6.

KONSTRUKTIVNÍ ŘEŠENÍ APOLLONIOVY ÚLOHY NA ZÁKLADĚ ALGEBRAICKÉM.

Postupem algebraickým, resp. analytickým, odvodil různé konstrukce pro řešení ú. A. náš geometr J. Sobotka v několika pojednáních (viz Lit. č. VIIIa, b, c), kde se zabýval většinou úlohami prostorovými o dotykových koulích a isogonálních koulích a též zobecněnou ú. A. Z úvah a konstrukcí tam odvozených vyplývají planimetrické konstrukce jako speciální případy. V těchto pojednáních je též obsaženo starší analytické řešení ú. A., které podal již r. 1866 anglický geometr Casey (v „Royal Irish Academy"), z něhož lze vytěžiti rovněž zajímavé konstrukce, jež by patřily též do této části našich úvah.

Omezíme se však jen na zajímavou souvislost útvarů, kterou odvodil J. Sobotka pro úlohu prostorovou a jež doplňuje vztahy užité při řešení Gergonnově (Lit. č. VIIIb, str. 9). Můžeme ji pro ú. A. v rovině odvoditi analogicky takto:

Pro dané tři kružnice $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, které orientujeme v cykly, sestrojme osu podobnosti o (obr. 63) a potenční střed P, jehož vzdálenost od osy o budiž p. Pišme pro stručnost $P(p)$. Mysleme si pól P_1 osy podobnosti o vzhledem ke k_1 a pišme $P_1(x_1)$, kdež x_1 je opět vzdálenost bodu P_1 od o; středy daných kružnic jsou podobně $O_i(a_i)$. Na kolmici vedené bodem P k přímce o určíme nyní bod $F(x)$ rovnicí:

$$\frac{x}{p} = \frac{a_1}{x_1}.$$

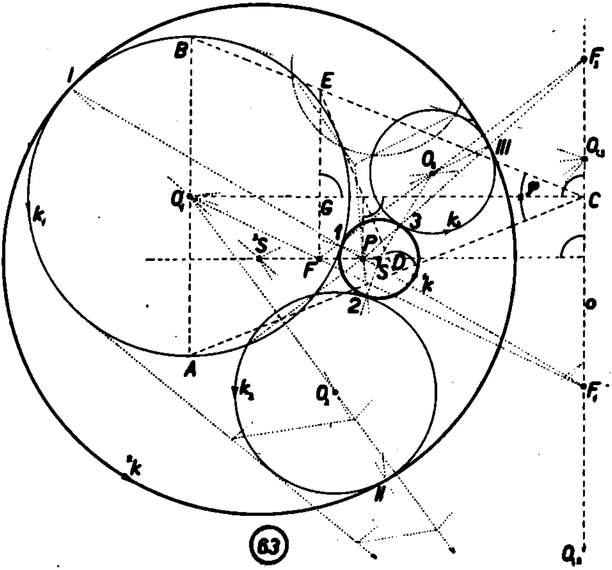
Mezi vzdáleností x_1 a vzdáleností a_1 platí[1])

$$a_1(a_1 - x_1) = r_1^2,$$

[1]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 60.

takže
$$x_1 = \frac{a_1^2 - r_1^2}{a_1},$$

a tedy
$$x = p \cdot \frac{a_1^2}{a_1^2 - r_1^2}.$$



63

Protože o je osou podobnosti, můžeme psát:
$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \frac{a_3}{r_3},$$

a proto
$$x = p \cdot \frac{a_i^2}{a_i^2 - r_i^2},$$

ať vyjdeme od kteréhokoliv pólu P_i.

Protínají tedy spojnice středu potenčního P s póly P_i osu podobnosti v bodech F_i, jimiž procházejí odpovídající spojnice pevného bodu F s body O_i. Dotykové body cyklů výsledných ú. A. s cykly k_i můžeme sestrojiti právě na základě tohoto pevného bodu F a bodů F_i, aniž póly P_i určíme, což bylo třeba při konstrukci Gergonnově. Stručně lze vyjádřiti dokázanou větu takto: Pevný bod F jest středem, z něhož se promítají středy daných cyklů na osu podobnosti do bodů F_i; spojnice těchto bodů se středem potenčním protínají k_i v dotykových bodech s hledanými cykly.

Konstrukce bodu F je pak tato (obr. týž): Středem O_1 veďme v k_1 průměr AB rovnoběžný s osou o a jeho krajní body spojme s bodem C, který je patou kolmice spuštěné s O_1 na o. Pak s potenčního středu P spustíme kolmici na O_1C a s paty její kolmici na AC do bodu D; ta protne CB v bodě E. Rovnoběžka s o vedená E protne kolmici vedenou z bodu P na o právě v hledaném bodě F.

Důkaz: Označíme-li G průsečík EF s O_1C a zavedeme-li v obrazci zatržený úhel φ, jest:

$$\overline{CG} = \overline{CE} \cdot \cos\varphi = \frac{\overline{CD}}{\cos 2\varphi} \cdot \cos\varphi = \frac{p \cdot \cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi = \frac{p}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Ježto $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r_1}{a_1}$, jest skutečně

$$\overline{CG} = p \cdot \frac{a_1^2}{a_1^2 - r_1^2} = x.$$

Tím se praktické provedení ú. A. užitím bodu F stává velmi jednoduchým i graficky přesným. Postup konstrukce je pak takovýto (obr. týž):

Sestrojíme osu podobnosti o daných cyklů; graficky stačí k spolehlivému určení potřebných středů podobnosti použíti společných tečen, rýsovaných podle přiloženého pravítka nebo, jsou-li tečny imaginární, užitím homothetických bodů s pomocí dvou trojúhelníkových pravítek. Pak sestrojíme potenční střed P; jestliže se kružnice dané neprotínají, užitím jediné kružnice pomocné, která všecky tři dané protíná. Dále sestrojíme bod F podle předchozího opět jenom rýsováním kolmic. Nyní spojíme bod F s O_i, protneme těmito spojnicemi o v bodech F_i a spojnice F_iP určují již na k_i hledané dotykové body. Přesnost konstrukce se zvyšuje také tím, že pro určení bodu F můžeme zvoliti kteroukoliv kružnici danou.

Konstrukci Sobotkovu můžeme právem považovati za praktické zdokonalení nejdůležitějšího řešení ú. A., t. j. Gergonnova, které jsme mezi různými planimetrickými řešeními této slavné úlohy uvedli na místě prvním. A konstrukcí Sobotkovou, stejně elegantní, své výklady končíme. —