$= \dfrac{\sin \widehat{\alpha\gamma}}{\sin \widehat{\beta\gamma}} : \dfrac{\sin \widehat{\alpha\delta}}{\sin \widehat{\beta\delta}}$, který se rovná dvojpoměru čtyř paprsků $(abcd)$ kteréhokoli perspektivního svazku nebo dvojpoměru čtyř bodů $(ABCD)$ kterékoli perspektivní řady. Je-li speciálně $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$, říkáme, že roviny tvoří harmonickou čtveřinu.

Tvoří-li roviny $\alpha'\alpha'', \beta'\beta'', \gamma'\gamma'', \ldots$ involuci, je na každé perspektivní řadě vyťata involuce bodová a na každé rovině perspektivní involuce paprsková.

9. Některé věty o imaginárních elementech v prostoru.

Volme v prostoru pravoúhlou soustavu souřadnic. Počátek označme O a tři k sobě kolmé osy x, y, z ať jsou orientovány. Bodu patří tři souřadnice a obráceně trojině čísel v předepsaném pořádku přiřadíme bod v prostoru. Jsou-li všechny reálné, jest bod reálný, je-li aspoň jedna imaginární, jest bod imaginární.

Rovina je dána rovnicí

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nebo

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Jsou-li všechny koeficienty reálné, je rovina reálná, není-li aspoň jeden reálný, je rovina imaginární.

A. Přímky a roviny jdoucí pevným bodem v prostoru tvoří prostorový svazek čili trs; pevný bod je jeho střed. Průsek trsu s rovinou, jež nejde středem, je perspektivní pole rovinné. Spojíme-li bod nebo přímku rovinného pole se středem trsu, dostaneme přímku, neb rovinu trsu. Je-li střed $S\ (a; b; c)$, má rovina trsu rovnici

$$A\,(x - a) + B\,(y - b) + C\,(z - c) = 0;$$

poměry $\dfrac{A}{C}, \dfrac{B}{C}$ mohou nabýti libovolných hodnot reálných neb imaginárních.

B. Roviny jdoucí přímkou tvoří svazek rovin. Jsou-li dvě roviny svazku

$$A \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ B \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

pak rovina svazku je dána rovnicí

$$A + \lambda B = 0,$$

kde λ může nabýti libovolné hodnoty reálné neb imaginární.

C. Spojnice dvou imaginárních sdružených bodů je reálná a právě tak průsečnice dvou imaginárních sdružených rovin. Skutečně spojnice bodů $A\ (x'; y'; z')$, $B\ (x''; y''; z'')$ je dána rovnicemi

$$\frac{x - x_0}{x' - x''} = \frac{y - y_0}{y' - y''} = \frac{z - z_0}{z' - z''},$$

kde $(x_0; y_0; z_0)$ je střed úsečky AB, tedy $x_0 = \dfrac{x' + x''}{2}$ atd.

Vezměme teď dva imaginární sdružené body $A\ (x_1 + ix_2; y_1 + iy_2; z_1 + iz_2)$, $B\ (x_1 - ix_2; y_1 - iy_2; z_1 - iz_2)$. Pro spojnici vychází

$$\frac{x - x_1}{x_2} = \frac{y - y_1}{y_2} = \frac{z - z_2}{z_2}.$$

$S\ (x_1; y_1; z_1)$ je reálný střed úsečky AB. Dále jsou na přímce reálné body $M\ (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$, $N\ (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$. S je střed involuce, MN jeden pár involuce (symetrický podle S), jejíž dvojné body jsou A, B. — Dvě imaginární sdružené roviny buďte

$$(A_1 \pm iA_2)\,x + (B_1 \pm iB_2)\,y + (C_1 \pm iC_2)\,z + D_1 \pm iD_2 = 0.$$

Oběma je společná přímka daná rovnicemi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Vezmeme-li tuto přímku za osu z, pak mají rovnice tvar $y = (k_1 + ik_2)\,x$ a vidíme opět, že se jeví jako dvojné roviny involuce, jejíž rovnice jest $t_1t_2 - k_1(t_1 + t_2) + k_1^2 + k_2^2 = 0$, při tom $(y - t_1x)(y - t_2x) = 0$ jest jeden pár involuce.

D. Imaginárním bodem jde jediná reálná přímka, která jej spojuje s bodem sdruženým, v imaginární rovině jest jediná reálná přímka, průsečnice s rovinou sdruženou. Mimo ni nemá rovina reálného bodu.

E. Snadno nahlédneme, že platí věta: Jsou-li dva elementy imaginární (nebo jeden imag. a jeden reálný) incidentní, jsou incidentní i elementy sdružené (na př. leží-li bod na přímce, leží sdružený bod na sdružené přímce atd.).

Imaginární přímky v prostoru jsou dvojího druhu. Především takové, jež jsou položeny v reálné rovině. Taková přímka seče sdruženou imaginární ležící v téže rovině v reálném bodě a sluje imaginární přímka prvého druhu. Ale dva imaginární body v prostoru (nesdružené) určují obecně přímku, která sdruženou přímku, t. j. přímku určenou imag. sdruženými body, neseče a nemá reálného bodu. Neboť ten by byl na obou (sám sobě sdružený) a přímky by ležely v jedné rovině. Taková přímka sluje imaginární druhého druhu. Na př. přímka určená body A $(0; 0; i)$, B $(1; i; i)$ jest druhého druhu. Přímka sdružená je určena body A' $(0; 0; -i)$, B' $(1; -i; -i)$. Tyto nemají reálného bodu. Body A, A' leží na ose z, B, B' na přímce $x = 1$, $y = z$, jež je s osou z mimoběžná.

Duálně lze definovati imaginární přímku druhého druhu jako průsečnici dvou imaginárních, nesdružených rovin, jejichž osy jsou mimoběžné. Tato přímka nemá reálného bodu, neboť by musel ležeti na ose jedné i druhé roviny.

Pro konstruktivní účely určujeme imaginární bod v prostoru eliptickou involucí na reálné nositelce, která jej spojuje s bodem sdruženým a připojeným směrem involuce. Při tom lze vždy, jak bylo ukázáno (str. 32) dosáhnouti toho, že dva páry určující involuci se harmonicky oddělují. Imaginární rovinu určíme opět nejpohodlněji reálnou osou o a eliptickou involucí $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ s připojeným smyslem otáčení. Vždy lze předpokládati $(\alpha'\alpha''\beta'\beta'') = -1$. Můžeme tedy obě imaginární roviny dané uvedenou involucí označiti

$$x = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \beta'' & \alpha'' \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Odůvodněte správnost těchto vět:

a) Imaginární bod leží v reálné rovině, leží-li v ní jeho nositelka.

b) Imaginární přímka prvého druhu leží v reálné rovině, leží-li v ní i přímka sdružená.

c) Imaginární přímka prvého druhu seče reálnou přímku, jde-li tato reálným bodem prvé, nebo leží-li v rovině, ve které je i přímka sdružená.

d) Imaginární bod leží v imaginární rovině, jsou-li příslušné involuce perspektivní a souhlasného smyslu, nebo splývá-li nositelka bodu s osou roviny.

e) Imaginární přímka prvého druhu a imaginární rovina jsou incidentní, jsou-li příslušné involuce perspektivní a stejného smyslu.

10. Základní prostorové konstrukce s imaginárními elementy.

Teď můžeme provésti některé prostorové konstrukce, ve kterých jde o spojování a protínání, aspoň myšlenkově, a čtenář znalý deskriptivní geometrie může je provésti v promítání na jednu nebo na dvě průmětny nebo i v promítání centrálním.*) Zatím vynecháváme konstrukce, kde jde o přímku druhého druhu.

a) Spojiti reálný bod s imaginárním bodem přímkou. Daný bod buď P, imaginární $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na nositelce q, jež nejde bodem P. P a q určují rovinu a další řešení je obsaženo v úloze a) str. 37.

b) Sestrojiti průsečnici reálné roviny ϱ s imaginární $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$, jejíž osa (reálná přímka) buď s. Přímka s seče ϱ v bodě S a to je střed přímkového involučního

*) Některé jsou provedeny v díle: Fiedler, Darstellende Geometrie, III. díl.