pokrok vědy. Staudtův spis však se čte velmi těžko a začátečníku je téměř nepřístupný.*)

V této knížce se omezíme většinou jen na pouhou geometrickou interpretaci imaginárních výsledků, ke kterým vedou především kvadratické úlohy a jež je postačitelná k tomu, aby začátečník nabyl přesvědčení, že imaginární elementy mají v úvahách geometrických stejné oprávnění jako reálné. Sledujeme myšlenky Staudtovy jen v nejjednodušších případech, užívajíce prostředků pokud možno elementárních.

Na konec přidáváme kapitolu o Gaussově rovině, kde jde o jinou interpretaci imaginárního bodu, o zobrazení imaginárních bodů přímky na reálné body roviny. To jest jen nepatrná ukázka z moderní teorie imaginárních veličin. Podobné úvahy pro body v rovině neb prostoru nebo jiné útvary vedou k útvarům značně složitým a není možno se v tomto spisku jimi zabývati.

1. Základní věty geometrie polohy v rovině.

Základní elementy v rovině jsou bod a přímka. Místo přímka říkává se paprsek.

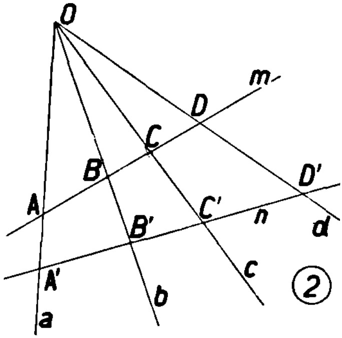
Přímá řada bodová je souhrn bodů na přímce. Je-li vyloučeno nedorozumění, říkáme krátce jen řada bodová. Svazek přímkový nebo paprskový je souhrn přímek v rovině, které jdou pevným bodem, jejž zoveme vrchol nebo střed svazku. Říkáme také jenom svazek.

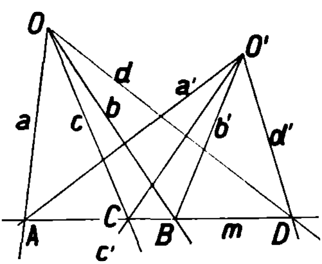
Na každé přímce v rovině si myslíme jeden bod nevlastní čili nekonečně vzdálený. Nevlastní body všech přímek roviny vyplňují opět přímku — nevlastní přímku roviny (nekonečně vzdálenou). Tento předpoklad se obyčejně nazývá perspektivní názor či Desargueův, ač úvahy,

*) Přístupnější ze starších prací jsou: Stolz, Zur geometr. Bedeutung der complexen Elemente, Math. Annallen, sv. 4; Lüroth, Das imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Annallen, sv. 8.

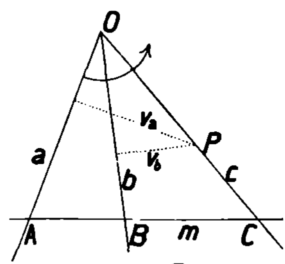
které k němu vedou jsou čistě logické a mají za účel zobecnění geometrických vět.

Přímky, které promítají body řady m z bodu O ležícího mimo přímku m, tvoří svazek přímkový (obr. 2). Říkáme, že svazek O a řada m jsou perspektivní a přiřadíme při tom vždy bodu A, B, $C, \ldots$ na m přímku a, b, c, ..., která jím prochází (je s ním incidentní). Elementy A, a; B, b; C, c; ..., které si v perspektivnosti odpovídají, jsou incidentní. Dvě řady m, n jsou perspektivní, jsou-li průseky téhož svazku O (obr. 2); pak sobě odpovídají body





3



4

na témž paprsku A, A'; B, B'; C, C';...; O sluje středem perspektivnosti obou řad.

Dva svazky O, O' jsou perspektivní, promítají-li tutéž řadu bodovou — osu perspektivnosti (obr. 3.) Paprsky a, a'; b, b'; c, c'; ..., které procházejí týmž bodem osy m, si odpovídají.

Buďte A, B dva pevné body na přímce m (obr. 4), C bod pohyblivý; pak poměr $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ zoveme **dělící poměr** bodu C k základním bodům A, B. Při tom vzdálenosti v jednom směru béřeme za kladné, v protivném za záporné. Podle toho je dělící poměr bodu C kladný, leží-li C mimo úsečku AB, záporný, leží-li uvnitř. Specielně střed úsečky AB má dělící poměr -1, bod nevlastní $+1$.

Podobně ve svazku se středem O (obr. 4) buďte základní přímky a, b, pohyblivá c a jeden smysl otáčení považujme za kladný, opačný za záporný. Dělící poměr paprsku c k základním a, b jest $\dfrac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}}$ a zřejmě se rovná poměru vzdáleností v_a, v_b libovolného bodu P na c od a, b ($v_a = \overline{OP} \,.\, \sin \widehat{ac}$, $v_b = \overline{OP} \,.\, \sin \widehat{bc}$).

Dělící poměry $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ a $\dfrac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}}$, jsou-li řada $ABC\ldots$ a svazek $O\,(a, b, c, \ldots)$ perspektivní, jsou v jednoduchém vztahu. Podle obr. 4 jest

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\triangle\, AOC}{\triangle\, BOC} = \frac{\overline{AO} \,.\, \overline{OC} \,.\, \sin \widehat{ac}}{\overline{BO} \,.\, \overline{OC} \,.\, \sin \widehat{bc}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} \cdot \frac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}}.$$

Při stálém A, B a hybném C se liší oba dělící poměry jen konstantním činitelem $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$.

Dvojpoměr čtyř bodů na přímce neb čtyř paprsků ve svazku jest poměr jejich dělících poměrů k týmž dvěma základním elementům. Značíme jej symbolem

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \qquad (abcd) = \frac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}} : \frac{\sin \widehat{ad}}{\sin \widehat{bd}}.$$

Jsou-li řada A, B, C, D a svazek a, b, c, d perspektivní, plyne ihned z předešlého, že dvojpoměry $(ABCD)$ a $(abcd)$ jsou si rovny. Odtud plyne dále, že jsou-li dvě řady perspektivní (obr. 2), jest

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = (abcd),$$

a podobně, jsou-li dva svazky perspektivní (obr. 3)

$$(abcd) = (a'b'c'd') = (ABCD).$$

Ve dvou perspektivních útvarech (řadách a paprscích) se rovná dvojpoměr čtyř elementů jednoho útvaru dvojpoměru odpovídajících elementů druhého útvaru.

V našich konstruktivních úvahách hraje důležitou úlohu dvojpoměr harmonický. Čtyři body na př. A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu, jestliže se dělící poměry $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ liší jen znaménkem. Pak dvojpoměr $(ABCD) = -1$ sluje harmonický dvojpoměr. Podobně ve svazku; liší-li se poměry $\dfrac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}}, \dfrac{\sin \widehat{ad}}{\sin \widehat{bd}}$ jen znaménkem, říkáme, že paprsky a, b, c, d tvoří harmonickou čtveřinu, a píšeme $(abcd) = -1$. Podle poslední věty promítáním centrálním a protínáním harmonická čtveřina přechází opět v harmonickou čtveřinu.

Příkladem harmonické čtveřiny jsou body A, B, půlící bod S úsečky AB a bod nevlastní, anebo ramena úhlu a, b a obě přímky půlící úhel ab a úhel vedlejší. V obr. 3 jsou voleny body A, B, C, D tak, že tvoří harmonickou čtveřinu.

(Metrické vlastnosti harmonické čtveřiny.) Z relace $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ čili

$$\overline{AC} \,.\, \overline{BD} + \overline{AD} \,.\, \overline{BC} = 0 \tag{1}$$

vyplývá ihned $\overline{CA} \,.\, \overline{DB} + \overline{CB} \,.\, \overline{DA} = 0$, t. j. dvojiny bodové $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ hrají zde tutéž roli. Správně tedy říkáme, že C, D oddělují harmonicky A, B a zároveň též A, B oddělují harmonicky C, D. Totéž platí o harmonické čtveřině paprskové.

Zvolme v řadě bodové počátek souřadnic O; body A, B, C, D mějte souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4. Pak hořejší relace (1) zní

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = 0,$$

neboli po úpravě

$$(x_3x_4 + x_1x_2) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0; \tag{2}$$

tato relace je opět symetrická podle x_1x_2, x_3x_4. Volme počátek O ve středu úsečky AB. Pak jest $x_2 = -x_1 = u$ a rovnice (2) má velmi jednoduchý tvar

$$x_3x_4 - u^2 = 0 \tag{3}$$

nebo, je-li S střed úsečky AB,

$$\overline{SC}\,.\,\overline{SD} = \overline{AS}^2 = \overline{BS}^2. \tag{4}$$

Bodový pár na přímce bývá dán rovnicí kvadratickou s reálnými koeficienty

$$ax^2 + 2bx + c = 0; \tag{5}$$

kořeny této rovnice jsou souřadnice bodů dvojiny; je známo ze střední školy,*) že tento pár je reálný při $b^2 - ac > 0$. Jsou-li kořeny rovnice (5) x_1, x_2, jest, jak známo,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Buď dán druhý pár rovnicí

$$a'x^2 + 2b'x + c' = 0; \tag{5'}$$

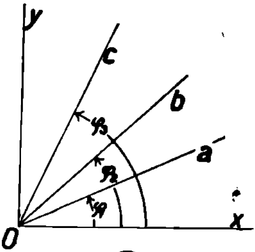
pro kořeny x_3, x_4 jest

$$x_3 + x_4 = -\frac{2b'}{a'}, \qquad x_3x_4 = \frac{c'}{a'}.$$

*) Viz na př. učebnice Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, Aritmetika pro VI.—VII. tř. stř. škol, 6. vyd. JČMF, Praha, 1935.

Dosadíme-li do rovnice (2), dostaneme podmínku, aby páry dané rovnicemi (5), (5′) tvořily harmonickou čtveřinu, ve tvaru

$$ac' + a'c - 2bb' = 0. \qquad (6)$$



5

Tytéž vztahy platí také pro harmonickou čtveřinu paprskovou. Volme střed svazku za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic. Pak rovnice paprsku jest $y = mx$, kde $m = \operatorname{tg}\varphi$ (obr. 5); m je parametr, který určuje polohu paprsku ve svazku. Paprskům a, b, c, d ať patří parametry m_1, m_2, m_3, m_4. Pak

$$\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_1) \,.\, \cos\varphi_3 \,.\, \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_3 \,.\, \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} \,.\, \frac{\sin\widehat{ac}}{\sin\widehat{bc}},$$

a podobně

$$\frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} \,.\, \frac{\sin\widehat{ad}}{\sin\widehat{bd}}.$$

Jest tedy $\qquad (m_1m_2m_3m_4) = (abcd).$

Pro harmonickou čtveřinu platí opět vztah (2)

$$(m_3m_4 + m_1m_2) - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 0.$$

Volíme-li za osu x přímku půlící úhel ab, jest $m_1 = - m_2 = u$ a relace nabude tvaru

$$m_3m_4 - u^2 = 0 \text{ neboli } \operatorname{tg}\widehat{xc} \,.\, \operatorname{tg}\widehat{xd} = \operatorname{tg}^2\widehat{xa} = \operatorname{tg}^2\widehat{xb}.$$

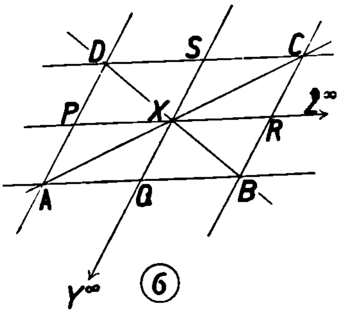
Jsou-li dvě dvojiny paprskové dány rovnicemi

$$Am^2 + 2Bm + C = 0, \quad A'm^2 + 2B'm + C' = 0,$$

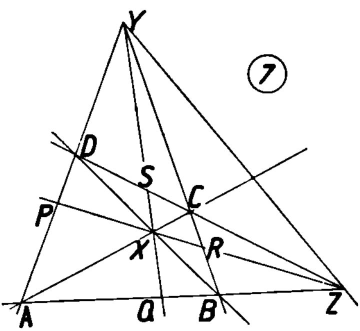
je podmínka harmoničnosti

$$AC' + A'C - 2BB' = 0. \qquad (7)$$

Poznámky a cvičení. 1. Dány jsou body A, B na přímce p; k bodu C sestrojte čtvrtý harmonický D. (Návod: Body A, B sestrojte dvě rovnoběžky a bodem C příčku, která je seče v bodech *1*, *2*. Pak přeneste od B na druhou stranu $\overline{B2'} = \overline{2B}$; spojnice *12'* prochází bodem D.)



6



7

2. Ve svazku s vrcholem O jsou dány paprsky a, b, c; sestrojte čtvrtý harmonický d. (Návod: Veďte příčku $p \parallel c$, která seče a, b v bodech A, B; půlícím bodem D úsečky AB jde paprsek d.)

3. V rovnoběžníku $ABCD$ se středními příčkami PQ RS, (obr. 6) jsou harmonické čtveřiny, na př. $(ABQZ^\infty)$, $(BCRY^\infty)$ atd. nebo svazky $X\ (AB\ QZ^\infty)$, $Y^\infty\ (ABQZ^\infty)$ atd. Centrálním promítáním přejde rovnoběžník v různoběžník, přímka nevlastní přejde v přímku v konečnu YZ a všechny harmonické dvojpoměry zůstanou zachovány. (Obráceně každý různoběžník lze pokládati za středový průmět rovnoběžníka, neboť v deskript. geometrii se ukazuje, že jehlan, jehož podstava je různoběžník, lze protnouti v rovnoběžníku.) Máme tedy harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu $ABCD$ (obr. 7). Tak se nazývá konfigurace určená čtyřmi body v rovině. Celkem je šest stran: AB a protější CD, AC s protější BD, AD s protější BC. Průsečíky jejich X, Y, Z tvoří diagonální trojúhelník a jeho strany slují diagonály (úhlopříčky). Na každé straně a na každé diagonále je harmonická čtveřina bodová, na př. $(ABQZ)$, $(CDSZ)$, $(QSXY)$ atd. V diagonálním rohu se sbíhají vždy čtyři přímky, dvě strany a dvě diagonály, které tvoří také harmonickou čtveřinu, na př. $X\ (A, B, Q, Z)$ atd.

4. Čtyři přímky a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem, tvoří úplný čtyřstran. Má šest vrcholů; protější vrcholy slují dvojice (ab), (cd); (ac), (bd); (ad), (bc). Jejich spojnice tvoří diagonální trojstran. Vytkněte opět všechny harmonické čtveřiny, které zde povstávají. (Plyne opět z centrálního promítání.)

5. Předchozích úvah lze užíti, abychom provedli úlohy 1, 2 pouze pravítkem (bez rovnoběžek a přenášení délek). Máme-li k bodům A, B, Q na přímce sestrojiti čtvrtý harmonický Z, veďme bodem A dvě přímky (obr. 7) a protněme je přímkou bodem Q jdoucí v bodech X, Y. Spojme tyto body s bodem B a dostaneme D, C; jejich spojnice jde bodem Z. Sestrojte podobně ke třem paprskům čtvrtý harmonický jen pravítkem!

6. Dokažte: Jsou-li na dvou různoběžkách harmonické čtveřiny $ABQZ$, $CDSZ$ o společném bodě Z (obr. 7), pak jsou perspektivní dvojím způsobem podle středů X, Y.

Jsou-li dva svazky harmonické o společném paprsku, na př. $Y\,(ABQZ)$, $Z\,(ADPY)$, jsou perspektivní rovněž dvojím způsobem (jedna osa perspektivnosti jest AC, druhá BD)!

2. Imaginární body na reálné přímce.

Vytkněme na přímce bod O jako počátek souřadnicové soustavy a určujme bod P vzdáleností od počátku O. Reálné vzdálenosti $\overline{OP} = x$ patří reálný bod, je-li vzdálenost dána číslem komplexním $x_1 + ix_2$, $(x_2 \gtrless 0)$, přisuzujeme jí bod imaginární. Vzdálenosti $x_1 - ix_2$ patří bod imaginární sdružený k prvnímu. Souřadnice obou bodů jsou kořeny kvadratické rovnice

$$[x - (x_1 + ix_2)] \,.\, [x - (x_1 - ix_2)] = 0,$$

neboli

$$x^2 - 2x_1x + (x_1^2 + x_2^2) = 0, \tag{1}$$

jež má reálné koeficienty.

Obráceně kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \tag{2}$$

definuje bodový pár o souřadnicích

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$