

O souřadnicích v rovině

I. Historický nástin

In: Zdeněk Pírko (author): O souřadnicích v rovině. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1942. pp. 5–12.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403008>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

I.

HISTORICKÝ NÁSTIN.

A. Podle způsobu, kterým řešíme geometrickou úlohu, rozlišujeme dvě základní metody: syntetickou a analytickou. První metoda studuje geometrický útvar sám o sobě a tímto studiem dospívá k novým poznatkům. Naproti tomu druhá metoda definuje sice útvar geometricky, jistým způsobem mu však přiřazuje čísla, aby mohla z něho vyvoditi početní vztahy. Na vztahy takto získané pak používá prostředků algebry a analýsy a výsledky, které tímto způsobem získává, interpretuje opět geometricky. Jde tedy při použití analytické metody o tři zřetelně oddělená stadia, geometrické, početní (analytické) a znovu geometrické.⁷⁾ Princip, který umožňuje přejítí od geometrie k algebře (analýsi) a zpět, nazývá se princip souřadnic (koordinát).

I rozumíme nejobecněji souřadnicovou soustavou souhrn oněch pravidel, podle nichž přiřazujeme geometrickým prvkům čísla. Odtud také jiný často používaný název pro geometrii, pracující s analytickou metodou (analytickou geometrii): geometrie souřadnicová (koordinátní). Samozřejmě, že pravidla pro přiřazení mohou býti velmi rozmanitá, a to i tehdy, když požadujeme, aby byly splněny jisté základní předpoklady. O nich budeme mluvit podrobněji v dalším výkladu. A opravdu také průběhem doby vznikly velmi četné souřadnicové soustavy; v rámci této knížky chceme se omeziti jen na nejznámější soustavu rovinné.

Hned od počátku musíme však zdůrazniti, že by pouhým vynalézáním rozmanitých souřadnicových soustav geometrie

⁷⁾ Skládají se tedy tato tři stadia z aritmetisace geometrického útvaru, z početního (analytického) zpracování aritmetických vztahů z útvaru vyvozených a konečně z geometrisace nabytých výsledků. Je však myslitelný ještě jiný postup, bez prvního pracovního úseku, způsob, který záleží v geometrisaci výsledků početních (analytických) úvah. Tímto stručnějším postupem se řídí na př. algebraická geometrie. Pro ni tedy představuje geometrický útvar spíše jakousi ilustraci. Pro elementární analytickou geometrii, která vychází z geometrického názoru — i když v geometriích vícerozměrných pozbývá tento konkrétnost — je však základem.

získala velmi málo. Souřadnice jsou jen prostředkem geometrického badání, nikoliv snad jeho účelem; setkáme-li se tudíž s nějakou souřadnicovou soustavou, měli bychom se nejprve ptáti, zda a v jaké míře se ukázala plodnou pro rozvoj geometrie. A jen takové soustavy, jejichž použitím byla geometrie obohacena, chceme uvést v této knížce. Při jejím omezeném rozsahu bude se snad leckdy tato „vynalézací schopnost“ zdát čtenáři skryta. Proto, bude-li se chtít seznámit s významem takové soustavy hlouběji, musí studovati další díla. Výběr z nich je uveden na konci knížky.

B. Původ souřadnic můžeme hledati v astronomii. U slavné dvojice starověkých astronomů, Hipparcha a Klaudia Ptolemaia (oba žili ve II. století př. Kr.), se shledáváme se způsobem, který umožňuje určití polohu hvězdy na světové kouli pomocí dvou úhlů odměřovaných od dvou základních kružnic (obzorňkové souřadnice). Důsledně přenesení tohoto způsobu nejprve na zeměkouli (zeměpisné souřadnice) a poté jeho přizpůsobení pro rovinu dalo však na sebe čekati ještě velmi dlouho. Nezapomeňme při tom však, že již v III. století př. Kr. se setkáváme nejméně u dvou proslulých geometrů starověku, Archimeda a Apollonia, se zřejmými stopami souřadnicové soustavy, která je v podstatě totožná s dnešní kartézskou soustavou. Apollonios z Pergy napsal osm knih o kuželosečkách („Konika“), z nichž se nám dochoval řecký text první až čtvrté knihy, arabský text páté až sedmé knihy, kdežto obsah osmé knihy je známý jen z poznámek Pappových. Tam uvádí některé metrické vlastnosti kuželoseček, ovšem jen slovy, které souvisí s vlastnostmi těchto čar, vztažených ke sdruženým průměrům jako souřadnicovým osám kartézské soustavy.

Na základní myšlenku kartézské soustavy narážejí ve svých pracích dva francouzští matematikové, v XIV. století Nicole Oresme (latinis. Oresmes; zemřel 1382), v XVI. století François Viète (latinis. Vieta; zemřel 1603); první při grafickém znázorňování přírodních dějů (ve spise „Tractatus de latitudinibus formarum“), druhý při označování bodů a přímek číslly (ve spisech „Isagoge in artem analyticam“ a „Ad logistice speciosam notae priores“). Jinak však po celý středověk se ryze geometrický význam souřadnic ztrácí. Soustavně vybudování souřadnicové geometrie zůstává vyhrazeno teprve dvěma matematikům, žijícím na přelomu mezi středověkem a novověkem, Descartesovi a Fermatovi.

René Descartes (latinis. Renatus Cartesius, 1596—1650), francouzský filosof, aktivní účastník bitvy na Bílé hoře (ve

vojsku Maximiliána Bavorského), je obecně považován za skutečného zakladatele analytické metody v geometrii. Stal se jím anonymním spiskem „Géométrie“, který vyšel roku 1637 v Leydenu jako dodatek k jeho slavnému dílu „Discours de la méthode“; díky to rozšířilo se v tehdejších vzdělaném světě, když v roce 1649 přeložil Franciscus van Schooten do latiny („Geometria a Renato des Cartes anno MDCXXXVII Gallice edita etc.“). Po právu musíme uvést, že myšlenku analytické geometrie v celé její šíři již před Descartesem pojal Pierre de Fermat (1602—1665), považovaný často za největšího matematika Francie, a máme-li být spravedliví, musíme přiznat, že tak v leckterém ohledu učinil dokonaleji a podrobněji než Descartes. Avšak výsledky jeho prací byly publikovány (ve spise „Ad locos planos et solidos isagoge“) teprve po jeho smrti (1679), kdy prioritá vynálezu analytické metody byla již přiznána Descartesovi.

Souřadnice, které zavedl Descartes, nazýváme dnes kartézskými souřadnicemi bodu; byly obecně kosoúhlé. S počátku byly jmenovány různě; dnešní jejich názvy, úsečka (abscisa) a pořadnice (ordináta) zavedl roku 1692 v časopise „Acta Eruditorum“ slavný německý filosof a polyhistor Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

Descartesem a Fermatem počíná se tedy analytická geometrie. V XVIII. století vznikají pak nejméně tři klasická díla, která představují vyvrcholení analytické metody v tomto prvním období. „Enumeratio linearum tertii ordinis“ (1706) geniálního anglického matematika a fyzika Isaaca Newtona (1643—1727) patří k nejstarším aplikacím kartézských souřadnic vůbec, „Introductio in analysin infinitorum“ (1748) německého matematika Leonharda Eulera (1707—1783), jednoho z nejslavnějších matematiků všech dob, obsahuje mimo jiné také dokonale utříděnou analytickou geometrii kuželoseček, a konečně „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques“ (1750) švýcarského matematika Gabriela Cramera (1704—1752) přehledně shrnuje a doplňuje všechny posavadní poznatky.

C. Dvě stě let po Descartesovi a Fermatovi německý geometr Julius Plücker (1801—1868), považovaný právem za zakladatele moderní analytické geometrie, dává geometrii v kartézských souřadnicích dnešní podobu. Plückerův přínos je velmi rozsáhlý. Je původcem symbolického počítání v analytické geometrii, zavádí kartézské souřadnice přímky a uplatňuje tak princip duality, známý dosud jen v syntetické geometrii, také analyticky. Z jeho knižních prací o analytické geometrii v ro-

vině sluší uvésti „Analytisch-geometrische Entwicklungen“ (2 svazky, 1828—1831), „System der analytischen Geometrie“ (1835) a „Theorie der algebraischen Kurven“ (1839). Plücker je také předním tvůrcem t. zv. trojúhelníkových souřadnic. Na tomto poli však nesmíme zapomenouti jeho předchůdce; je jím August Ferdinand Möbius (1790—1868), německý matematik a astronom, který ve spise „Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie“ (1827) ukázal na výhody použití zvláštního druhu trojúhelníkových souřadnic, jež nazývá barycentrickými.

Zavedením homogenních kartézských souřadnic a důsledným použitím teorie determinantů dodal analytické geometrii ráz zvláštní elegance jiný německý geometr, Otto Ludwig Hesse (1811—1874). Analytické geometrie v rovině týká se také jeho nejznámější spis „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene“ (1868).

Mohutný impuls pro rozvoj analytické geometrie představuje od počátku XIX. století projektivní geometrie. Proslulým spísem „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) klade francouzský vojenský geometr Jean Victor Poncelet (1788—1867) její syntetické základy. O vybudování analytické teorie projektivní geometrie mají přední zásluhu dva němečtí geometrové, Karl Georg Christian von Staudt (1798—1867) a Otto Wilhelm Fiedler (1832—1912), který po jeden čas byl také profesorem na pražské polytechnice. Pojem trojúhelníkových souřadnic, v metrickém ohledu propracovaný Plückerem, přenesl v. Staudt. do geometrie projektivní (ve spise „Beiträge zur Geometrie der Lage“, 1857); o podrobný výklad a propracování projektivních souřadnic zasloužil se Fiedler do té míry (pojednáním ve „Vierteljschr. d. Naturforsch. Ges. Zürich, 15, 1870), že často bývají tyto souřadnice zvány Fiedlerovými.

Rozvoj grafického počtu v druhé polovině minulého století, především zásluhou francouzského matematika Maurice d'Ocagne (1862—1938), vedl k několikerému zobecnění kartézských souřadnic. Soustavy souřadnicové, které tímto způsobem vznikly, obvykle zahrnujeme do t. zv. skupiny souřadnic nomenografických. Jejich zvláštním případem jsou souřadnice duální ke kartézským, k nimž nezávisle na sobě dospěli Unverzagt (v Progr. d. Realgymn. Wiesbaden, 1871), Scherwering (ve spise „Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten usw.“, 1884) a d'Ocagne (ve spise Coordonnées parallèles et axiales“, 1885, ale již předtím v časopiseckých pojednáních); po všech

těchto autorech bývají také tyto speciální nomografické souřadnice nazývány. Jiné zobecnění kartézských souřadnic (středové souř. bodu), které uvádíme v dalším textu, pochází od českého geometra Vincence Jarolímků (1846—1921; v knize „Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné“, 1876).

Také rozvoj jiných odvětví geometrie v druhé polovině minulého století, zejména geometrie diferenciální, vedl k vynalezení nových souřadnicových soustav. V této knize se zmiňujeme o dvou druzích přímkových souřadnic, odvozených v podstatě z přímkových souřadnic definovaných Plückerem. T. zv. normálních souřadnic přímky použil anglický matematik Hiern (v *Quart. Journ. Math.*, 6, 1864); rovnici křivky, v těchto souřadnicích vyjádřenou, však nazývá magickou rovnicí („the magical equation to the tangent of a curve“). Tento způsob vyjádření křivky vešel v širší známost teprve roku 1869, vydáním známé Serretovy učebnice („Cours de calcul différentiel et intégral“), která tyto úvahy rozšířila. T. zv. axiálních souřadnic přímky použil jako první francouzský matematik Aoust (v dosud plně nedoceněné knize „Analyse infinitésimale des courbes planes“, 1873). Použití obou těchto druhů souřadnic ukázalo se velmi plodným při řešení rozmanitých úloh diferenciální geometrie rovinných křivek.

D. Při řešení jisté geometrické úlohy, kterou v „Acta Eruditorum“ roku 1691 podal švýcarský matematik, fysik a teolog Jacques Bernoulli (v genealogii proslulého matematického rodu Bernoulliů označovaný jako Jacques I.; 1654—1705), se poznalo, že pravoúhlou kartézskou soustavu lze přesně nahraditi t. zv. souřadnicemi polárními. Tato soustava opravdu se objevila velmi vhodnou pro řešení čtených úloh analytické a diferenciální geometrie a stala se prvním zástupcem rozsáhlé skupiny t. zv. křivočarých souřadnic. Za soustavné vybudování a použití nových souřadnic vděčíme pak vůdčímu duchu německých matematiků v první polovině XIX. století, Karlu Friedrichu Gaussovi (1777—1855; ve spise „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, 1828).

U dvou druhů křivočarých souřadnic můžeme hledati původ stejně ve fysice jako v geometrii. T. zv. souřadnice eliptické, jejichž stopy ostatně nacházíme již u Eulera, soustavně vybudoval a použil francouzský matematik a fysik Gabriel Lamé (1795—1870; v pojednání „Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température“, předloženém roku 1833 pařížské Akademii). S t. zv. bipolárními souřadnicemi se pak setkáváme u geometrů i fysiků již v polovině minulého století; určení skuteč-

ného tvůrce těchto souřadnic a jejich prvního použití je však obtížné.

Všechny druhy souřadnicových soustav, které jsme doposud uvedli — až na souřadnice projektivní — lze vyjádřit jako funkce souřadnic kartézských. Kromě toho všechny tyto soustavy za základní geometrický prvek pokládají bod nebo přímku. Jsou ovšem myslitelné i jiné takové soustavy, jejichž základním prvkem bude složitější geometrický útvar. Tak na př. u tetracyklických souřadnic, které do geometrie zavedl francouzský matematik Jean Gaston Darboux (1842—1917; ve spise „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques“, 1873), je základním prvkem kružnice a bod se tu vyjadřuje jako kružnice s poloměrem rovným nule.

O všech soustavách, které jsme zatím uvedli jejich názvy v stručném historickém nástínu, budeme také podrobněji pojednávati v dalších odstavcích této knížky. Ale všechny speciální rovinné soustavy, které průběhem doby došly v geometrii významného uplatnění, jimi ani zdaleka nevyčerpáme. Nebudeme tu na př. jednati o rozsáhlé skupině t. zv. přirozených souřadnic, jejichž předním budovatelem je italský matematik Ernesto Casàro (1859—1906; viz jeho spis „Lezioni di geometria intrinseca“, 1895). S použitím přirozených souřadnic lze hledati a studovati vlastnosti geometrických útvarů, které se týkají na př. jen jejich tvaru a nezávisí na poloze útvaru (t. zv. geometrie přirozená).

A ještě jedno podstatné omezení si ukládáme v této knížce: budeme si tu všímati jen reálných geometrických útvarů, útvary nikoliv reálné ze svých úvah vyloučíme. Rozsah probírané látky se tak neobyčejně zúží.

E. Uváděti české pracovníky v nauce o souřadnicích znamenalo by psáti dějiny analytické geometrie u nás; tak úzce jsou tyto snahy spjaty spolu. Přestaneme proto na stručném výčtu těch matematiků, kteří se ve větší míře zabývali analytickou geometrií (a také diferenciální a kinematickou geometrií), a opomineme ty, kdož pěstovali převážně geometrii syntetickou (geometrii deskriptivní).

A tu snad na prvním místě třeba uvést Gustava Skřivana (1831—1866), profesora na technice v Praze, který je autorem první české učebnice analytické geometrie („Základy analytické geometrie v rovině“, 1864). Teprve za deset let druhým dílem doplnil tuto učebnici František Josef Studnička (1836—1903), profesor pražské university („Úvod do analytické geometrie v prostoru“, 1874), který také později napsal samostatnou učebnici analytické geometrie v rovině („Úvod do analytické geo-

metrie v rovině“, 1902). Výběrem látky i metodou všechny tyto knihy již zastaraly.

V analytické i syntetické (projektivní) geometrii vysoko vynikli bratři Emil Weyr (1848—1894), profesor vídeňské university, a Eduard Weyr (1852—1903), profesor na universitě v Praze. Z nich první je autorem „Základů vyšší geometrie“ (3 svazky, 1871—1878), druhý autorem „Projektivné geometrie základných útvarů prvního řádu“ (první vydání 1898), učebnice to, která ještě dnes udržela si znamenitou úroveň. Jiná dvojice bratří, kteří pracovali v geometrii čar a ploch, jsou Josef Silvestr Vaněček (1848—1922), středoškolský profesor, autor první české učebnice kinematické geometrie („Pošínování geometrických útvarů“, 1880) a prvního katalogu speciálních čar v světové matematické literatuře vůbec („Křivé čáry rovinné a prostorové“, 1881), a Matěj Norbert Vaněček (1859—1922), profesor pražské techniky, častý spolupracovník předchozího. Nedokončená učebnice analytické geometrie, moderně založená, pochází od jiného vynikajícího geometra, Karla Zahradníka (1848—1916), profesora techniky v Brně („Analytická geometrie. I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček“, 1907).

Ze středoškolských profesorů, kteří se uplatnili v analytické geometrii, sluší uvést Aloise Strnada (1852—1911), Františka Machovce (1855—1892; syntetické geometrii věnoval knihu „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek“, 1883) a záhy zesnulého Theodora Monina (1858—1893), autora jediné snad knižně vydané české práce o souřadnicích („O některých druzích souřadnic projektivických“, 1889).

Nejbližší generaci českých geometrů stál v čele Jan Sobotka (1862—1931), profesor pražské university, přední odborník v geometrii syntetické (deskriptivní), autor rozsáhlé učebnice diferenciální geometrie („Diferenciální geometrie“, 3 svazky, 1909—1914). Antonín Pleskot (1866—1939), středoškolský profesor, vynikl v analytické a diferenciální geometrii čar (speciálně kuželoseček) a ploch, Bohumil Machytka (1890—1928), docent university a techniky v Praze, uplatnil se zejména v teorii geometrických transformací.

Z generace žijících geometrů třeba jmenovati Bohumila Bydžovského (nar. 1880), profesora pražské české university, autora vynikajícího „Úvodu do analytické geometrie“ (1923), Eduarda Čecha (nar. 1883), profesora brněnské české university, spoluzakladatele projektivní diferenciální geometrie (jeho český spis „Projektivní diferenciální geometrie“ vyšel roku 1926), Václava Hlavatého (nar. 1894), profesora university v Praze, autora „Úvodu do neuklidovské geometrie“ (1926) a „Diferen-

ciální geometrie křivek a ploch a tensorového počtu (1937), Bohuslava Hostinského (nar. 1884), profesora brněnské university, autora „Diferenciální geometrie křivek a ploch“ (1915) a Jana Vojtěcha (nar. 1879), profesora techniky v Praze, autora rozsáhlé a významné „Geometrie projektivní“ (1932). A vedle nich je u nás ještě řada mladých a nejmladších pracovníků, kteří přispívají k rozvoji geometrie.⁸⁾

⁸⁾ Dokonalý přehled o vývoji geometrie u nás poskytují svazky „Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky“, vydávaného Jednotou českých matematiků a fyziků v Praze.