Imaginární elementy v geometrii

4. Involuce na kružnici

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 27–33.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402980

$$(i, -i, \operatorname{tg}\varphi, 0) = -\frac{\operatorname{tg}\varphi - i}{\operatorname{tg}\varphi + i} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = e^{2i\varphi}$$

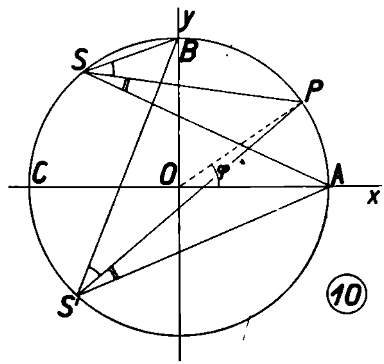
čili

$$\varphi = \frac{1}{2i}\log_e (i, -i, \operatorname{tg}\varphi, 0)^{*})$$

(e je základ přirozených logaritmů a použito Eulerovy formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$).

4. Involuce na kružnici.

Kružnice je křivka racionální, t. j. pravoúhlé souřadnice bodu na kružnici lze vyjádřiti jako racionální**) funkce parametru t. Buď O střed kružnice a současně počátek pravoúhlé soustavy, poloměr její označme r. I jest nejprve (obr. 10)



$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi.$$

Zaveďme nový parametr $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$. Podle známých vzorců jest

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};\quad \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

máme tedy racionální vyjádření

---

*) $\log_e$ je logaritmus o základu $e = 2{,}718281\ldots$

**) Racionální funkce proměnné t je tvaru

$$f(t) = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m},$$

kde n, m jsou celá, kladná čísla, a_k, b_k reálná čísla, která všechna nejsou nuly.

$$x = r\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2rt}{1+t^2}. \tag{1}$$

Proběhne-li t reálná čísla od $-\infty$ do $+\infty$, proběhne bod x, y celou kružnici; na příklad hodnotě $t = 0$ patří bod $A\,(r; 0)$, hodnotě $t = 1$ bod $B\,(0; r)$, hodnotě $t = \infty$ bod $C\,(-r; 0)$ atd. Říkáme často bod (t_i) na kružnici a rozumíme bod o souřadnicích x, y, které dostaneme ze vzorců (1), dosadíme-li do nich $t = t_i$. Buď t souřadnice bodu na přímce; přiřaďme si nyní ty body na přímce a na kružnici, kterým patří totéž t; body na kružnici jsou tímto způsobem přiřaděny bodům na přímce (řadě číselné) a obráceně.

Hledejme průsečíky kružnice s přímkou v obecné poloze

$$ux + vy + 1 = 0;$$

dosadíme-li sem hodnoty (1), dostaneme pro parametry průsečíků rovnici

$$t^2\,(1 - ur) + 2vrt + 1 + ur = 0. \tag{2}$$

Dosadíme-li kořeny t_1, t_2 této rovnice do (1), dostaneme souřadnice průsečíků. Z rovnice (2) vychází

$$t_1 + t_2 = -\frac{2rv}{1-ur}, \qquad t_1 t_2 = \frac{1+ur}{1-ur}. \tag{3}$$

Obráceně, je-li dáno t_1, t_2, vychází z rovnic (3)

$$u = \frac{t_1 t_2 - 1}{r\,(1 + t_1 t_2)}, \qquad v = -\frac{t_1 + t_2}{r\,(1 + t_1 t_2)}, \tag{4}$$

a rovnice sečny, která spojuje body (t_1), (t_2) zní

$$(t_1 t_2 - 1)\,x - (t_1 + t_2)\,y + r\,(1 + t_1 t_2) = 0. \tag{5}$$

Rovnice tečny v bodě t vychází odtud při $t_1 = t_2 = t$ ve tvaru

$$(t^2 - 1)\,x - 2ty + r\,(1 + t^2) = 0. \tag{6}$$

Rovnice (5) je bilineární v t_1, t_2 a symetrická v t_1, t_2; předpokládáme-li v ní x, y pevné, definuje tedy i n v o l u c i na kružnici. Obráceně mějme na kružnici involuci danou rovnicí

$$at_1t_2 + b\,(t_1 + t_2) + c = 0. \tag{7}$$

Přirovnáme-li (7) a (5), poznáme, že spojnice přidružených bodů t_1, t_2 jde pevným bodem J (x_0; y_0); skutečně

$$a : b : c = (r + x_0) : -y_0 : (r - x_0),$$

odkud

$$x_0 = \frac{r\,(a - c)}{a + c}, \quad y_0 = -\frac{2br}{a + c}. \tag{8}$$

Tento bod sluje **středem involuce**, jeho polára ke kružnici sluje **osa involuce**. Její rovnice jest

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

a po úpravě

$$(a - c)\,x - 2by - r\,(a + c) = 0. \tag{9}$$

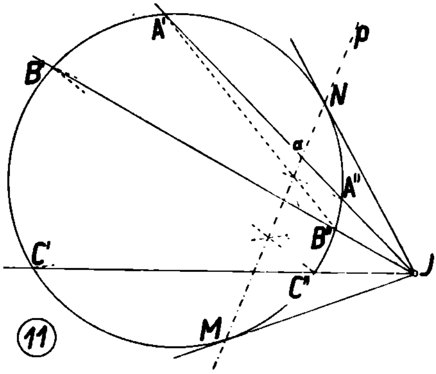
Páry involuce na kružnici jsou vyťaty sečnami, které procházejí pevným bodem J (středem involuce). Je-li J vně kružnice, jsou dvojné body reálné, involuce je hyperbolická; je-li J uvnitř, jsou dvojné body imaginární, involuce je eliptická.

V obr. 11 jest J střed involuce, $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ jsou její páry. Dvojné body jsou dotykové body M, N tečen vedených z bodu J a leží tedy na poláře p dané rovnicí (9). Skutečně, hledáme-li průsečíky přímky (9) s kružnicí dosazením hodnot (1), přijdeme k rovnici $at^2 + 2bt + c = 0$, jež definuje dvojné body involuce (7).

Řada $APB\ldots$ (obr. 10) na kružnici se promítá z bodů kružnice paprskovými svazky, jež jsou vzájemně shodné; jsou-li S, S' dva různé body na kružnici, jest na př. $\sphericalangle ASP = \sphericalangle AS'P$, $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PS'B\ldots$, mimo to jest $\sphericalangle ASP = \frac{1}{2}AOP = \frac{1}{2}\varphi$. Promítáme-li na př. řadu na kružnici z bodu $C\,(-r; 0)$, jest rovnice přímky $CP : y = t\,(x + r)$, kde $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$. Z toho důvodu se promítá involuce daná rovnicí (7) z bodu paprskovou involucí, která má tutéž rovnici;

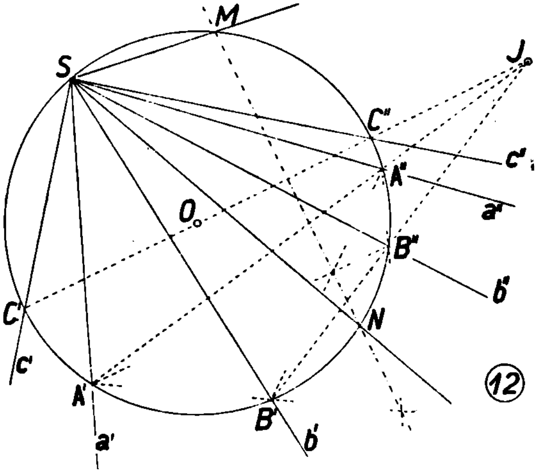
(t_1, t_2 jsou při tom směrnice odpovídajících si paprsků). Dvojné paprsky procházejí dvojnými body na kružnici.

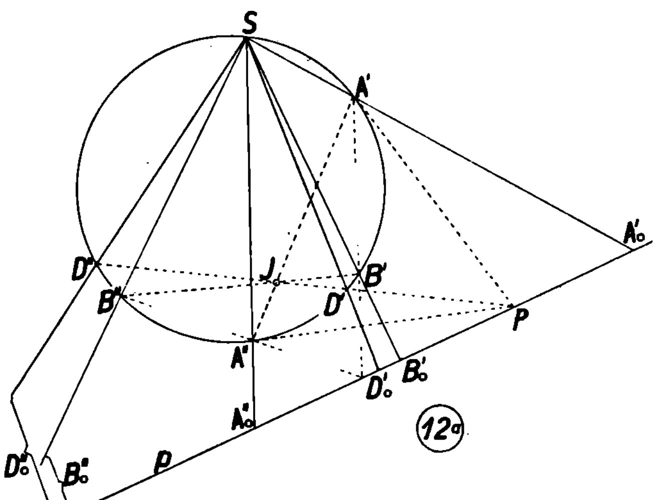
Říkáme proto, mluvíme-li o bodech na kružnici, že na př. A', A'' jsou harmonicky odděleny body M, N (obr. 11), neboť promítneme-li z libovolného bodu S na kružnici, dostaneme harmonickou čtveřinu paprsků $S\,(M, N, A', A'')$.



Blíží-li se bod S bodu M, přejde tento svazek v $M\,(J, N, A', A'')$, jenž promítá harmonickou řadu (J, α, A', A''). Vidíme také, že páry involuce $A'A''$, $B'B''$, ... se z bodu S na kružnici promítnou na poláru p jako body polárně sdružené ke kružnici, neboť oddělují harmonicky dvojné body M, N, jeden je tedy na poláře druhého. (Doporučujeme čtenáři, aby si narýsoval příslušný obrázek, je-li střed involuce J uvnitř kružnice.)

Různé konstrukce týkající se involuce se převádějí s výhodou na kružnici. Některé z nich lze také provésti pouhým pravítkem (lineární úlohy), nicméně při praktickém provádění používáme raději pravítka i kružítka (nebo narýsované kružnice). (Ostatně právem považujeme kružítko za přístroj dokonalejší než pravítko.)


M
S
J
C''
c''
A''
a''
O
B''
b''
C'
N
c'
A'
B'
a'
b'
12


S
A'
A'o
D''
J
B'
B''
D'
P
A''
B'o
D'o
A''o
12a
D''o
B''o
p

Ukážeme si, jak se provádějí některé konstrukce užitím narýsované kružnice (Steinerovy konstrukce).

a) Paprsková involuce je dána páry $a'a''$, $b'b''$. Máme sestrojiti pravoúhlý pár a dvojné paprsky. Opišme kružnici k, která jde středem svazku S (obr. 12); na ní dostaneme páry $A'A''$, $B'B''$. Přímky $A'A''$, $B'B''$ se protínají ve středu J involuce. Jeho polára (osa involuce) spojuje průsečíky ($A'B'$, $A''B''$), ($A'B''$, $A''B'$) a seče kružnici v bodech M, N. SM, SN jsou hledané dvojné paprsky. Spojme J se středem kružnice O; na kružnici dostaneme pár $C'C''$. SC', SC'' je pravoúhlý pár paprskové involuce. V obr. 12a leží J uvnitř kružnice, involuce je eliptická. Průsečíky poláry p s kružnicí jsou dány jako dvojné elementy involuce $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$ a hledané dvojné paprsky jsou imaginární spojnice bodu S s nimi.

b) Je dána involuce v řadě bodové na přímce p páry $A'A''$, $B'B''$; mají se sestrojiti dvojné elementy, střed involuce a k danému bodu C' přiřaděný C''. Volme v rovině kružnici k, na ní bod S a promítněme řadu na kružnici do $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$. Další konstrukce jako v předchozím. (Jednoduchý obrázek nechť si čtenář laskavě pořídí sám.)

c) Sestrojiti společný pár dvou bodových involucí na přímce p.*) První involuce je dána páry $A'A''$, $B'B''$, druhá páry $P'P''$, $Q'Q''$. Promítněme obě involuce opět na kružnici z jejího bodu S a sestrojme středy obou involucí I a J. Jejich spojnice protne kružnici v bodech X', X'', což je společný pár obou involucí na kružnici, jemuž odpovídá i společný pár na přímce p. Je-li aspoň jeden z obou středů uvnitř kružnice, jest pár $X'X''$ reálný. Tedy:

Dvě eliptické involuce soumístné mají vždy jeden společný reálný pár, rovněž tak involuce eliptická a hyperbolická.

Dvě hyperbolické involuce mohou mít společný pár reálný neb imaginární.

Pro konstrukce s imaginárními elementy je důležitá věta: Eliptickou involuci v řadě bodové neb v paprskovém svazku lze vždy určiti dvěma páry elementů $A'A''$, $D'D''$ (neb $a'a''$, $d'd''$), které se navzájem oddělují harmonicky, při čemž jeden prvek A' (neb a') lze voliti libovolně. Skutečně, převeďme na př. involuci danou

---

*) Involuce, které mají společnou nositelku — tedy dvě bodové involuce na přímce, na kružnici, dvě paprskové involuce v témže vrcholu a pod. — nazýváme involuce soumístné.

na přímce p páry $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$ na kružnici a určeme její střed J (obr. 12a). Ke zvolenému bodu A' dostaneme bod A'' na spojnici $A'J$. Sestrojme pól P přímky $A'A''$, který padne vně kružnice na přímku p. PJ dává pak na kružnici body D', D''; páry $A'A''$, $D'D''$ tvoří harmonickou čtveřinu na kružnici. Průmětem z bodu S na přímku p dostaneme harmonicky se oddělující páry $A'_0A''_0$, $D'_0D''_0$.

Poznámky a cvičení. 1. Involuce paprsková je dána dvojným paprskem m a párem $a'a''$; sestrojte druhý dvojný paprsek n, pravoúhlý pár a k danému paprsku b' přidružený b''.

2. Je dána symetrická paprsková involuce (dvojné paprsky jsou k sobě kolmé). Protněte ji kružnicí jdoucí vrcholem. Kde je střed involuce? Totéž proveďte pro involuci pravoúhlou!

3. Najděte společný pár dvou soumístných involucí na přímce a) jedna je hyperbolická, druhá eliptická; b) obě jsou eliptické.

4. Nechť se na přímce páry bodové AB, CD oddělují harmonicky. Dalšímu bodu X buď přiřaděn harmonicky X_1 vzhledem k AB a X_2 vzhledem k CD. Ukažte, že pak AB, CD, X_1X_2 jsou tři páry involuce. (Převeďte na kružnici!)

5. Imaginární elementy v rovině.

V reálné rovině mějme dvě osy k sobě kolmé x, y jdoucí počátkem O a orientované. Bodu M patří známým způsobem dvě pravoúhlé souřadnice x_1, y_1, které píšeme $(x_1; y_1)$. Obráceně dvojině čísel $(a; b)$ přiřaďujeme bod, takže první číslo znamená souřadnici x, druhé souřadnici y. Jsou-li obě čísla reálná, je bod reálný, není-li aspoň jedno reálné, říkáme, že bod je imaginární. Ke každému imaginárnímu bodu v rovině patří bod imaginární sdružený. Na př. bod $A\,(1 + 2i; 3 - 4i)$ a $A'\,(1 - 2i; 3 + 4i)$ jsou imaginární body sdružené.

Omezíme-li se na reálná čísla, může každá z hodnot x, y proběhnouti všechna čísla od $-\infty$ do $+\infty$; říkáme, že množství reálných bodů v rovině je dvourozměrné. Podle toho množství imaginárních bodů v rovině je čtyřrozměrné,