Imaginární elementy v geometrii

10. Základní prostorové konstrukce s imaginárními elementy

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 52–54.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402986

$$x = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \beta'' & \alpha'' \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Odůvodněte správnost těchto vět:

a) Imaginární bod leží v reálné rovině, leží-li v ní jeho nositelka.

b) Imaginární přímka prvého druhu leží v reálné rovině, leží-li v ní i přímka sdružená.

c) Imaginární přímka prvého druhu seče reálnou přímku, jde-li tato reálným bodem prvé, nebo leží-li v rovině, ve které je i přímka sdružená.

d) Imaginární bod leží v imaginární rovině, jsou-li příslušné involuce perspektivní a souhlasného smyslu, nebo splývá-li nositelka bodu s osou roviny.

e) Imaginární přímka prvého druhu a imaginární rovina jsou incidentní, jsou-li příslušné involuce perspektivní a stejného smyslu.

10. Základní prostorové konstrukce s imaginárními elementy.

Teď můžeme provésti některé prostorové konstrukce, ve kterých jde o spojování a protínání, aspoň myšlenkově, a čtenář znalý deskriptivní geometrie může je provésti v promítání na jednu nebo na dvě průmětny nebo i v promítání centrálním.*) Zatím vynecháváme konstrukce, kde jde o přímku druhého druhu.

a) S p o j i t i reálný bod s imaginárním bodem přímkou. Daný bod buď P, imaginární $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na nositelce q, jež nejde bodem P. P a q určují rovinu a další řešení je obsaženo v úloze a) str. 37.

b) Sestrojiti průsečnici reálné roviny ϱ s imaginární $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$, jejíž osa (reálná přímka) buď s. Přímka s seče ϱ v bodě S a to je střed přímkového involučního

*) Některé jsou provedeny v díle: Fiedler, Darstellende Geometrie, III. díl.

svazku $a'a''$, $b'b''$ perspektivního s involucí $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$. Hledaná průsečnice jest $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$.

c) Reálný bod jest spojiti s imaginární přímkou prvého druhu rovinou. Reálný bod buď P, přímka $r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$ je v reálné rovině ϱ a má reálný bod R. PR jest reálná přímka roviny a zároveň osa involučního svazku rovin perspektivního k involuci $a'a''$, $b'b''$.

d) Sestrojiti průsečík reálné roviny σ s imaginární přímkou prvého druhu $r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, která je v rovině ϱ a má reálný bod R. Roviny ϱ a σ mají průsečnici p a na ní je involuce $A'A''$, $B'B''$ perspektivní s $a'a''$, $b'b''$. Hledaný průsečík je $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$.

e) Sestrojiti rovinu určenou reálnou přímkou p a imaginárním bodem $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce q, jež neseče p. Přímka p je osa svazku rovin perspektivního s řadou q, ve svazku je tedy involuce $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ perspektivní s $A'A''$, $B'B''$. Hledaná rovina je $\xi = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$.

f) Sestrojiti průsečík reálné přímky p s imaginární rovinou $\sigma \equiv \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$ s osou s, která neseče p. Involuce $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ seče p v perspektivní involuci $A'A''$, $B'B''$ a hledaný bod je $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$.

g) Sestrojiti rovinu danou imaginárním bodem a imaginární přímkou prvého druhu. Imaginární bod buď $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na nositelce p, imaginární přímka buď $t = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$ v reálné rovině τ s reálným bodem T. Bod T a přímka p určují reálnou rovinu ϱ, jež seče τ v přímce m'

jdoucí bodem T a protínající p v M'. Nahraďme páry $A'A''$, $B'B''$ involuce na p páry $M'M''$, $N'N''$, které se harmonicky oddělují a právě tak nahraďme páry $a'a''$, $b'b''$ jinými $m'm''$, $n'n''$, které se oddělují harmonicky. Pak roviny $(M''m'')$, $((N'n')$, $(N''n'')$ jdou touž přímkou x, roviny $(M''m'')$, $(N'n'')$, $N''n')$ přímkou y (srov. odst. 6 úl. b)). Prvá z nich je osou hledané roviny.

Cvičení. Uvažujte různé případy, kdy se protínají dvě imaginární přímky prvního druhu. Jak lze sestrojiti rovinu jimi určenou? [Označme přímky p, q, reálné roviny, ve kterých jsou, α, β, reálné jejich body P, Q, průsečík X a rovinu (pq) označme ϱ.

a) X i ϱ jsou imaginární (obecný případ); na průsečnici $(\alpha\beta)$ určí p i q tutéž involuci a involuce rovin s osou (PQ) je s ní perspektivní,

b) X reálné, ϱ imaginární,

c) ϱ reálné, X imaginární,

d) X i ϱ reálné.]

11. Imaginární přímka druhého druhu.

Imaginární přímka druhého druhu je dána jako spojnice dvou imaginárních bodů v prostoru (nesdružených) anebo jako průsečnice dvou imaginárních rovin, jejichž osy jsou mimoběžné. Oba způsoby určení jsou identické. Neboť, jsou-li A, B dané imaginární body určující přímku, a, b reálné nositelky těchto bodů, pak se jeví přímka jako průsečnice rovin (aB), (bA). Tato přímka nemá reálného bodu, ale dvouparametrickou soustavu bodů imaginárních a nositelky těchto protínají zároveň imaginární přímku sdruženou. Každé dvě jsou mimoběžné, neboť jinak by imaginární přímka ležela v reálné rovině. Tento útvar, tvořený reálnými nositelkami oněch bodů (budeme jim říkati sečny obou imaginárních přímek), sluje kongruence lineární.

Lineární kongruence sluje množství přímek, které protínají současně dvě mimoběžky. Jsou-li reálné, sluje kongruence hyperbolická, jsou-li imaginární sdružené (druhého druhu), sluje eliptická. Uvedeme nejdůležitější vlastnosti