luce S, součin $\overline{SM} \,.\, \overline{SN}$, který se rovná mocnosti bodu S ke kružnicím svazku, je mocnost involuce. Jak toho použíti, abychom sestrojili střed a dvojné body involuce dané páry bodovými $A'A''$, $B'B''$?

(Návod: Body $A'A''$, resp. $B'B''$ veďte kružnice, aby se protínaly v reálných bodech M, N. Chordála MN vytíná na přímce střed involuce, dotykové body kružnic, jež jdou body M, N a dané přímky se dotýkají, jsou dvojné body involuce.)

8. Obecně svazek kuželoseček, t. j. množství všech kuželoseček, které jdou čtyřmi body *1, 2, 3, 4*, seče přímku, jež nejde žádným z nich, v involuci. (Věta Desarguesova o svazku kuželoseček.) Volme tuto přímku za osu x; pak dvě kuželosečky svazku jsou dány obecnými rovnicemi tvaru

$$A \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$B \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0,$$

a svazek je dán rovnicí

$$A + \lambda B = 0$$

při proměnném λ. Dosadíme-li $y = 0$, dostaneme pro průsečíky osy x s kuželosečkami svazku

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda\,(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0$$

jako v úloze 5. Mezi kuželosečkami svazku jsou tři složené (degenerované) z dvojin přímek: *12, 34*; *13, 24*; *14, 23*. Máme tedy větu: Dvojiny protějších stran úplného čtyřrohu protínají přímku ve třech párech involuce.

3. Imaginární přímka ve svazku.

V reálné rovině buď dán svazek přímek o středu O. Volme dvě navzájem kolmé přímky s určitou orientací za osy x, y pravoúhlé soustavy souřadnic (obr. 5) a určeme přímku svazku tangentou úhlu, který svírá s kladnou osou x. Jest tedy rovnice obecné přímky ve svazku

$$y = mx; \tag{1}$$

$m = \operatorname{tg}\omega$ je parametr, který určuje přímku. Reálnému parametru patří reálná přímka, komplexnímu parametru přímka imaginární, jež mimo O nemá reálného bodu. Přímky $y = (m_1 \pm im_2)\,x$ slují imaginární sdružené.

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$Am^2 + 2Bm + C = 0 \tag{2}$$

definuje pár přímek; ty jsou reálné při $B^2 - AC > 0$ a imaginární sdružené při $B^2 - AC < 0$.

Utvořme polární formu a položme ji rovnu nule. Dostaneme rovnici

$$Am'm'' + B(m' + m'') + C = 0, \tag{3}$$

která definuje paprskovou involuci o středu O. Má dva samodružné čili dvojné elementy ($m' = m'' = m$), které jsou dány rovnicí (2) a jsou reálné různé nebo imaginární. V prvém případě sluje involuce hyperbolická, v druhém eliptická. Je-li $B^2 - AC = 0$ mluvíme o involuci parabolické.

Všimněme si opět některých vlastností této involuce.

Involuce ve svazku obsahuje vždy jeden pár kolmých přímek. Pro takový pár jest $m'm'' = -1$; z rovnice (3) vychází pak $m' + m'' = \frac{A - C}{B}$. Podle toho m', m'' jsou kořeny rovnice

$$m^2 - \frac{A - C}{B} m - 1 = 0; \tag{4}$$

její diskriminant $\left(\frac{A - C}{B}\right)^2 + 4$ je vždy kladný (pro reálné A, B, C), tedy kolmý pár je vždy reálný. Ve zvláštním případě $B = 0$, $A = C$ zní rovnice (3)

$$m'm'' + 1 = 0 \tag{5}$$

a pak každý pár involuce je dvojina kolmých přímek.

Volíme-li onen kolmý pár v obecném případě za osy x, y, musí rovnice (4) míti kořeny $0, \infty$, t. j. $B = 0$. Pak rovnice (3) se zjednoduší na

$$Am'm'' + C = 0 \quad \text{čili} \quad m'm'' = k.$$

Pro dvojné elementy dostaneme $m' = m'' = \pm\sqrt{k}$. Poznáváme: Pravoúhlý pár půlí úhel samodružných paprsků.

Dělicí poměr paprsku p ($m = \mathrm{tg}\,\omega$) ke dvojným ($m_{12} = \pm \mathrm{tg}\,\alpha = \pm \sqrt{k}$) je dán výrazem $\frac{m - m_1}{m - m_2} = \frac{\mathrm{tg}\,\omega - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\omega + \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\omega + \alpha)}$ (viz odst. 1). Jsou-li tedy p', p'' paprsky v involuci si odpovídající, jest $m'm'' = k$ a dělicí poměr prvého $\frac{m' - \sqrt{k}}{m' + \sqrt{k}}$, druhého $\frac{m'' - \sqrt{k}}{m'' + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} - m'}{\sqrt{k} + m'}$ (liší se tedy od prvého jen znaménkem). Pár p', p'' odděluje harmonicky dvojné elementy.

Involuce ve svazku je souhrn dvojic přímkových, které oddělují harmonicky dvě reálné nebo dvě imaginární přímky. V prvém případě mluvíme o involuci hyperbolické, v druhém eliptické.

Opět platí věty:

a) Involuce ve svazku je určena dvěma páry přímek.

b) Dvě involuce o témž vrcholu mají společný pár.

Sledujme otáčení dvou odpovídajících si přímek p', p'' v involuci. V involuci hyperbolické, otáčí-li se p' v jistém smyslu, na př. kladném, t. j. v témž jako ručičky na hodinách, otáčí se p'' ve smyslu opačném a dvakrát se setkají přidružené přímky v elementech samodružných. V involuci eliptické však, otáčí-li se p' v jistém smyslu, otáčí se p'' v témž smyslu, a možno tedy eliptické involuci ve svazku přiřknouti jeden neb druhý smysl otáčení. Teď vidíme, že podobně jako na přímce lze určiti imaginární přímku ve svazku eliptickou involuci a určitým smyslem otáčení. Je-li involuce dána páry $a'a''$, $b'b''$ (jež se oddělují) jsou dány dva imaginární paprsky svazku, jež opět výhodně označíme

$$x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} b' & a' \\ b'' & a'' \end{pmatrix};$$

s prvým je spojen smysl otáčení daný třemi elementy $a'b'a''$ neb $b'a''b''$ atd., s druhým smysl $b'a'b''$, nebo $a''b'a'$ atd.

(Perspektivní involuce.) Protněme involuční svazek přímkou, jež nejde jeho středem. Svazek vytíná na přímce perspektivní involuci. Dvojné elementy ve svazku a v řadě bodové jsou incidentní, ať jsou reálné nebo imaginární. Vezmeme-li involuční svazek daný rovnicí (3), lze předpokládati, že přímka má rovnici $x = k$, neboť vždy lze voliti osu x v kolmici z bodu O k této přímce a svazek je pak dán obecnou rovnicí tvaru (3). Pak obecná přímka ve svazku (1) dává bod o souřadnici $y = mk$. Dosadíme-l do rovnice (3) hodnoty $m' = \frac{y'}{k}$, $m'' = \frac{y''}{k}$, dostaneme rovnici involuce na přímce $x = k$ ve tvaru

$$A\,\frac{y'y''}{k^2} + B\,\frac{y' + y''}{k} + C = 0;$$

její dvojné elementy jsou dány rovnicí

$$A\,\frac{y^2}{k^2} + \frac{2By}{k} + C = 0,$$

jež vychází z rovnice (2) dosazením $m = \frac{y}{k}$.

Obráceně involuce na přímce se promítá z bodu mimo ni perspektivní involucí paprskovou.

Poznámky a cvičení. 1. Involuce ve svazku buďte dány rovnicemi: a) $Am'm'' + C = 0$, b) $B(m' + m'') + C = 0$, c) $Am'm'' + B(m' + m'') = 0$. Určete kolmý pár a dvojné elementy.

2. Involuce $m' + m'' = 0$ sluje symetrická. Její dvojné elementy jsou k sobě kolmé. Dokažte!

3. Involuce $m'm'' + 1 = 0$ sluje pravoúhlá, dvojné přímky ($m = \pm i$) slují isotropické; podle toho dvě kolmé přímky se středem O a obě isotropické přímky bodem O ($y = \pm ix$) tvoří harmonickou čtveřinu. Dokažte!

4. Obecně úhel dvou přímek je v jednoduchém vztahu k dvojpoměru, který tvoří ramena úhlu a obě isotropické přímky jeho vrcholem. Tento dvojpoměr, vezmeme-li za ramena úhlu $y = 0$ a $y = x \operatorname{tg} \varphi$, je

$$(i, -i, \operatorname{tg}\varphi, 0) = -\frac{\operatorname{tg}\varphi - i}{\operatorname{tg}\varphi + i} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = e^{2i\varphi}$$

čili

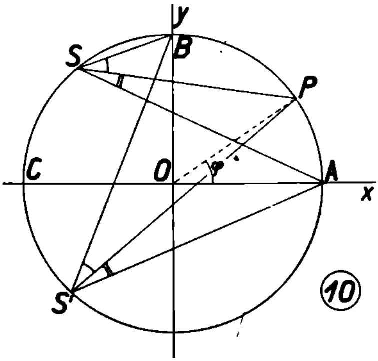
$$\varphi = \frac{1}{2i}\log_e (i, -i, \operatorname{tg}\varphi, 0)^{*)}$$

(e je základ přirozených logaritmů a použito Eulerovy formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$).

4. Involuce na kružnici.

Kružnice je křivka racionální, t. j. pravoúhlé souřadnice bodu na kružnici lze vyjádřiti jako racionální**) funkce parametru t. Buď O střed kružnice a současně počátek pravoúhlé soustavy, poloměr její označme r. I jest nejprve (obr. 10)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Zaveďme nový parametr $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$. Podle známých vzorců jest

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

máme tedy racionální vyjádření

---

*) $\log_e$ je logaritmus o základu $e = 2{,}718281\ldots$

**) Racionální funkce proměnné t je tvaru

$$f(t) = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m},$$

kde n, m jsou celá, kladná čísla, a_k, b_k reálná čísla, která všechna nejsou nuly.