Tak na př.:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1f_1 + b_1g_1 + c_1h_1 & a_2f_1 + b_2g_1 + c_2h_1 & a_3f_1 + b_3g_1 + c_3h_1 \\ a_1f_2 + b_1g_2 + c_1h_2 & a_2f_2 + b_2g_2 + c_2h_2 & a_3f_2 + b_3g_2 + c_3h_2 \\ a_1f_3 + b_1g_3 + c_1h_3 & a_2f_3 + b_2g_3 + c_2h_3 & a_3f_3 + b_3g_3 + c_3h_3 \end{vmatrix}.$$

Ověřte si správnost tohoto pravidla vynásobením!

U determinantu řádu druhého proveďme jako příklad:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1f_1 + b_1g_1 & a_2f_1 + b_2g_1 \\ a_1f_2 + b_1g_2 & a_2f_2 + b_2g_2 \end{vmatrix}.$$

Na pravé straně je

$$\begin{aligned} (a_1f_1 + b_1g_1)(a_2f_2 + b_2g_2) &- (a_1f_2 + b_1g_2)(a_2f_1 + b_2g_1) = \\ &= a_1f_1(a_2f_2 + b_2g_2) - a_1f_2(a_2f_1 + b_2g_1) + \\ &+ b_1g_1(a_2f_2 + b_2g_2) - b_1g_2(a_2f_1 + b_2g_1) = \\ &= f_1g_2(a_1b_2 - a_2b_1) - f_2g_1(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (f_1g_2 - f_2g_1)(a_1b_2 - a_2b_1), \end{aligned}$$

což je skutečně levá strana.

Závěrem o determinantech si vytkněme, že ve svých úvahách budeme používat vesměs determinantu třetího stupně, jehož hodnota je rovna nule a v němž podle předchozích vět budeme a smíme provádět tyto dovolené změny (t. j. aniž hodnota determinantu přestane být nulová):

1. zaměnit libovolně pořadí sloupců (věta a),
2. násobit nebo dělit řádky a sloupce libovolným číslem nenulovým (věta c resp. g),
3. sloupce neb násobky sloupců spolu sčítat i odčítat (věta e),
4. dělit determinant kterýmkoliv sloupcem nenulovým (věta d), a konečně
5. násobit determinant $D = 0$ determinantem nenulovým $D' \neq 0$ (věta g).

Hodnotu determinantu budeme nejlépe vypočítávat rozvedením podle prvků jedné řady (zvláště pak té, v níž některé prvky jsou nulové), viz vzorec (3).

Zopakujme, že všechny uvedené věty (až na pravidlo Sarrusovo) platí i pro determinanty stupně vyššího.

Příklady pro cvičení.

(Většinou jsou doplněny návody, jak by bylo možné vztah zobrazit.)

$$\mu - \lambda\delta^2 + \frac{\delta}{\operatorname{tg}\delta} = 0.$$

Vztah, z něhož počítáme hodnotu δ potřebnou k výpočtu kritických otáček torsních zalomených hřídelů, řadových strojů pístových; $\langle 0; 2{,}0\rangle$.

$\mu = \dfrac{\Theta_{01}}{\Theta_2}$ rovná se poměru hmot setrvačníku Θ_2 a setrvačných hmot stroje samotného Θ_{01} (zalomeného hřídele, ojnic, pístů, atd.); $\langle -1; 1\rangle$,

$\lambda = \dfrac{l_{12}}{l_{01}}$ je poměr reduk. délek zalomeného hřídele l_{01} a délky hřídele mezi setrvačníkem a motorem l_{12}; $\langle 0; 1{,}2\rangle$.

*

$$R = 3{,}4 + 0{,}118V + 0{,}03\,\frac{V^2}{P}$$

přibližný vzorec pro celkový odpor vlaku.
V $\langle 20; 150\rangle$ rychlost vlaku v km/hod.,
P $\langle 100; 500\rangle$ váha lokomotivy a tendru v tunách,
R je odpor v kg na táhnutou tunu.

*

Z dělostřelby známý svahový koeficient je udán vzorcem

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

α $\langle 0; 60°\rangle$, β $\langle 0; 45°\rangle$.
(Upravte na $\dfrac{1}{\lambda} - \operatorname{cotg}\alpha\sin\beta - \cos\beta = 0$. Relace: $\lambda = 1$, $\alpha = 90 - \dfrac{\beta}{2}$.)

*

Světelný dosah majáku je udán Allardovou formulí

$$100La^d = d^2.$$

d $\langle 0{,}5; 100\rangle$ světelný dosah v km,
L $\langle 0{,}005; 100\rangle$ intensita svítivosti majáku,
a $\langle 0{,}25; 1\rangle$ koeficient průhlednosti prostředí.

(Po logaritmování srovnáme s tvarem K_1. Uvažte, jaký význam pro zobrazení má okolnost, že formuli lze upravit libovolnou nenulovou konstantou na $100\,(\lambda^2 L)\,.\,(a^{1/\lambda})^{\lambda d} = (\lambda d)^2$! Relace: $a = 1$, $d = 10\sqrt{L}$.)

*

$$M = E - e \,.\, \sin E$$

z astronomie známá rovnice Kepplerova, udávající střední anomalii M v závislosti na excentrické anomalii E a numerické výstřednosti e eliptické dráhy zemské.

$$M, E \,\langle 0;\, 2\pi \rangle,\; e \,\langle 0;\, 0{,}4 \rangle.$$

(Podle K_1. V nomogramu lze stupnice M i E číslovat ve stupních. Relace: $e = 0$, $M = E$!)

*

Má-li se z kruhové destičky o průměru x vylisovat nábojka o průměru d a výšce v, je souvislost mezi těmito rozměry udána vzorcem

$$x = \sqrt{d^2 + 4d\,.\,v}.$$

Zobrazte pro rozsahy $d\,\langle 5;\, 150 \rangle$ mm, $h\,\langle 5;\, 150 \rangle$ v mm a $x\,\langle 5;\, 150 \rangle$ mm. (Umocní se, pak podle K_1. Soustavně vyhledávanou je x, umístěte ji proto mezi stupnice d a v. Zlepšete nákres vhodnou kolineací!)

*

Váha jednoho litru suchého vzduchu v gramech je dána vzorcem

$$V = \frac{1{,}293p}{760} \cdot \frac{273}{273 + t}.$$

$p\,\langle 700;\, 800 \rangle$ tlak v mm Hg,
$t\,\langle -20;\, 40 \rangle$ teplota ve °C.
(Podle K_2, K_3 nebo K_4.)

*

Přibližný vzorec Vallotův pro vodovodní potrubí:

$$D = 0{,}324 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)^{\frac{3}{8}}.$$

D průměr potrubí v m $\langle 0{,}01;\, 3 \rangle$,
Q průtok v l za vteř. $\langle 1;\, 3\,000 \rangle$,
J spád na m vedení $\langle 0{,}1;\, 10\,000\,000 \rangle$.
(Nejlépe logaritmovat a pak podle K_3 nebo K_4.)

*

Délka dojezdné dráhy v m

$$d = \frac{v^2}{25,92a}.$$

$v \langle 10; 200 \rangle$ rychlost automobilu v km/hod.,
$a \langle 0,5; 10 \rangle$ zpoždění v m/sec^2.
(Podle K_2 i K_3, event. K_4.)

*

Celkový čas brzdění automobilu

$$t = \frac{v}{3,6a}.$$

t je ve vteřinách. Rozsahy proměnných jako v předchozím příkladě.

*

$$J = \frac{6h^3}{6}.$$

Pevnost vzpěrná pro obdélníkový profil.

$b \langle 0; 50 \rangle$ cm, $h \langle 0; 100 \rangle$ cm, $J \langle 0; 200\,000 \rangle$ cm^4.

[Podle K_2 nebo K_3 (po logaritmování) nebo K_4.]

*

$$s = \frac{V}{V - V'}.$$

Specifická váha tělesa, které váží ve vzduchu V gramů a ve vodě V' gramů. (Přepište na $V - \frac{s}{s - 1} V' = 0$ a dále stejně jako v předešlém příkladě.)

*

$$n = \frac{1000v}{\pi d}.$$

Počet otáček n u soustruhu za minutu $\langle 3; 10\,000 \rangle$.
$d \langle 1; 1\,000 \rangle$ původní průměr obráběného materiálu v mm,
$v \langle 1; 1\,000 \rangle$ řezná rychlost v m/min..
(Nejlépe logaritmovat a pak podle K_3.)

*

$$D = 3,85\,(\sqrt{H} + \sqrt{h}).$$

D = největší zeměpisná vzdálenost, z níž je vidět světlo majáku, je-li

H $\langle 5; 100\rangle$ m výška světla nad mořskou hladinou a
h $\langle 0; 20\rangle$ m výška pozorovatele nad mořskou hladinou.
(Podle K_3 nebo K_4.)

*

$$T = te^{\mu_1 \alpha^\circ}$$

Vzorec pro pásovou brzdu ($\mu_1 = 0{,}052\,35$).
T síla na jednom konci brzdícího pásu;
t síla na druhém konci brzdícího pásu $\langle 15; 500\rangle$ kg;
α úhel opásání $\langle 100; 300^\circ\rangle$; ($\mu_1$ koeficient tření, e základ přiroz. log.). (Logaritmujte a pak podle K_3.)

*

Hydraulický poloměr kanálu, jehož stěny mají sklon 1 : 1, rovná se poměru obsahu průřezu a omočeného obvodu. Označíme-li šířku dna b a výšku vody d, je dán výrazem

$$R = \frac{bd + d^2}{b + d\sqrt{8}}.$$

R $\langle 0; 50\rangle$ cm,
b $\langle 0; 100\rangle$ cm,
d $\langle 0; 100\rangle$ cm.

(Přepište na tvar $-R\dfrac{b}{\sqrt{8}} - \left(R - \dfrac{b}{\sqrt{8}}\right)d + \dfrac{d^2}{\sqrt{8}} = 0$, pak podle K_4. Stupnice d vyjde na elipse dotýkající se kružnice, na níž jsou stupnice R a b.)

*

Vzorec pro odtok vody obdélníkovým otvorem s vertikálními stěnami:

$$\frac{h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1 - h_2} = 0{,}338v.$$

h_1, h_2 jsou vzdálenosti horizontálních stěn od úrovně v cm, $\langle 4; 96\rangle$,
v $\langle 0{,}8; 4\rangle$ rychlost vody v m za sec.
(Podle K_5, stupnice h_1 a h_2 společná.)

*

Součinitel ν pro úplné využití odhesní války při pohonu (brzdění) všech kol automobilu je dán vzorcem:

$$\nu = 1 - x \pm fy;$$

ν $\langle 0; 1\rangle$,

$x\left(=\frac{l_2}{l}\right)$ $\langle 0{,}3;\ 0{,}7\rangle$ poměr vzdálenosti osy zadního kola od těžiště, měřené v horizontální rovině a vzdálenosti os předních a zadních kol,

$y\left(=\frac{s}{l}\right)$ $\langle 0{,}1;\ 0{,}5\rangle$ poměr výšky těžiště vozu, měřené od země a v zdálenosti os předních a zadních kol,

f $\langle 0;\ 1\rangle$ koeficient tření (znamení + pro pohon, — pro brzdění).

(Přesný výklad uvedených veličin viz v knize J. Šrejtr Příspěvek k mechanice automobilu, Praha 1935.)

(Přepište na $\nu \mp fy + (x - 1) = 0$, podle K_1 položte $\nu = h_1$, $\mp f = h_2$; pro proměnnou x a y vyjde binární stupnice.)

*

Při řešení sférického trojúhelníka se uvažuje rovnice (v astronomii)

$$\operatorname{cotg} c \sin a - \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta = \cos a \cos \beta.$$

Zobrazte ji nomograficky s binární stupnicí (a, β). Položte $h_1 = \operatorname{cotg} c$, $h_2 = -\operatorname{cotg} \gamma$. Isoplety a, β jsou konfokální hyperboly. c, γ $\langle 45°;\ 135°\rangle$.

*

Sestrojte pro řešení systému rovnic o dvou neznámých

$$ax + by = 1$$
$$cx + dy = 1$$

spojnicový nomogram.

[Pro první rovnici sestrojí se nomogram s binární stupnicí (a, b); nomogram pro druhou rovnici má binární stupnici (c, d) shodnou, volíme-li v obou nomogramech stejné moduly pro společné stupnice x, y. Spojíme-li v nomogramu bod na binární stupnici (a, b) s bodem (c, d), protne tato spojnice stupnice x, y v hledaných kotách. Uvažte jak závisí nákres nomogramu na koeficientech rovnice a jaké zlepšení by dovolila kolineace nomogramu.]

*

$$s = \sigma \frac{V}{V - V'}.$$

s = specifická váha tělesa, které váží ve vzduchoprázdnu V g a v tekutině o specifické váze σ V' g.

(Přepište na $\frac{V'}{V} + \frac{\sigma}{s} = 1$ a zobrazte podle K_1 s binární stupnicí, nebo upravte na $\frac{s+0}{0+\sigma} = \frac{V+0}{V-V'}$ a rovnoběž. nebo kolmými indexy. Konečně jako sdružený nomogram s dílčími vztahy 1. $\frac{s}{\sigma} = t$; 2. $\frac{V}{V-V_{,}} = t.$)

*

Sestrojte nomogram pro řešení úplné kubické rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx' + c = 0.$$

[Podle K_1; položte $h_1 = a$, $h_2 = b$, vyjde binární stupnice (x, c). Sestrojte pro rozsahy a, b $\langle -10; 10\rangle$.]

*

Výstupní úhel ventilátoru s přímými lopatkami β_2 je určen vztahem

$$\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = \frac{D_1}{D_2}.$$

β_1 $\langle 0; 90^\circ\rangle$ vstupní úhel,
D_1 $\langle 0; 100\rangle$ vnitřní průměr ventilátoru cm,
D_2 $\langle 0; 100\rangle$ vnější průměr ventilátoru cm.

(Přepište na $\frac{\cos\beta_2 + 0}{0 + \cos\beta_1} = \frac{D_1 + 0}{0 + D_2}$. Rovnob. neb kolmé indexy.)

*

Oteplení mědi počítáme ze vzorce

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{234{,}5 + t_2}{234{,}5 + t_1}$$

t_1 $\langle 0; 120^\circ\rangle$ počáteční teplota, t_2 konečná teplota,
R_1 $\langle 0; 10\rangle$ Ω počáteční odpor, R_2 konečný odpor.

(Upravte na $\frac{R_2 + 0}{0 + R_1} = \frac{t_2 + 234.5}{234{,}5 + t_1}$; pravou stranu násobte v čitateli i jmenovateli 0,1 a pak zobrazte rovnob. nebo kolmými indexy.)

*

Síla přenášená kotlovým plechem

$$P = 1200\,.\,(t - d)\,s.$$

P $\langle 0; 30\,000\rangle$ kg; t $\langle 0; 20\rangle$ cm rozteč nýtová;
d $\langle 0; 4\rangle$ cm průměr nýtů; s $\langle 0; 2{,}5\rangle$ cm síla plechu.

(Upravte na $\frac{P + 0}{0 + 1200s} = \frac{t - d}{1 + 0}$ a zobrazte rovnoběž. či kolmými indexy. Též sdruženým nomogramem, rozložíce na dílčí vztahy 1. $\frac{P}{1200s} = u$; 2. $t - d = u$.)

*

$$v_b = \frac{2v_ž f}{bx}.$$

Formule udávající u obdélníka o jednoduché výztuži napětí betonu v tlaku v_b (kg/cm²), v závislosti na napětí želez v tahu $v_ž$ (kg/cm²), ploše želez${}$ f (cm²), šířce b (cm) a vzdálenosti neutrální osy od horního vlákna x (cm).

v_b ⟨20; 80⟩ kg/cm², $v_ž$ ⟨800; 2000⟩ kg/cm², f ⟨0,2; 200⟩ cm², b ⟨5; 100⟩ cm, x ⟨1; 50⟩ cm.

(Nejlépe logaritmovat a rozložit na dílčí vztahy

$$\begin{array}{ll} 1. & \log 2v_ž + \log f = \log t \\ 2. & \log b + \log x = \log u \\ 3. & \log v_b = \log t - \log u.) \end{array}$$

*

Vzorec pro výpočet obsahu celkové plochy S brzdící garnitury u automobilu

$$S = \frac{Pav}{620};$$

váha vozu P ⟨50; 5000⟩ kg,
rychlost vozu v ⟨10; 200⟩ km/hod.,
zpoždění a ⟨0,5; 10⟩ m/sec²,
plošný obsah S ⟨50; 2500⟩ cm².

(Zobrazit buď podle návodu předešlého příkladu nebo rozložit na dílčí vztahy bez logaritmování. Přepíšeme-li rovnici na tvar $\frac{S + 0}{0 + P} = \frac{a + 0}{0 + \frac{620}{v}}$ zobrazíme ji rovnoběž. nebo kolmými indexy. Konečně lze ji po logaritmování upravit na

$$\frac{\log S - \log P}{1 + 0} = \frac{\log a - (\log 620 - \log v)}{1 + 0}$$

a pak zobrazit rovnoběž. nebo kolmými indexy.)

*