto rovnicí vyjádřená, je kolmá strofoida!

[Průvodič protne křivku ve dvou bodech M_1, M_2 takových, že $\overline{OM}_1 = \varrho_1 = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $\overline{OM}_2 = \varrho_2 = a \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$. Pro střed S úsečky $\overline{M_1M_2}$ platí $\overline{OS} = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{a}{\sin \varphi}$; trojúhelník AOS [A (a; $\frac{1}{2}\pi$)] je pravoúhlý. Dále je $\overline{SM}_1 = \overline{OS} - \overline{OM}_1 = \overline{SM}_2 = \overline{OM}_2 - \overline{OS}$, tedy $\overline{AS} = \overline{SM}_1 = \overline{SM}_2$, což je charakteristická vlastnost pro strofoidu.]

16. Určete rovnici čar, které splňují rovnici $\vartheta = f(\varphi)$! Zvláště pak čáry, pro které je $\vartheta = k + n\varphi$, k, n konstanty (speciálně pro $n = 0$)!

[Z rovnice $\operatorname{tg} \vartheta = \varrho : \varrho'$ plyne integrací pro náš případ $\varrho = Ce^A$, kde $A = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{tg} f(\varphi)}$. Speciálně $\varrho = C \sin^{\frac{1}{n}} (k + n\varphi)$, což jsou (až na otočení kolem pólu) sinové spirály. C značí integrační konstantu. Pro $n = 0$ plyne integrací rovnice $\operatorname{tg} k = \varrho : \varrho'$ vztah $\varrho = Ce^{\varphi \operatorname{cotg} k}$; křivka vyjádřená touto rovnicí sluje logaritmická spirála.]

17. Dokažte, že transformace biradiálních souřadnic na biangulární a obráceně je vyjádřena rovnicemi:
$\varrho_1 = 2l \sin \varphi_2 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$, $\varrho_2 = 2l \sin \varphi_1 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$,
a obráceně
$\cos \varphi_1 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + 4l^2) : 4l\varrho_1$, $\cos \varphi_2 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - 4l^2) : 4l\varrho_2$!

[Z rovnic (8).]

18. Které křivky jsou vyjádřeny v biradiálních souřadnicích rovnicemi a) $\varrho_1 + \varepsilon\varrho_2 = 2a$ ($\varepsilon = \pm 1$), b) $\varrho_1 : \varrho_2 = \lambda$, c) $\varrho_1\varrho_2 = \lambda^2$, d) $a\varrho_1^2 + b\varrho_2^2 = c$ (speciálně pro $a = -b$ a pro $c = 0$)?

[a) Středová kuželosečka, b) kružnice (t. zv. Apolloniova), c) Cassiniho křivky (pro $\lambda = l$ lemniskata), d) kružnice (speciálně přímka a Apolloniova kružnice).]

19. Kterou křivku vyjadřuje rovnice $a\varrho_1\varrho_2 + b\varrho_1 + c\varrho_2 + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)? Speciálně pro $a = 0$ (a pro $a = 0$, $-d = \pm 2lc$), pro $ad - bc = 0$!

[Křivku osmého stupně. Pro $a = 0$ obdržíme křivku čtvrtého stupně $\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2 = \lambda$ [sluje Descartův ovál; jeho polární rovnice vzhledem k pólu O_1 a polární ose $\overrightarrow{O_1O_2}$ zní $(\mu^2 - \nu^2)\varrho_1^2 - 2(\lambda\mu - 2l\nu^2 \cos \varphi_1)\varrho_1 + (\lambda^2 - 4l^2\nu^2) = 0$, takže pro $\lambda = \pm 2l\nu$ (t. j. pro $-d = \pm 2lc$) dostaneme Pascalovu závitnici $(\mu^2 - \nu^2)\,\varrho_1^2 = 2\lambda\,(\mu \pm \nu \cos \varphi_1)$]. Pro $ad - bc = 0$ dostaneme dvě kružnice (které?).]

20. Které křivky jsou vyjádřeny v biangulárních souřadnicích rovnicemi a) $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, b) $\varphi_1 : \varphi_2 = \lambda$ ($\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$)?
[a) kružnice (proč?), b) přímka, kružnice, kružnice.]

21. Dokažte, že elipsu, jejíž ohniska leží v pólech, lze vyjádřiti biangulární rovnicí $\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_2}{2} = (1 - \varepsilon) : (1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon = l : a$ (a velká poloosa elipsy)!
[Vztah $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$ transformujte na biangulární souřadnice podle rovnic 17. úlohy! Obdobnou úvahu proveďte také pro hyperbolu!]

22. Kterou křivku vyjadřuje rovnice $a \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + b \operatorname{tg} \varphi_1 + c \operatorname{tg} \varphi_2 + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)? Speciálně pro $b + c = 0$, pro $b = c = 0$, pro $a = d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = -c = 1$, pro $a = -d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = c = 1$ (a speciálně pro $\alpha = \frac{1}{2}\pi$)!
[Kuželosečku jdoucí póly. Pro $b + c = 0$ je středová, pro $b = c = 0$ má rovnici $x^2 + \lambda y^2 = \mu$, pro $a = d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = -c = 1$ nalezneme kružnici, pro $a = -d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = c = 1$ máme rovnoosou hyperbolu $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$ (speciálně $x^2 - y^2 = l^2$; vyslovte větou!).]

23. Která křivka je v eliptických souřadnicích vyjádřena rovnicemi a) $\lambda_1 + \lambda_2 = k$, b) $\lambda_1 \lambda_2 = k$? Speciálně pro $k = 0$!
[a) kružnice (speciálně Mongeova kružnice), b) elipsa.]

24. Dokažte větu Ivoryho: Dvě konfokální elipsy a k nim příslušné konfokální hyperboly určují svými průsečíky v jednom kvadrantu čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou si rovny!
[Jsou-li λ_1, λ_2 resp. Λ_1, Λ_2 souřadnice jedné resp. druhé dvojice konfokálních kuželoseček, jsou souřadnice protějších vrcholů čtyřúhelníka $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ $[(\lambda_1; \lambda_2), (\Lambda_1; \Lambda_2)]$ a $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$ $[(\Lambda_1; \lambda_2), (\lambda_1; \Lambda_2)]$; rovnice (10) pak ukazují, že $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2$.]

25. Výpočtem dokažte: Rovnice (9) má pro každé x, y (s výjimkou ohnisek) dva reálné kořeny λ_1, λ_2; jeden reálný kořen leží v intervalu (b^2, a^2), druhý v intervalu $(-\infty, b^2)$! Co to znamená geometricky?
[Z rovnic (10), které uvedeme na tvar $e^2x^2 = (a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)$ resp. $-e^2y^2 = (b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)$; použijte (nepodstatného) předpokladu, že $a^2 > b^2$. Obecným bodem $(x; y)$ prochází jedna reálná elipsa a jedna reálná hyperbola soustavy (9).]

26. Které čáry jsou v parabolických souřadnicích vyjádřeny rovnicemi a) $\lambda_1 + \lambda_2 = k$, b) $\lambda_1 \lambda_2 = k$? Speciálně pro $k = 0$!
[Přímky, speciálně souřadnicové osy.]

27. Jak zní v parabolických souřadnicích rovnice a) kružnice se středem v počátku, b) paraboly ve vrcholovém tvaru?

[a) $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm 2r$, b) $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} = p^{-1}$.]

28. Větu Ivoryho dokažte pro parabolu!

[Podle pokynu, uvedeného v 24. úloze.]

29. Na jaké souřadnicové soustavy vedou rovnice (13) pro $n = 0, -1, -\frac{1}{2}$?

[Kartézské souřadnice v přímce, polární souřadnice v rovině, křivočaré souřadnice v rovině (soustava Σ_1 jsou elipsy, Σ_2 paraboly).]

30. Které čáry jsou v hyperbolických souřadnicích vyjádřeny rovnicemi a) $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2)$, b) $\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 = k$ $(\varepsilon = \pm 1)$, c) $\lambda_1 : \lambda_2 = k$?

[a) asymptoty čar soustav Σ_1, Σ_2, b) rovnoosé hyperboly, c) složené kuželosečky (jak?).]

31. Prozkoumejte t. zv. ortogonální kruhové souřadnice, které jsou definovány rovnicemi

$$\lambda_1 = \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}} - \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}}},$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+l}!$$

[Použijeme-li bipolárních souřadnic s póly $(\mp l; 0)$, můžeme tyto rovnice psáti ve tvaru $\lambda_1 = \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, $\lambda_2 = \varphi_2 - \varphi_1$; soustavy Σ_1, Σ_2 jsou ortogonální soustavy kružnic. Atd.]

32. Prozkoumejte t. zv. lemniskatické souřadnice, které jsou definovány rovnicemi

$$\lambda_1 = \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}} + \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}},$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+l}!$$

[Jako v 31. úloze nalezneme také zde $\lambda_1 = \log \frac{l^2}{\varrho_1\varrho_2}$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2$; soustavy Σ_1, Σ_2 jsou složeny z křivek Cassiniho a z rovnoosých hyperbol a jsou ortogonální. Atd.]

33. Napište nejjednodušší souřadnice, tvoří-li soustavu Σ_1 soustředné kružnice, soustavu Σ_2 rovnoběžné přímky!

[$\lambda_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\lambda_2 = y$ (nebo $\lambda_2 = x$). Obráceně?]