O souřadnicích v rovině

II. Kartézské a nomografické souřadnice

In: Zdeněk Pírko (author): O souřadnicích v rovině. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 13–39.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403009

II.

KARTÉZSKÉ A NOMOGRAFICKÉ SOUŘADNICE.

Objasnění pojmu souřadnice na speciální soustavě. A. Pravoúhlé souřadnice bodu. Polohu bodu v rovině stanovíme nejjednodušeji, když zavedeme pravoúhlou soustavu souřadnic. Sestrojíme dvě přímky x, y k sobě kolmé (osy souřadnic) a počínaje od jejich průsečíku O (počátku) opatříme je stejným měřítkem.[9]) Obecný bod v rovině určuje pak jednoznačně dvojici čísel x, y, totiž vzdálenosti obou jeho kolmých průmětů do souřadnicových os od počátku (měřené uvedeným měřítkem). A obráceně, obecná dvojice reálných čísel (kladných nebo záporných) vede k jedinému bodu. I je patrno, že jsme již předem stanovili pořadí obou základních přímek (osa x první, osa y druhá) a že jsme je také orientovali (opatřili určitým smyslem). Základní vlastnosti těchto souřadnic, které přesněji nazýváme pravoúhlé kartézské souřadnice bodu (x úsečka, y pořadnice), jsou čtenáři známé. Připomeňme jen, že okolnost: bod B má souřadnice x, y píšeme: B (x; y), a dále že zvolené měřítko můžeme definovati také t. zv. jednotkovým bodem J (1; 1).

Určujeme-li polohu bodu v rovině nebo sestrojujeme-li bod právě popsaným způsobem, mluvíme stručně o pravoúhlé kartézské rovině. Zároveň je to jeden z nejjednodušších způsobů, jimiž si zjednáváme jednojednoznačnou korespondenci mezi nekonečně mnoha body v rovině a nekonečně mnoha dvojicemi reálných čísel, kladných i záporných.

Pojem „nekonečně mnoho bodů v rovině" je třeba objasniti. Jestliže jednoznačné určení nějakého geometrického prvku (bodu, přímky, kružnice a pod.) závisí na r vzájemně nezávislých číslech, tu pravíme, že všechny tyto prvky tvoří r-násobnou

[9]) Použití stejného měřítka na obou osách je sice v analytické geometrii obvyklé, nikoliv však nutné.

varietu nebo že je jich ∞^r. Poloha bodu na přímce, kterou jsme orientovali a opatřili počátkem a jednotkovým bodem, je jednoznačně určena jediným číslem (jak?): na přímce leží ∞^1 bodů. Poloha bodu v kartézské rovině je jednoznačně určena dvěma souřadnicemi: v rovině existuje ∞^2 bodů. Přímka je v kartézské rovině určena jednoznačně dvěma podmínkami (jak?): v rovině existuje ∞^2 přímek. V rovině je ∞^3 kružnic, ∞^5 kuželoseček a pod. Varietu bodů v rovině vystihuje velmi názorně termín používaný v analytické mechanice: bod v rovině (a obecněji bod na ploše) má dva „stupně volnosti".

B. Definice souřadnic. Určení polohy bodu v rovině dvěma úsečkami, jeho pravoúhlými souřadnicemi, není jistě jediné. Snadno si dovedeme představiti, že polohu bodu lze určit i jinak, pomocí úhlů, poměrů délek a pod. Za těchto okolností jeví se nám pravoúhlé souřadnice jen jako velmi speciální případ velké skupiny souřadnicových soustav, které souborně jmenujeme „bodové souřadnice". Opírajíce se o známé vlastnosti pravoúhlé soustavy, dovedeme již nyní vysloviti jejich základní vlastnost: souřadnicemi bodu rozumíme taková čísla, která jednoznačně určují jeho polohu, a obráceně.

Za základní geometrický prvek v rovině nemusíme pokaždé voliti bod. Může jím být přímka, kružnice a pod.; postačí pak, když ve vhodně definované souřadnicové soustavě stanovíme čísla, která jednoznačně určí jeho polohu, a obráceně. Tímto způsobem k bodovým souřadnicím přistupují „souřadnice přímky", „souřadnice kružnice" a pod.

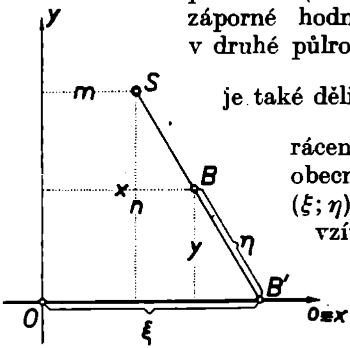
Můžeme tedy vysloviti tuto obecnou definici: Souřadnice geometrického prvku jsou čísla, která jednoznačně určují jeho polohu vzhledem k jiným pevně zvoleným geometrickým prvkům (jejichž konfiguraci nazýváme soustavou souřadnic), a obráceně.

C. Počet určujících čísel. V právě podané definici nebylo zmínky, kolik čísel je nutných a kolik stačí, aby byl jednoznačně určen prvek v rovině. Pravoúhlé souřadnice nám ukazují, že potřebujeme dvě nezávislá čísla, abychom určili polohu bodu v rovině; je to zároveň počet „stupňů volnosti", který má bod v rovině. Uvažujme nyní přímku jako základní prvek! Všech přímek v rovině je ∞^2, i bude třeba k určení polohy přímky v rovině dvou nezávislých čísel. Podobně k určení polohy kružnice v kartézské rovině bude zapotřebí tří nezávislých čísel atd. Prostě potřebujeme tolik nezávislých čísel, kolik „stupňů volnosti“ má příslušný prvek. Ale teď již musíme „stupně volnosti“ pojímati v širším smyslu než v mechanice, neboť vedle polohy musíme přihlížet i k změnám, kterých je příslušný prvek schopný (na př. kružnici v rovině můžeme podrobiti posunutí, otočení, ale také homotetii vzhledem k pevnému středu homotetie a pod.). Úvahy tohoto druhu vedou nás k větě: K určení polohy geometrického prvku o r „stupních volnosti“ stačí právě r nezávislých čísel (souřadnic).

Nechť geometrický prvek má r „stupňů volnosti“. I stačí k jeho určení podle uvedené věty r nezávislých čísel. Je-li tedy jeho poloha jednoznačně určena s čísly, při čemž je $s > r$, tu z těchto s čísel jich musí býti $s - r$ závislých na ostatních, jinými slovy: mezi těmito s čísly musí platit $s - r$ vztahů. S příklady takových souřadnic se setkáme v dalším výkladu. Setkáme se však i s případy takových souřadnicových soustav, které jsou zdánlivě ve sporu s požadavkem jednojednoznačné korespondence. Tak obecnou dvojicí souřadnic budou určeny na př. dva body, ale souměrně položené podle pevné přímky. Jindy obecnou dvojicí čísel budou dokonce určeny čtyři body, ale souměrně položené vzhledem k průsečíku dvou přímek k sobě kolmých. V takových případech, zvlášť uvedených, kdy jediným bodem skupiny (složené z konečného počtu bodů) budou jednoznačně určeny i ostatní body této skupiny, budeme základní požadavek jednojednoznačné korespondence považovati za nedotčený.

D. Středové souřadnice bodu. Dovedeme-li zacházeti s pravoúhlými souřadnicemi, tu nejjednodušší způsob, kterým se můžeme orientovat o základních vlastnostech jiné soustavy, je ten, že nalezneme její vztah k vhodně zvolené pravoúhlé soustavě a vyvodíme její vlastnosti ze známých vlastností této soustavy.

Uvedeme příklad. Polohu obecného bodu B (obr. 1) můžeme určiti tak, že jej promítneme z pevného bodu S (středu) do pevné přímky o (osy), která neprochází středem S, na níž jsme zvolili jiný pevný bod O (počátek) a kladný smysl. Je-li B' tento průmět, tu vidíme, že obecný bod určuje (při zvoleném měřítku, pro všechny směry stejném) dvě čísla $\xi = \overline{OB'}$, $\eta = \overline{BB'}$. Při tom kladnou délku ξ nanášíme v kladném smyslu od O, zápornou opačně; délku η nanášíme na přímku SB' tak, že kladné hodnoty η dávají body v té půlrovině (určené osou o), kde leží střed S, záporné hodnoty pak přísluší bodům v druhé půlrovině (jinak: je-li η kladné, je také dělicí poměr $\frac{\overline{BB'}}{\overline{SB'}}$ kladný, a obráceně). Určuje tedy obráceně obecná dvojice reálných čísel $(\xi; \eta)$ jediný bod. I můžeme vzíti čísla ξ, η za souřadnice bodu v rovině; nazveme je středové souřadnice bodu.(1) Abychom nalezli jejich základní vlastnosti, zvolme pravoúhlou soustavu tak, jak naznačuje obrázek. Nechť v této soustavě má střed S souřadnice $(m; n)$, bod B souřadnice $(x; y)$. Pak platí



Obr. 1.

$$n : (\xi - m) = y : (\xi - x),\ \ y : \eta = n : \underset{+}{\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}},$$

a z těchto rovnic plyne jednak

$$x = \xi - \frac{(\xi - m)\,\eta}{+\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}},\ \ y = \frac{n\eta}{+\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}}, \tag{1}$$

jednak

$$\xi = \frac{nx - my}{n - y},\ \ \eta = \frac{y}{n - y}\underset{+}{\sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2}}. \tag{2}$$

To jsou rovnice, pomocí nichž můžeme převésti pravoúhlé souřadnice na středové, a obráceně.

Píšeme-li rovnice (2) ve tvaru

$$\xi = \frac{x - \frac{m}{n}\,y}{1 - \frac{y}{n}},\ \ \eta = \frac{y}{1 - \frac{y}{n}}\underset{+}{\sqrt{\left(\frac{x - m}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n} - 1\right)^2}}, \tag{2'}$$

a necháme-li n vzrůstati nade všechny meze (m je pevné, konečné), tu nalezneme $\lim_{n \to \infty} \xi = x$, $\lim_{n \to \infty} \eta = y$, t. j. pravoúhlé souřadnice jsou zvláštním případem středových souřadnic (vysvětlete podrobněji!).

Počátek O má souřadnice $\xi = \eta = 0$. Pro body na ose o platí $\eta = 0$, i je to zároveň rovnice této osy; podobně $\xi = 0$ je rovnicí spojnice OS. Obecný vztah mezi souřadnicemi ξ, η vyjadřuje čáru[10]); její rovnici v souřadnicích x, y poskytují rovnice (2). Jako příklad uvažujme zvláštní případy lineárního vztahu $a\xi + b\eta + c = 0$ (a, b, c konstanty)! Je-li $b = 0$, zjednoduší se původní rovnice na $\xi = -c : a$ a vyjadřuje přímku, která prochází středem S a na ose o utíná úsek $-c : a$, a obráceně. Je-li $a = 0$, dospíváme k rovnici $\eta = -c : b$; čára jí vyjádřená sluje konchoida přímky čili Nikomedova (vyslovte na základě rovnice $\eta = \pm k$ její výtvarný zákon!). Je-li $c = 0$ a $a = \pm b$, máme rovnici $\xi = \pm \eta$; čára jí vyjádřená sluje šikmá strofoida (pro $m = 0$ nazývá se přímá strofoida; vyslovte výtvarné zákony obou těchto čar!).

Tento příklad měl nám stručně ukázati, proč používáme ještě jiných soustav vedle pravoúhlé. Viděli jsme právě, že rovnice některých čar objevují se zvlášť jednoduché v souřadnicích středových. A naopak; napište si v těchto souřadnicích na př. rovnici kružnice, která má střed v počátku a poloměr r! Používáme proto jiných souřadnicových soustav za tím účelem; abychom si usnadnili studium jistých geometrických vlastností, jejichž vyjádření má v takových soustavách zvlášť jednoduchý početní tvar. S jinými příklady se ještě setkáme v dalším textu.

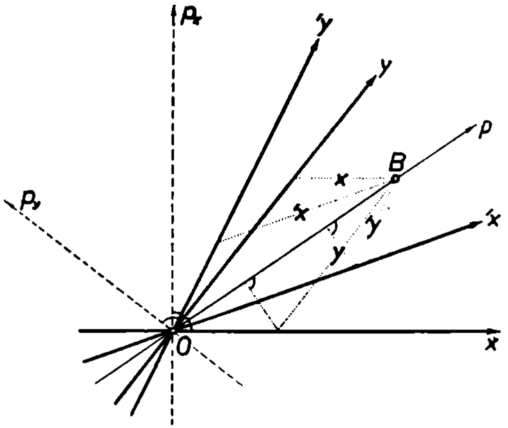
Úlohy k tomuto odstavci: 1—7.

Kartézské souřadnice bodu. A. Definice a transformace. Soustava pravoúhlých souřadnic je určena jedno-

---

[10]) Ovšem za jistých, ostatně dosti obecných podmínek, jejichž splnění ve všech případech, v této knize uvažovaných, můžeme předpokládati.

značně, jsou-li dány její osy (pořadím a orientací) a jednotkový bod J (1; 1). Kolmost obou souřadnicových os však není podstatná; obecněji můžeme totiž zvoliti dvě přímky, které svírají ostrý úhel (označíme jej ω), stanoviti jejich pořadí, orientovati je a obě souřadnice x, y odměřovati ve směru těchto dvou přímek. Mluvíme v tomto případě o kosoúhlých kartézských souřadnicích bodu.[11])



Obr. 2.

V každé souřadnicové soustavě má zvláštní důležitost t. zv. transformace souřadnic. S obsahem tohoto pojmu je čtenář v podstatě obeznámen (transformace posunutím a otočením!). Na tom místě si ukážeme, jak se vyjadřuje transformace mezi dvěma kartézskými soustavami (obecně kosoúhlými), které mají společný počátek (obr. 2). Označme osy jedné soustavy x, y, druhé $'x$, $'y$. I vidíme, že pro každou

---

[11]) Oba druhy kartézských souřadnic, pravoúhlé a kosoúhlé, nazýváme někdy společným názvem souřadnice rovnoběžkové (paralelní).

přímku p, která prochází společným počátkem O, platí

$$x \cos (p, x) + y \cos (p, y) \equiv {}'x \cos (p, {}'x) + y' \cos (p, {}'y),$$

při čemž značí na př. (p, x) úhel, o který třeba otočiti přímku p kolem počátku O v kladném smyslu, aby splynula s osou x. Zvolme nyní $(p, y) = \frac{1}{2}\pi$; tím určíme jednoznačně přímku p_y, pro niž opět platí

$$x \cos (p_y, x) = {}'x \cos (p_y, {}'x) + {}'y \cos (p_y, {}'y). \qquad (*)$$

Podobně zvolme $(p, x) = \frac{1}{2}\pi$; tak určíme přímku p_x, pro niž platí

$$y \cos (p_x, y) = {}'x \cos (p_x, {}'x) + {}'y \cos (p_x, {}'y). \qquad (**)$$

Uvažme však, že lze psáti $\cos (p_y, {}'x) = \cos ({}'x, p_y) = \sin [\frac{1}{2}\pi + ({}'x, p_y)] = \sin [(p_y, y) + ({}'x, p_y)] = \sin ({}'x, y)$ atd. Po této úpravě obdržíme z rovnic (*) a (**)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin ({}'x, y)}{\sin (x, y)}\, {}'x + \frac{\sin ({}'y, y)}{\sin (x, y)}\, {}'y, \\ y &= \frac{\sin ({}'x, x)}{\sin (y, x)}\, {}'x + \frac{\sin ({}'y, x)}{\sin (y, x)}\, {}'y; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

těmito vztahy jsou tedy vyjádřeny souřadnice nečárkované soustavy souřadnicemi čárkovanými.

Abychom nalezli obrácené vyjádření, uvažujme nejprve determinant soustavy (3). Ten je

$$D \equiv -\frac{1}{\sin^2 (x, y)} [\sin ({}'x, y) \sin ({}'y, x) - \sin ({}'x, x) \sin ({}'y, y)].$$

Poněvadž je $({}'y, x) = ({}'y, {}'x) + ({}'x, x)$, $({}'y, y) = ({}'y, {}'x) + ({}'x, y)$, lze také psáti

$$D \equiv -\frac{\sin ({}'y, {}'x)}{\sin^2 (x, y)} [\sin ({}'x, y) \cos ({}'x, x) - \sin ({}'x, x) \cos ({}'x, y)],$$

poněvadž je $({}'x, y) = ({}'x, x) + (x, y)$, zjednoduší se výraz v lomené závorce na $\sin(x, y)$, takže $D = \sin('x, 'y) : \sin(x, y)$. Užívajíce tohoto výsledku, můžeme řešení soustavy (3) podle čárkovaných souřadnic psáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} 'x &= \frac{\sin(x, 'y)}{\sin('x, 'y)}\, x + \frac{\sin(y, 'y)}{\sin('x, 'y)}\, y, \\ 'y &= \frac{\sin(x, 'x)}{\sin('y, 'x)}\, x + \frac{\sin(y, 'x)}{\sin('y, 'x)}\, y; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

rovnice ty mají tvar rovnic (3) až na to, že čárkované veličiny jsou zaměněny za nečárkované a obráceně.

Jestliže počátek čárkované soustavy má v nečárkované soustavě souřadnice $(x_0; y_0)$, tu v rovnicích (3) na levých stranách místo x resp. y nastoupí rozdíly $x - x_0$ resp. $y - y_0$, v rovnicích (4) na pravých stranách místo x resp. y rovněž rozdíly $x - x_0$ resp. $y - y_0$.

B. Základní vlastnosti kosoúhlých souřadnic. V tomto odstavci jen velmi stručně uvedeme základní vzorce analytické geometrie v kosoúhlých souřadnicích, (²) přenechávajíce jejich ověření — ostatně snadné — čtenáři. Vzdálenost dvou bodů $B_i(x_i; y_i)$, $i = 1,2$ je dána vzorcem

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega},$$

vzdálenost bodu $B(x; y)$ od počátku vzorcem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}.$$

Každá lineární rovnice $ax + by + c = 0$ (a, b, c konstanty) vyjadřuje přímku, jejíž úseky na souřadnicových osách jsou $-c : a$, $-c : b$ a nezávisí tedy na úhlu ω. Speciálně $x\cos\alpha + y\cos(\omega - \alpha) - d = 0$ vyjadřuje přímku v normálním tvaru (co značí α, d, jak převedete obecný tvar přímky na normální?). Rovnice přímky, která prochází dvěma body $B_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2$ zní

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Užívajíce předcházejících výsledků, můžeme napsati ihned rovnici kružnice, která má střed $(m; n)$ a poloměr r; zní

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + 2(x - m)(y - n)\cos\omega - r^2 = 0.$$

Obráceně každá rovnice tvaru

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m'x + 2n'y + p = 0$$

vyjadřuje kružnici; určete její střed a poloměr! Jednoduchý tvar má také rovnice hyperboly o poloosách a, b, jestliže ji vztáhneme k asymptotám jako souřadnicovým osám; zní $xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ čili $xy = \frac{1}{4}e^2$. Poněvadž mezi poloosami a, b a úhlem asymptot ω platí $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = b : a$ čili $\sin \omega = 2ab : (a^2+b^2)$, lze rovnici této křivky psáti také ve tvaru

$$xy \sin \omega = \tfrac{1}{2}ab.$$

Úlohy k tomuto odstavci: 8—15.

Kartézské souřadnice přímky. A. Definice. Rovnici obecné přímky v kartézských souřadnicích můžeme psáti ve tvaru

$$ux + vy + 1 = 0; \tag{5}$$

tato přímka utíná na souřadnicových osách úseky

$$p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}. \tag{6}$$

I je každou dvojicí čísel u, v, z nichž aspoň jedno je od nuly rozdílné, určena jediná přímka, a obráceně. Můžeme tedy dvojici $[u; v]$ považovati za souřadnice přímky; souřadnice takto definované nazýváme přímkové souřadnice (nebo Plückerovy souřadnice). Jejich geometrický význam vyplývá z rovnic (6): jsou to záporně vzaté reciproké hodnoty úseků, které přímka tvoří na kartézských souřadnicových osách. Soustava přímkových souřadnic je určena jednoznačně oběma souřadnicovými osami a t. zv. jednotkovou přímkou $j\,[1; 1]$ (vyložte její význam!).

Je-li přímka rovnoběžná s osou x resp. y, má souřadnice $[0; v]$ resp. $[u; 0]$. Přímka, jejíž souřadnice jsou $[0; 0]$, je nekonečně vzdálená přímka roviny (nevlastní přímka; proč?). A pod.

B. Zákon duality. Rovnice (5) vyjadřuje t. zv. podmínku incidence: ukazuje, jaký vztah musí splňovati souřadnice $(x; y)$ a $[u; v]$, aby bod $(x; y)$ ležel na přímce $[u; v]$

(aby bod a přímka byly incidentní). Lze pak na tuto rovnici nahlížeti dvojím způsobem: buďto ji pokládati za *bodovou rovnici přímky*, jejíž úseky na osách jsou $-u^{-1}, -v^{-1}$, když u, v jsou konstanty a x, y proměnné, nebo za *přímkovou rovnici bodu* $(x; y)$, když u, v jsou proměnné a x, y konstanty. Na této dvojí interpretaci se zakládá pro geometrii důležitý *zákon duality*. Bodu, kolem něhož se přímka otáčí, odpovídá přímka, kterou bod popisuje. Všem bodům přímky (přímé řadě bodové) odpovídají všechny přímky jdoucí jedním bodem (svazek přímek). Bodu jakožto průsečíku dvou přímek odpovídá duálně přímka jako spojnice dvou bodů. Zejména pak křivce jako souhrnu jejích bodů odpovídá křivka jako souhrn (obálka) jejích tečen.[12])

Analytický význam zákona duality nám nejlépe objasní příklady. Rovnice

$au + bv + c = 0$	$ax + by + c = 0$
vyjadřuje bod $(a : c;\ b : c)$;	vyjadřuje přímku $[a : c;\ b : c]$;
$u = a,\ v = b$	$x = a,\ y = b$
vyjadřují přímku $[a; b]$;	vyjadřují bod $(a; b)$;
$u = 0,\ v = 0$	$x = 0,\ y = 0$
vyjadřují přímku nevlastní;	vyjadřují počátek;
$\frac{1}{u} = 0, \frac{1}{v} = 0$	$\frac{1}{x} = 0, \frac{1}{y} = 0$
vyjadřují přímku jdoucí počátkem;	vyjadřují nevlastní bod;
$u = a$, v libovolné resp. u libovolné, $v = b$	$x = a$, y libovolné resp. x libovolné, $y = b$
vyjadřují bod na ose úseček resp. pořadnic;	vyjadřují přímku rovnoběžnou s osou pořadnic resp. úseček;
$au + bv = 0$	$ax + by = 0$
vyjadřuje bod nevlastní přímky.	vyjadřuje přímku jdoucí počátkem.

[12]) Odtud také jiné pojmenování: *souřadnice tečnové (tangenciální)*.

A dále výraz $\dfrac{ux + vy + 1}{\overset{+}{\sqrt{u^2 + v^2}}}$ vyjadřuje za předpokladu, že kartézská soustava je pravoúhlá, absolutně vzdálenost bodu $(x; y)$ od přímky $[u; v]$; výraz $\pm \dfrac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_1u_2 + v_1v_2}$ vyjadřuje úhel dvou přímek $[u_i; v_i]$, $i = 1, 2$ (kdy jsou rovnoběžné, kolmé?). A pod. ([3])

C. Transformace bodových souřadnic na přímkové. Pro jednoduchost se omezíme na pravoúhlé souřadnice. Budiž dána křivka s bodovou rovnicí $F(x; y) = 0$. Její tečna v bodě $(x; y)$ a v souřadnicích X, Y zní

$$(X - x) F'_x + (Y - y) F'_y = 0$$

$$\left(F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y};\ y' = -\frac{F'_x}{F'_y}\right)$$

její přímkové souřadnice jsou

$$u = -\frac{F'_x}{xF'_x + yF'_y},\quad v = -\frac{F'_y}{xF'_x + yF'_y}. \qquad (*)$$

Vyloučíme-li z rovnic (*) a z rovnice dané křivky proměnné x, y, dostaneme přímkovou (tečnovou) rovnici této křivky. Na př. pro kružnici $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ nalezneme $u^2 + v^2 - r^{-2} = 0$.

Je-li obráceně dána křivka přímkovou (tečnovou) rovnicí $F(u, v) = 0$, tu rovnice její tečny je $ux + vy + 1 = 0$, rovnice blízké tečny je $(u + \mathrm{d}u)\, x + (v + \mathrm{d}v)\, y + 1 = 0$ a průsečík obou těchto přímek má souřadnice

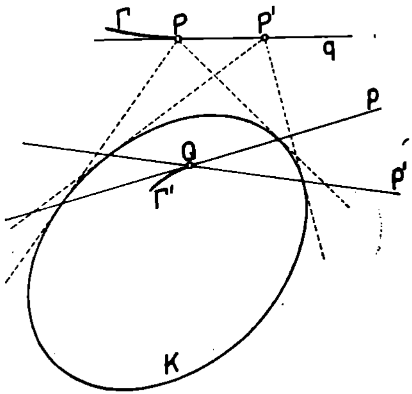
$$x = -\frac{\mathrm{d}v}{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u},\quad y = \frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}$$

čili

$$x = -\frac{F'_u}{uF'_u + vF'_v},\quad y = -\frac{F'_v}{uF'_u + vF'_v}. \qquad (**)$$

Vyloučíme-li z rovnic (**) a z rovnice dané křivky proměnné u, v, dostaneme bodovou rovnici této křivky. Hledáme-li na př. křivku s vlastností, že souřadnicové osy utínají na jejích tečnách úsek stálé délky r, tu její přímková (tečnová) rovnice je $u^{-2} + v^{-2} - r^2 = 0$ a bodová rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}} = 0$. Sestrojte tuto křivku jako obálku tečen (sluje **astroida**)!

D. **Polární reciprocita.** Studium čar s rovnicí $F(u, v) = 0$ lze jednoduše převésti na studium čar s rovnicí $F(x, y) = 0$. Uvažujme kuželosečku K a obecný bod P; jeho polára vzhledem ke K budiž p (viz obr. 3). Polára bodu P', blízkého k bodu P, budiž p'. Obě poláry p, p' nechť se protínají v bodě Q.



Obr. 3.

Jestliže body P vyplňují křivku Γ, tu poláry p obalují jinou křivku Γ' a vzájemná souvislost křivek Γ, Γ' je tato: tečnám q křivky Γ (t. j. mezným polohám spojnic bodů P, P') odpovídají body Q křivky Γ', a všem tečnám p křivky Γ' odpovídají body P křivky Γ (póly polár p vzhledem ke K). Dvě křivky Γ, Γ', které jsou v takovém vztahu, nazýváme **polárně reciprokými** vzhledem ke kuželosečce K (jinak: křivka Γ resp. Γ' je polarisována ke křivce Γ' resp. Γ vzhledem ke kuželosečce K).

Zvolme za základní kuželosečku K (imaginární) kružnici

$$X^2 + Y^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

Poláry bodů $(x; y)$, $(x + \mathrm{d}x; y + \mathrm{d}y)$ jsou $xX + yY + 1 = 0$, $(x + \mathrm{d}x) X + (y + \mathrm{d}y) Y + 1 = 0$, a jejich průsečík má souřadnice

$$X = -\frac{dy}{x\,dy - y\,dx},\quad Y = \frac{dx}{x\,dy - y\,dx}.$$

Jestliže body $(x; y)$ leží na křivce $F(x, y) = 0$, tu rovnice její tečny je $(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0$ a její souřadnice jsou dány vztahy

$$u = -\frac{dy}{x\,dy - y\,dx},\quad v = \frac{dx}{x\,dy - y\,dx}.$$

Platí tedy $X = u$, $Y = v$. Došli jsme tak k větě: Rovnice křivky v pravoúhlých přímkových souřadnicích u, v je zároveň rovnicí její polárně reciproké křivky vzhledem ke kružnici, která v pravoúhlých bodových souřadnicích x, y je vyjádřena rovnicí $x^2 + y^2 + 1 = 0$, jestliže v rovnici dané křivky nahradíme souřadnice přímkové bodovými. A obráceně. Máme-li tedy studovati křivku s rovnicí $F(u, v) = 0$ v pravoúhlých přímkových souřadnicích, budeme studovati křivku s rovnicí $F(x, y) = 0$ v pravoúhlých bodových souřadnicích (což je úloha jednodušší) a odvodíme si její polární vlastnosti vzhledem ke kružnici (7). ([4])[13])

Úlohy k tomuto odstavci: 16—26.

Jiné druhy přímkových souřadnic. Předpokládáme-li pravoúhlou soustavu jako základní, tu normální rovnici obecné přímky můžeme psáti ve tvaru

$$x \cos t + y \sin t - f = 0 \quad \text{resp.} \quad x + y \operatorname{tg} t - p = 0, \qquad (8)$$

v němž značí tedy f délku kolmice s počátku na přímku spuštěné a t úhel této kolmice s osou $+x$, p je úsek přímky na ose x.

---

[13]) Na místo čísel u, v lze za souřadnice přímky vzíti přímo čísla p, q (souřadnice úsekové). ([5]) Je-li dána křivka bodovou kartézskou rovnicí $F(x, y) = 0$, tu její rovnice v úsekových souřadnicích je výsledkem eliminace x, y z dané rovnice a z rovnic

$$p = x - y\frac{dx}{dy},\quad q = y - x\frac{dy}{dx};$$

je-li křivka dána úsekovou rovnicí $F(p, q) = 0$, tu její bodová kartézská rovnice je výsledkem eliminace p, q z dané rovnice a z rovnic

$$x = p^2 : \left(p - q\frac{dp}{dq}\right),\quad y = q^2 : \left(q - p\frac{dq}{dp}\right).$$

Dokažte!

Obráceně obecná dvojice $[f; t]$ ($f > 0$, $0 < t < 2\pi$) resp. $[p; t]$ určuje jedinou přímku. Můžeme tedy čísla f, t resp. p, t vzíti za souřadnice přímky; dospíváme tak k souřadnicím normálním resp. axiálním. Předpokládáme-li, že f resp. p jsou funkcemi úhlu t, t. j. $f = f(t)$, $p = p(t)$, a že úhel t nabývá všech možných hodnot, tu rovnice (8) představují ∞^1 přímek, které obecně jsou tečnami nějaké křivky Γ. I můžeme takové rovnice považovati za tečnové rovnice této čáry; mluvíme pak o normální (také magické) resp. axiální rovnici křivky.(*)

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 27—30.

Homogenní souřadnice bodu a přímky. A. Definice. Za předpokladu, že základní soustava je obecně kosoúhlá, položme

$$\left.\begin{array}{l} x : z \text{ místo } x,\ y : z \text{ místo } y \text{ resp.} \\ u : w \text{ místo } u,\ v : w \text{ místo } v, \end{array}\right\} \tag{9}$$

při čemž předpokládáme, že aspoň jedno z čísel x, y, z resp. u, v, w je rozdílné od nuly. I určuje obecná trojice čísel $(x; y; z)$ resp. $[u; v; w]$ jediný bod resp. přímku, jehož (jejíž) kartézské souřadnice jsou $\left(\frac{x}{z}; \frac{y}{z}\right)$ resp. $\left[\frac{u}{w}; \frac{v}{w}\right]$. To však již neplatí obráceně. Dovedeme totiž udati vždy nekonečně mnoho trojic x, y, z resp. u, v, w, jejichž poměr má dané hodnoty $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ resp. $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ a které tedy vedou na týž bod resp. přímku. Bod (přímka), který je určen trojicí x, y, z (u, v, w), je určen také každou trojicí $\varrho x, \varrho y, \varrho z$ ($\varrho u, \varrho v, \varrho w$), kde $\varrho \neq 0$; obráceně, jsou-li x, y, z (u, v, w) „souřadnice" bodu (přímky), má týž bod (přímka) také „souřadnice" $\sigma x, \sigma y, \sigma z$ ($\sigma u, \sigma v, \sigma w$), kde $\sigma \neq 0$. Záleží tedy jen na poměru těchto tří hodnot, a to jsou dvě nezávislá čísla, tedy tolik čísel, kolik má bod (přímka) v rovině „stupňů volnosti".

Proto nazýváme tato čísla poměrné nebo Hesseovy souřadnice bodu (přímky). Poněvadž každá algebraická rovnice $F(x, y) = 0$ resp. $F(u, v) = 0$ stane se po zavedení těchto nových proměnných podle pokynů (9) homogenní, nazývají se tyto souřadnice častěji homogenní souřadnice bodu (přímky). Obráceně z homogenní rovnice vznikne nehomogenní (kartézská) rovnice, když prostě položíme $z = 1$ ($w = 1$). V homogennosti těchto souřadnic záleží také největší jejich význam.

B. Základní vlastnosti homogenních souřadnic. Homogenní souřadnice počátku jsou patrně $(0; 0; z)$, kde $z \neq 0$, tedy nejjednodušeji $(0; 0; 1)$. Bod o souřadnicích $(x; 0; z)$ resp. $(0; y; z)$, kde $x, z \neq 0$ resp. $y, z \neq 0$, leží na ose x resp. y. Je tedy $(x; 0; 0)$ resp. $(0; y; 0)$ nebo nejjednodušeji $(1; 0; 0)$ resp. $(0; 1; 0)$ nevlastní bod osy x resp. y. Bod, jehož všechny homogenní souřadnice by byly rovny nule, neexistuje. Přímka jdoucí počátkem má homogenní souřadnice $[u; v; 0]$; souřadnice osy x resp. y jsou $[0; v; 0]$ resp. $[u; 0; 0]$, nejjednodušeji $[0; 1; 0]$ resp. $[1; 0; 0]$. Přímka, jejíž všechny homogenní souřadnice by byly rovny nule, neexistuje.

Homogenní rovnice přímky má tvar

$$ax + by + cz = 0, \tag{10}$$

a obráceně. Obsahuje-li přímka nevlastní body os, je v tomto případě $p = -c : a = \infty$, $q = -c : b = \infty$ čili $a = b = 0$, a rovnice (10) za předpokladu, že $c \neq 0$ (kdyby bylo $c = 0$, procházela by přímka počátkem a nemohla by obsahovat nevlastní body souřadnicových os), má tvar

$$z = 0. \tag{11}$$

Tato rovnice však vyjadřuje všechny nevlastní body roviny (proč?), je tedy rovnicí nevlastní přímky roviny. Její souřadnice jsou $[0; 0; w]$ nebo nejjednodušeji $[0; 0; 1]$. V homogenních souřadnicích lze tedy s nevlastními útvary (s útvary v nekonečnu) zacházeti jako s útvary v konečnu. V této vlastnosti záleží další význam těchto souřadnic.

Podmínka incidence bodu $(x; y; z)$ a přímky $[u; v; w]$ je vyjádřena rovnicí

$$ux + vy + wz = 0. \tag{12}$$

Dvojí interpretace této rovnice (která?) umožňuje nám opět přenášeti vlastnosti odvozené pro body na přímky, a obráceně (zákon duality). Na př. z kartézské rovnice přímky, jdoucí dvěma body, obdržíme ihned homogenní rovnici takové přímky; zní

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Duálně rovnice

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

vyjadřuje tedy bod, v němž se protínají dvě přímky. Uveďte jiné příklady!

Protneme-li kružnici

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m'xz + 2n'yz + pz^2 = 0$$

nevlastní přímkou, obdržíme

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{y}{x} = -\cos \omega \pm i \sin \omega. \quad (13)$$

Protíná tedy nevlastní přímka každou kružnici v týchž dvou komplexně sdružených bodech $(1; -\cos \omega \pm i \sin \omega; 0)$; průsečíky tyto se nazývají body kruhové, jejich spojnice s počátkem mají rovnici (13) a nazývají se přímky isotropické. V homogenních pravoúhlých souřadnicích jsou kruhové body $(1; \pm i; 0)$, isotropické přímky $x^2 + y^2 = 0$ čili $x \pm \pm iy = 0$. Snadno dokážeme tyto tři vlastnosti isotropických přímek: 1. Jsou samy k sobě kolmé (rozšíříme-li ovšem obvyklou definici úhlu i na elementy imaginární). 2. Úhel isotropické přímky s obecnou přímkou je konstantní. 3. Průvodiče měřené na isotropických přímkách mají nulovou délku (odtud jiný název: minimální přímky).

S hlediska duality odpovídá počátku $(0; 0; z)$ nevlastní přímka $[0; 0; w]$, kruhovým bodům $(1; \pm i; 0)$ isotropické přímky $[1; \pm i; 0]$. Vyložte podrobněji!(7)

C. Tečna v homogenních souřadnicích. Budiž $F(x, y, z) = 0$ algebraická křivka n-ho stupně. Označíme-li na okamžik nehomogenní souřadnice pruhy, tu platí $x = \bar{x}z$, $y = \bar{y}z$ a tedy

$$dx = \bar{x}\,dz + z\,d\bar{x}, \quad dy = \bar{y}\,dz + z\,d\bar{y}.$$

Z rovnice čáry však plyne

$$\mathrm{d}F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0;$$

tedy po dosazení podle předcházejících vztahů

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\bar{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}\bar{y}\right) z = 0,$$

po zavedení homogenních souřadnic

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,y + \frac{\partial F}{\partial z}\,z\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}\bar{y}\right) z = 0.$$

Podle Eulerovy věty o homogenních funkcích[14]) je výraz v první závorce rovný nule, takže pro body v konečnu ($z \neq 0$) platí

$$\bar{y}' = \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Rovnice tečny v bodě $(\bar{x}; \bar{y})$ zní

$$\bar{Y} - \bar{y} = \bar{y}'\,(\bar{X} - \bar{x}),$$

nebo — zavedeme-li homogenní souřadnice —

$$\frac{X}{Z}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{Y}{Z}\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{x}{z}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{z}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

Použitím Eulerovy věty se tento výraz zjednoduší na

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0; \tag{14}$$

touto rovnicí je tedy vyjádřena tečna dané křivky v homogenních souřadnicích. O souřadnicích této tečny platí

$$u : v : w = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

v nehomogenních souřadnicích

$$\bar{u} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z},\ \bar{v} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.\ (^{8})$$

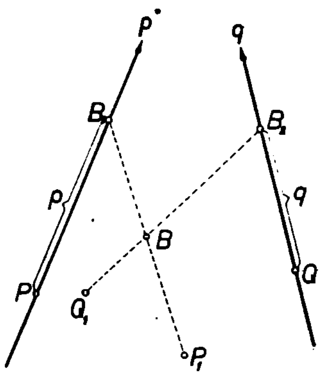
Úlohy k tomuto odstavci: 31—36.

---

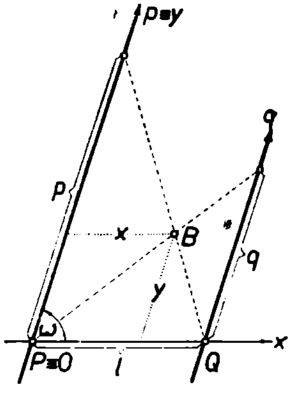
[14]) Věta Eulerova o homogenní funkci $F(x, y, z)$ stupně n:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

Nomografické souřadnice. Polohu bodu v rovině velmi obecně můžeme určiti takto: Zvolíme dvě obecné přímky p, q (souřadnicové nebo nomografické osy; obr. 4), které orientujeme, na nich body P, Q (počátky) a mimo osy další dva body P_1, Q_1 (středy). Polohu obecného bodu B určíme čísly p, q, jak naznačuje obrázek. A obráceně. Souřadnice takto definované nazýváme (obecné) n o m o g r a f i c k é s o u ř a d n i c e b o d u.([9])



Obr. 4.



Obr. 5.

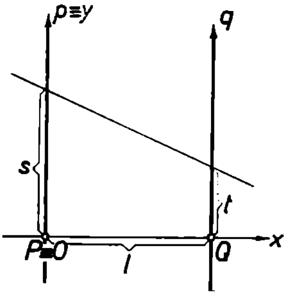
A. N o m o g r a f i c k é s o u ř a d n i c e b o d u. Zvolme osy tak, aby $p \uparrow\uparrow q$, počátky a středy tak, aby $P \equiv P_1$, $Q \equiv Q_1$. Souřadnice bodu takto definované slují (obyčejné) n o m o g r a f i c k é s o u ř a d n i c e b o d u. Zvolíme-li kartézskou soustavu, jak ukazuje obr. 5, platí zřejmě

$$x = lp : (p + q), \quad y = pq : (p + q) \tag{15}$$

a obráceně

$$p = ly : (l - x), \quad q = ly : x. \tag{16}$$

B. N o m o g r a f i c k é s o u ř a d n i c e p ř í m k y. V soustavě nomografických souřadnic takto definovaných je obecná přímka jednoznačně určena úseky s, t, které utíná na nomografických osách. A obráceně. (Vyložte podrobněji!) Zvláštní pozornosti si zaslouží pravoúhlé nomografické souřadnice přímky ($\omega = \frac{1}{2}\pi$). Základními prvky této soustavy jsou dva body (počátky P, Q) a jejich spojnice (osa PQ), což jsou duální prvky k prvkům pravoúhlé soustavy, dvěma přímkám (osám x, y) a jejich průsečíku (počátku O). Tímto duálním způsobem zavedli tyto souřadnice Unverzagt a Schwering, slují proto také souřadnice Unverzagtovy-Schweringovy (také souřadnice duální k pravoúhlým). Zvolíme-li pravoúhlou soustavu, jak ukazuje obr. 6, platí zřejmě



Obr. 6.

$$u = (t - s) : ls, \quad v = -1 : s \tag{17}$$

a obráceně

$$s = -1 : v, \quad t = -(1 + lu) : v.\text{(}^{10}\text{)} \tag{18}$$

Další vlastnosti nomografických souřadnic v úlohách: 37—48.

Úlohy ke cvičení.

1. Prozkoumejte středové souřadnice v případě, že střed S se nachází na kolmici vztyčené k ose v počátku!

[V rovnicích (1), (2) položte $m = 0$.]

2. Napište rovnici Nikomedovy konchoidy $\eta = \pm k$ v pravoúhlých souřadnicích! Sestrojte tuto křivku, rozeznávajíce případy, kdy $k \gtreqless n$! Ukažte, že vhodnou volbou počátku pravoúhlé soustavy lze rovnici čáry v této soustavě ještě zjednodušit!

[$(x - m)^2\, y^2 + (y - n)^2\, (y^2 - k^2) = 0$; pro $k > n$ má křivka střed S za dvojnásobný bod, pro $k = n$ má tu hrot, pro $k < n$ je střed t. zv. isolovaný bod, osa o je asymptota křivky; transformací $'x = x - m$, $'y = y - n$.]

3. Napište rovnice kosé a kolmé strofoidy v pravoúhlých souřadnicích a sestrojte tyto křivky!

[Rovnice kosé strofoidy zní $(x^2 + y^2)\, y + n\,(x^2 - y^2) - 2mxy = 0$; počátek O je dvojnásobný bod, osa o je asymptota.]

4. Jak zní rovnice křivky $a\xi + b\eta + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$ v pravoúhlých souřadnicích?

[Křivka 4. stupně, kterou transformací z 2. úlohy lze uvésti na tvar $(x^2 + y^2)\,(y + n)^2 - (Ax + By)^2 = 0$; křivku tu sestrojíme nejsnadněji s pomocí polárních souřadnic, o nichž bude pojednáno ve čtvrté kapitole.]

5. Za souřadnicovou čáru na místě osy o lze zvolit i jinou křivku. Zvolte na př. kružnici a v případě, že $O \equiv S$ sestrojte křivku s rovnicí $\eta = \pm k$ pro $k \gtreqless 2r$, kde r značí poloměr zvolené kružnice (sluje **Pascalova závitnice**, spec. pro $k = 2r$ **kardioida**)!

[Jestliže je $k > 2r$, je bod $O \equiv S$ dvojnásobný, jestliže je $k = 2r$, je hrotem, pro $k < 2r$ je to bod isolovaný. Křivky jsou 4. stupně; napište ve vhodně zvolené pravoúhlé soustavě jejich rovnice!]

6. Jak se specialisuje souřadnicová soustava, uvedená v 5. úloze, zvolíme-li její střed ve středu souřadnicové kružnice? Jak je v této soustavě vyjádřena kružnice se středem v bodě S a s poloměrem a?

[Soustava ta je ve velmi jednoduchém vztahu k polární soustavě (tyto souřadnice budou vyloženy ve čtvrté kapitole); $\eta = a - r$.]

7. Vyšetřete souřadnicovou soustavu, v níž poloha bodu je určena jeho vzdálenostmi od pevného bodu (počátku) a pevné přímky (osy)!

[Jsou-li $(0; n)$ pravoúhlé souřadnice počátku a $y = 0$ rovnice osy, platí $x = \sqrt{\xi^2 - (\eta - n)^2}$, $y = \eta$ a obráceně $\xi = \sqrt{x^2 + (y - n)^2}$, $\eta = y$; obecné dvojici $(\xi; \eta)$ odpovídají čtyři body. Co vyjadřují rovnice $\xi = k$, $\eta = k$, $\xi = \eta$, $\xi - k\eta = 0$ $(k = \text{konst.})$?]

8. Dokažte početně, že středové souřadnice přejdou v kosoúhlé, jestliže střed S se vzdálí do nekonečna po přímce OS!

[V rovnicích (2′) položte nejprve $n : m = \operatorname{tg} \omega$ a poté $\lim n \to \infty$; obdržíte rovnice, které platí pro přechod kosoúhlých souřadnic na pravoúhlé. Viz také 9. úlohu.]

9. Napište transformační rovnice, které platí mezi a) dvěma pravoúhlými soustavami, je-li čárkovaná k nečárkované na-

točena o úhel α, b) pravoúhlou soustavou a kosoúhlou, jestliže osa úseček kosoúhlé (čárkované) soustavy svírá úhel α s osou úseček pravoúhlé (nečárkované) soustavy, speciálně pro $\alpha = 0$!

[Za předpokladu, že počátky obou soustav splývají, obdržíme specialisací rovnic (3) a (4): a) $x = {}'x \cos \alpha - {}'y \sin \alpha$, $y = {}'x \sin \alpha + {}'y \cos \alpha$ a obráceně ${}'x = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, ${}'y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$, b) $x = {}'x \cos \alpha + {}'y \cos (\alpha + \omega)$, $y = {}'x \sin \alpha + {}'y \sin (\alpha + \omega)$ a obráceně ${}'x \sin \omega = x \sin (\alpha + \omega) - y \cos (\alpha + \omega)$, ${}'y \sin \omega = - x \sin \alpha + y \cos \alpha$, spec. $x = {}'x + {}'y \cos \omega$, $y = {}'y \sin \omega$ a obráceně ${}'x \sin \omega = x \sin \omega - y \cos \omega$, ${}'y \sin \omega = y$. Jak zní rovnice a), b) v případě, že počátky obou soustav jsou různé?]

10. V kosoúhlých souřadnicích vyjádřete obsah trojúhelníka s vrcholy $B_i (x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$!

$$[\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \omega]$$

11. V kosoúhlých souřadnicích vyjádřete a) tangentu úhlu, který svírá spojnice dvou bodů s osou $+ x$, b) vzdálenost přímky $ax + by + c = 0$ od počátku!

$$\left[\text{a)}\ \frac{(y_2 - y_1) \sin \omega}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos \omega},\ \text{b)}\ \frac{c \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}}\right]$$

12. V kosoúhlých souřadnicích napište rovnici kružnice, která a) prochází počátkem, b) dotýká se v počátku osy pořadnic, c) dotýká se obou souřadnicových os, d) prochází body (0; 0), (b; 0), (0; a)!

[a) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m'x + 2n'y = 0$; určete její střed a poloměr! b) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega \pm 2rx \sin \omega = 0$, c) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega \pm 2x\sqrt{p} \pm 2y\sqrt{p} + p = 0$ (čtyři kružnice), d) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega - bx - ay = 0$.]

13. Jak zní rovnice strofoidy v kosoúhlých souřadnicích?

[Vyjděme z výtvarného zákona této křivky, daného v středových souřadnicích rovnicí $\xi = \pm \eta$! Obdržíme tedy rovnici křivky, jestliže vyloučíme parametr λ z rovnice $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0$, která vyjadřuje svazek přímek o středu (a; 0), a z rovnice $x^2 + (y - \lambda)^2 + 2x (y - \lambda) \cos \omega - \lambda^2 = 0$, která vyjadřuje kružnice se středem (0; λ) a s poloměrem λ. Výsledek je $(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega)\, x - a (x^2 - y^2) = 0$. Přímky $x \pm y = 0$ jsou tečny křivky v počátku (dvojnásobném bodě), přímka $x + a = 0$ je její asymptota. Jak se tyto výsledky specialisují pro kolmou strofoidu?]

14. Budiž dána kružnice a na ní dva pevné body O a T; v bodě T sestrojme tečnu. Obecná přímka svazku o středu O protne kružnici v dalším bodě M, tečnu v bodě M'. Naneseme-li na tuto přímku úsečku $\overline{MM'}$ od bodu O i co do smyslu, vytvoří geometrické místo bodů B takto získaných ($\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MM'}$) t. zv. kosou kisoidu. Jaká je její rovnice v kosoúhlých souřadnicích?

[Bod O zvolme za počátek, přímku $\overrightarrow{OT}$ za osu $+ x$, rovnoběžku k tečně v bodě T za osu y. Daná kružnice má pak rovnici

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega - a(x + 2y \cos \omega) = 0, \quad (a = \overline{OT}),$$

přímka svazku budiž $y = \lambda x$ (λ parametr). Jestliže z této rovnice a z rovnice $x = a\left(1 - \dfrac{1 + 2\lambda \cos \omega}{1 + 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}\right)$, která platí podle sestrojení bodu B, vyloučíme parametr λ, nalezneme rovnici křivky ve tvaru $(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega)\, x - ay^2 = 0$. Leží-li body O, T na jednom průměru, je $\omega = \frac{1}{2}\pi$ a kosá kisoida přejde v kolmou (Dioklovu) kisoidu $(x^2 + y^2)\, x - ay^2 = 0$.]

15. V kosoúhlých souřadnicích napište výraz pro a) směrnici tečny $y' = \mathrm{d}y : \mathrm{d}x$, b) úhel τ, který svírá tečna s osou úseček, c) kosoúhlou subtangentu, d) kosoúhlou tečnu (délku tečny)!

[a) $y' = \sin \tau : \sin(\omega - \tau)$, b) $\operatorname{tg} \tau = y' \sin \omega : (1 + y' \cos \omega)$, c) $y : y'$, d) $y\sqrt{1 + 2y' \cos \omega + y'^2} : y'$.]

16. Interpretujte duálně větu: Dělicí poměr λ bodu $B\,(x;\,y)$ vzhledem k bodům $B_i\,(x_i;\,y_i)$, $i = 1, 2$ je $\lambda = \overrightarrow{BB_1} : \overrightarrow{BB_2}$, jeho pravoúhlé souřadnice jsou $x = (x_1 - \lambda x_2) : (1 - \lambda)$, $y = (y_1 - \lambda y_2) : (1 - \lambda)$!

[Dělicí poměr λ přímky $p\,[u;\,v]$ vzhledem k přímkám $p_i\,[u_i;\,v_i]$, $i = 1, 2$ je $\lambda = \sin(p, p_1) : \sin(p, p_2)$, její souřadnice jsou $u = (u_1 - \lambda u_2) : (1 - \lambda)$, $v = (v_1 - \lambda v_2) : (1 - \lambda)$.]

17. Totéž učiňte pro věty: a) spojnice bodů $(x_i;\,y_i)$, $i = 1, 2$ má rovnici $(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$, b) otáčí-li se přímka $y = kx + q$ kolem bodu $(x_0;\,y_0)$, je její rovnice $y - y_0 = k(x - x_0)$, c) dvě přímky $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2$ protínají se v bodě s kartézskými souřadnicemi $x = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$, $y = (a_2 c_1 - a_1 c_2) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$;

nutná a postačující podmínka, aby byly rovnoběžné, zní $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, d) aby tři přímky $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ se protínaly v jediném bodě, je nutné a stačí, když

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[a) průsečík dvou přímek $[u_i; v_i]$ má rovnici $(v - v_1)(u_2 - u_1) - (u - u_1)(v_2 - v_1) = 0$, b) probíhá-li bod $v = ku + q$ přímkou $[u_0; v_0]$, je jeho rovnice $v - v_0 = k(u - u_0)$, c) dva body $a_iu + b_iv + c_i = 0$ určují přímku o souřadnicích $u = (b_1c_2 - b_2c_1) : (a_1b_2 - a_2b_1)$ atd., d) napsaný vztah je nutná a postačující podmínka, aby tři body $a_iu + b_iv + c = 0$ ležely v přímce.]

18. Jak se transformují přímkové souřadnice v případě, že obě soustavy jsou pravoúhlé a počátky splývají?

[Transformací přímky $ux + vy + 1 = 0$ podle úlohy 9a) nalezneme: $'u = u\cos\alpha + v\sin\alpha$, $'v = -u\sin\alpha + v\cos\alpha$ a obráceně $u = 'u\cos\alpha - 'v\sin\alpha$, $v = 'u\sin\alpha + 'v\cos\alpha$. Jaký tvar mají tyto rovnice v případě, že počátky obou soustav jsou různé? Jak je vyjádřena nejobecnější transformace přímkových souřadnic?]

19. Tečnovou rovnici kružnice se středem v počátku odvoďte přímo na základě vlastnosti, že její tečny mají od počátku touž vzdálenost!

$\left[\text{Vzdálenost přímky od počátku je } \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}!\right].$

20. Jak zní tečnová rovnice kružnice o středu $(m; n)$ a poloměru r?

$[(mu + nv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0]$

21. Odvoďte tečnové rovnice elipsy, hyperboly a paraboly v základních polohách!

$[a^2u^2 \pm b^2v^2 - 1 = 0,\ pv^2 - 2u = 0.]$

22. Dokažte, že přímková (tečnová) rovnice čar

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0 \quad (a, b, n \text{ konstanty})$$

(slují křivky Laméovy) zní

$$(-au)^{\frac{n}{n-1}} + (-bv)^{\frac{n}{n-1}} - 1 = 0!$$

Co vyjadřuje tato rovnice pro $n = 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (také pro $a = b$)? Jak zní rovnice polárně reciproké křivky vzhledem ke kružnici (7)? Vyslovte výsledek větou!

[Pro $n = 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ obdržíme přímku, hyperbolu (jakou?), elipsu (hyperbolu, jestliže místo b položíme ib, $i = +\sqrt{-1}$; kružnici pro $a = b$), parabolu (jakou?), evolutu elipsy (hyperboly; speciálně pro $a = b$ astroidu). Polárně reciproká křivka je opět Laméova křivka, ale s jinými konstantami.]

23. Jak zní přímková (tečnová) rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0?$$

[$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$, při čemž $A_{ik} = A_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ jsou doplňky diskriminantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.]$$

24. Jak zní přímková rovnice křivky, jejíž tečny a) omezují se souřadnicovými osami trojúhelník stálého obsahu, b) vytínají na souřadnicových osách úsečky o konstantním α) součtu, β) rozdílu, γ) součinu, δ) podílu!

[a) $kuv - 1 = 0$ čili $4xy - k = 0$, kde k je dvojnásobný obsah (hyperbola), b) $v + \varepsilon u + kuv = 0$ čili $\varepsilon (k - x - \varepsilon y)^2 = 4xy$, kde k je daný součet ($\varepsilon = +1$) nebo rozdíl ($\varepsilon = -1$); viz úlohu a); $v - ku = 0$ (co to znamená?). Vyšetřete kuželosečky sub α), β)!]

25. Kdy jsou křivky a) $b^2x^2 \pm a^2y^2 - 1 = 0$, b) $y^2 - 2px = 0$, c) $xy - k = 0$ autopolární vzhledem ke kružnici (7), t. j. kdy základní křivka splyne s křivkou polárně reciprokou?

[a) $a = b = \sqrt[4]{1}$, kružnice $x^2 + y^2 = \pm 1$, b) $p = \pm 1$, c) $k = \pm \frac{1}{2}$. Vyložte podrobněji!]

26. Co vyjadřuje v úsekových souřadnicích rovnice $apq + bp + cq + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)?

[Kuželosečku $(bx + cy + d)^2 - 4(bc - ad)\, xy = 0$, která se dotýká souřadnicových os. Vyšetřete případy $a = 0$ resp. $bc - ad = 0$!]

27. Jak souvisí normální resp. axiální souřadnice s Plückerovými?

[$u = -\cos t : f$, $v = -\sin t : f$ a obráceně $f = 1 : \overset{+}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $t = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$ resp. $u = -1 : p$, $v = -\operatorname{tg} t : p$ a obráceně $p = -1 : u$, $t = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$.]

28. Jak zní pravoúhlé rovnice křivky, vyjádřené rovnicemi (8), jestliže f resp. p jsou funkcemi parametru t?

[Na základě rovnic, podle nichž se transformují přímkové souřadnice na bodové, nalezneme parametrické vyjádření $x = f(t) \cos t - f'(t) \sin t$, $y = f(t) \sin t + f'(t) \cos t$ resp. $x = p(t) - p'(t) \sin t \cos t$, $y = p'(t) \cos^2 t$, kde $f'(t) = \mathrm{d}f : \mathrm{d}t$, $p'(t) = \mathrm{d}p : \mathrm{d}t$.]

29. Jak zní normální resp. axiální rovnice a) kružnice, b) astroidy, c) geometrického místa pat kolmic spuštěných s počátku na tečny dané křivky (t. zv. úpatnice dané křivky vzhledem k počátku), d) křivky, jejíž tečny mají stále touž vzdálenost h od tečen dané křivky (t. zv. křivka paralelní k dané)?

[a) Střed $(m; n)$, poloměr r, $f = m \cos t + n \sin t + r$ resp. $p = m + n \operatorname{tg} t + r \sec t$, b) $p^2 + q^2 = a^2$, tedy $f = \frac{1}{2} a \sin 2t$ resp. $p = a \sin t$, c) $x = f \cos t$, $y = f \sin t$ resp. $x = p \cos^2 t$, $y = p \sin t \cos t$; proveďte výpočet pro astroidu (výsledkem je t. zv. čtyřlistá růžice, sestrojte ji!), d) $f_1 = f \pm h$ resp. $p_1 = p \pm h \sec t$.]

30. Jak zní rovnice normály křivky v souřadnicích normálních resp. axiálních?

[Souřadnice normály jsou $f'(t)$, $\frac{1}{2}\pi + t$ resp. $p(t) - p'(t) \operatorname{cotg} t$, $\frac{1}{2}\pi + t$.]

31. Určete nevlastní body hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0$!

[Leží na asymptotách $bx \pm ay = 0$ dané křivky.]

32. Jak zní rovnice tečny kuželosečky v obecné poloze?

[Kuželosečka má rovnici $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$; tečna je dána rovnicí (14).]

33. Užívajíce výsledku předchozí úlohy, udejte podmínku, aby obecná přímka byla tečnou obecné kuželosečky!

[Srovnáním koeficientů v rovnicích $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) X + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z) Y + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z) Z = 0$ a $aX + bY + cZ = 0$ nalezneme podmínku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.]$$

34. Na základě výsledku předchozí úlohy napište rovnici kuželosečky v homogenních přímkových souřadnicích:

$$[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0]$$

35. Kdy je obecná kuželosečka parabolou?

[Dotýká-li se nevlastní přímky; je tedy nutné a stačí, když $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.]

36. Jsou-li $P = 0$, $Q = 0$ rovnice dvou přímek, co vyjadřuje rovnice $P^2 + \lambda Q = 0$, kde λ je proměnný parametr?

[Určete vztah k nevlastní přímce! Je to soustava parabol se společnou osou $P = 0$.]

37. Kartézská souřadnicová soustava je zvláštním případem obecné nomografické soustavy. Dokažte!

[$P \equiv Q \equiv O$, Q_1 resp. P_1 jsou nevlastní body os p resp. q.]

38. Které jsou obyčejné nomografické souřadnice a) počátků, b) os?

[a) $P\,(0; q)$, $Q\,(p; 0)$, kde p, q jsou libovolná čísla, b) $\frac{1}{q} = 0$ resp. $\frac{1}{p} = 0$.]

39. Kterou rovnicí je v obyčejných nomografických souřadnicích vyjádřena obecná přímka? Jakou rovnici má přímka nevlastní?

[$apq + bp + cq = 0$ (a, b, c konstanty). Které přímky jsou vyjádřeny touto rovnicí pro $b = 0$, $c = 0$, $a = 0$, $b = c = 0$, $a = c = 0$, $a = b = 0$? $p + q = 0$.]

40. Co vyjadřuje v obyčejných nomografických souřadnicích rovnice

$$apq + bp + cq + d = 0 \quad (a, b, c, d \text{ konstanty})?$$

[Kuželosečku, jdoucí body P, Q; její rovnice v kosoúhlých souřadnicích je $dx^2 - (b - c)\,lxy - al^2y^2 - dlx - cl^2y = 0$.]

41. Co vyjadřuje předchozí rovnice pro a) $b = c = 0$, b) $b = c$, $a = 0$?

[a) $pq = k$; kuželosečku dotýkající se nomografických os v počátcích. Vyšetřete ji podrobněji! Vyslovte větou geometrickou vlastnost, vyjádřenou nomografickou rovnicí této kuželosečky! b) $p + q = k$; parabolu, jdoucí nomografickými počátky P, Q! Vyšetřete ji podrobněji!]

42. Co vyjadřuje rovnice v 40. úloze pro $d = 0$? Udejte nutné a postačující podmínky, aby rovnice v 40. úloze vyjadřovala kružnici!

[Složenou kuželosečku; za předpokladu, že $d \neq 0$, dostaneme složenou kuželosečku také pro $bc - ad = 0$. $al^2 = -d$, $(c - b)l = 2d \cos \omega$.]

43. Prozkoumejte pravoúhlé nomografické souřadnice bodu! Které čáry jsou vyjádřeny rovnicemi a) $apq + bp + cq + d = 0$, b) $pq + m(p + q) - l^2 = 0$, c) $pq = \pm k^2$ a speciálně pro $k = l$, d) $p + q = k$?

[a) kuželosečka; vyšetřete ji podrobněji! b) kružnice, c) středová kuželosečka, speciálně kružnice a rovnoosá hyperbola, d) parabola.]

44. Jak se transformují obyčejné nomografické souřadnice přímky na a) kosoúhlé, b) pravoúhlé souřadnice přímky?

[a) $-1 : v = s$, $-1 : u = ls : (s - t)$, b) $-1 : u = ls : (s - t)$, $-1 : v = ls \sin \omega : [l + (t - s) \cos \omega]$. Jak zní tyto rovnice obráceně?]

45. Napište podmínku incidence v obyčejných nomografických souřadnicích!

$$\left[\frac{s}{p} + \frac{t}{q} - 1 = 0\right]$$

46. Které jsou nomografické souřadnice spojnice bodů (p_i, q_i), $i = 1, 2$? Odvoďte odtud nomografické souřadnice tečny křivky $F(p, q) = 0$ a nomografické souřadnice dotykového bodu tečny ke křivce $F(s, t) = 0$!

$$\left[\left[-\frac{p_1 p_2 (q_1 - q_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}; -\frac{q_1 q_2 (p_1 - p_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}\right],\right.$$
$$\left.\left[\frac{p^2\,\mathrm{d}q}{p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p}; -\frac{q^2\,\mathrm{d}p}{p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p}\right], \left(s - t\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; t - s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).\right]$$

47. Co vyjadřuje v obyčejných nomografických souřadnicích rovnice

$$ast + bs + ct + d = 0 \ (a, b, c, d \text{ konstanty})?$$

[Kuželosečku; vyšetřete ji podrobněji!]

48. Křivku z 47. úlohy vyšetřete podrobněji v případě, že nomografická soustava je pravoúhlá. Jak zní rovnice této křivky v souřadnicích Plückerových?

[$dv^2 - cluv - (b + c)v + alu + a = 0$; vyšetřete některé zvláštní případy!]