O metodách rovinných konstrukcí

5. Metody transformační

In: Josef Holubář (author): O metodách rovinných konstrukcí. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940. pp. 73–97.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402966

5.

METODY TRANSFORMAČNÍ.

Už v předcházející kapitole v odst. C a D hledali jsme průsečíky dvou kuželoseček se společným ohniskem a potom průsečíky přímek a kuželoseček tak, že jsme transformovali kuželosečky v kružnice vhodně volenou kolineací, resp. transformací polární, abychom napřed našli průsečíky přímky s kružnicí, jakožto křivkou kolineární, resp. tečny kružnic, jakožto polárně sdružených s oněmi kuželosečkami; zpětnou transformací jsme pak dostali hledané body.

Jestliže však hned vhodně transformujeme v úlohách dané útvary tak, aby v příslušné úloze útvary transformací odvozené poskytly jako výsledek útvar, k němuž zpětnou transformací dostaneme útvar původně hledaný, a bude-li možno v nové soustavě úlohu snáze řešiti, je jasné, že tento postup bude výhodný k řešení konstruktivních úloh.

Ježto v ú. A. jednáme o kružnicích dotykových, bude možno užít takových transformací, při kterých kružnice přecházejí opět v kružnice, ve zvláštním případě výhodně v přímky, jako kružnice o nekonečně velkém poloměru, anebo v body, jako kružnice o poloměru nulovém; mimo to musí užité transformace být dotykové, t. j. útvary odvozené se musí dotýkati, jestliže se dotýkaly též útvary původní. [Říkáme někdy, že takové útvary (zde kružnice), resp. vlastnosti (zde dotyk) jsou invariantní vzhledem k takové transformaci.]

Těmto podmínkám vyhovuje především transformace homothetická; a také jsme vlastností útvarů podobných, resp. homothetických, hojně již použili, třebas to nebylo způsobem zde vytčeným. Dále to bude transformace zvaná dilatace a pak zvláště důležitá kruhová inverse. Také

t. zv. inverse Laguerrova, méně známá,[1]) rovněž umožňuje řešiti obecnou ú. A. převedením na úlohy jednodušší.

Velký německý matematik F. Klein (*1872), který se hojně zabýval geometrickými transformacemi a jejich významem pro uspořádání geometrie, zařadil ú. A. do t. zv. grupy transformací inversních (spolu s transformacemi homothetickými) a pak do grupy transformací dilatačních.[2])

A. Užití dilatace. Dilataci definujeme jako transformaci, při které se orientované přímky posunují o danou délku ϱ ve směru k nim kolmém v orientované přímky s původními rovnoběžné. Délka ϱ nazývá se velikostí dilatace. Směr kolmý je při tom určen i smyslem, a to takto: Zvolíme-li na orientované přímce a libovolný bod A jakožto počátek polopaprsku téhož smyslu, jaký má přímka a, pak otočením polopaprsku o 90° v kladném smyslu — tedy proti pohybu ruček hodinových — kolem A dostaneme polopaprsek k přímce a kolmý. Ta část roviny, do níž polopaprsek kolmý směřuje, je kladnou, opačná pak zápornou částí, ve které orientovaná přímka dělí rovinu. Body v kladné části roviny mají od a vzdálenosti kladné; je-li tedy velikost dilatace ϱ kladná, posune se přímka a ve směru kolmice do části kladné, kdežto je-li ϱ záporné, posune se opačně.

Je proto výhodné zvláště pro tuto transformaci místo kružnic užíti cyklů, jakožto obálek tečen stejně orientovaných s cyklem ve všech jeho bodech. Cyklus poloměru r přejde dilatací v cyklus soustředný poloměr $r - \varrho$, což je patrno z polohy dilatovaných jeho tečen; nový cyklus je téhož smyslu jako původní podle toho, je-li $r - \varrho$ a r znaménka stejného nebo opačného.

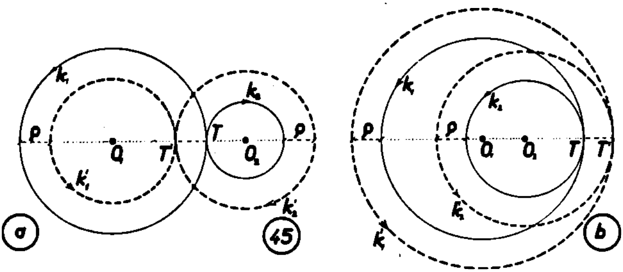
Ve zvláštním případě může tedy přejít dilatací cyklus v bod, nebo naopak bod v cyklus.

---

[1]) Viz Lit. č. VII, str. 323 nebo článek K. Lerla „O Laguerrově paprskové inversi“ v Rozhledech mat.-přírodov., Praha 1932, 11, str. 129.

[2]) Viz Lit. č. IV, str. 264 a 271.

Připomeňme, že této transformace se užívá i při školních výkladech k řešení úlohy o společných tečnách dvou kružnic. Z obr. 45a), b) je hned jasné, že pro cykly $k_1(r_1)$ a $k_2(r_2)$, které se dotýkají, platí obecně, provedeme-li s nimi dilataci velikosti ϱ (délka kladná nebo záporná), že se nové cykly $k'_1(r'_1)$ a $k'_2(r'_2)$ opět dotýkají. Při tom jsou smyslu kladného anebo záporného podle toho, jsou-li poloměry $r'_1 = r_1 - \varrho$, resp. $r'_2 = r_2 - \varrho$ kladné nebo záporné.



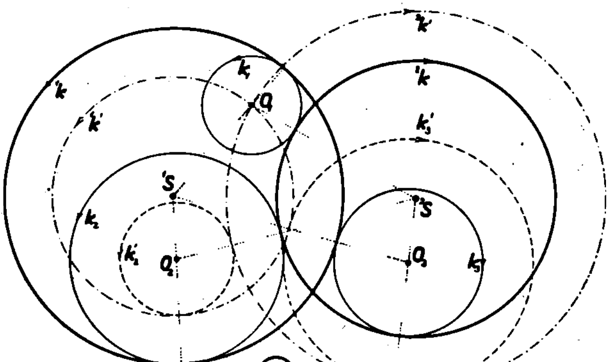
a) Máme-li řešiti obecnou ú. A., není třeba při konstrukci rozlišovati čtyři případy dvojic výsledných kružnic podle způsobu dotyku s kružnicemi danými $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, když předem tyto kružnice orientujeme jako v obr. 46 na př. ve skupinu $(++-)$. Předpokládejme, že jsme sestrojili cyklus ${}^1k({}^1S, {}^1r)$, který se dotýká daných tří cyklů k_i. Provedeme-li dilataci velikosti r_1 s celým útvarem, přejde poloměr výsledného cyklu ${}^1k$ v délku ${}^1r - r_1$ a poloměry daných cyklů v délky $r_i - r_1$, takže cyklus k_1 přejde v bod O_1.

V transformované soustavě rozřešíme nyní úlohu zvláštní (*Bkk*): sestrojíme dva cykly ${}^1k'({}^1S, {}^1r')$ a ${}^2k'({}^2S, {}^2r')$, které procházejí daným bodem O_1 a dotýkají se cyklů k'_2 a k'_3. Stačí ovšem určiti jejich středy ${}^1S$ a ${}^2S$,[3]) které jsou zároveň

[3]) V obr. 46 je podrobná konstrukce, již dříve vyložená, vynechána.

středy cyklů výsledných pro úlohu původní, jež je tím již rozřešena. Poloměry těchto cyklů pak jsou: ${}^1r = {}^1r' + r_1$ a ${}^2r = {}^2r' + r_1$.

Pro čtyři podstatně různé skupiny znamének cyklů k_i dostaneme tedy nejvýše osm reálných řešení ve čtyřech dvojicích podle toho, kolik reálných výsledků poskytují celkem příslušné úlohy (Bkk).



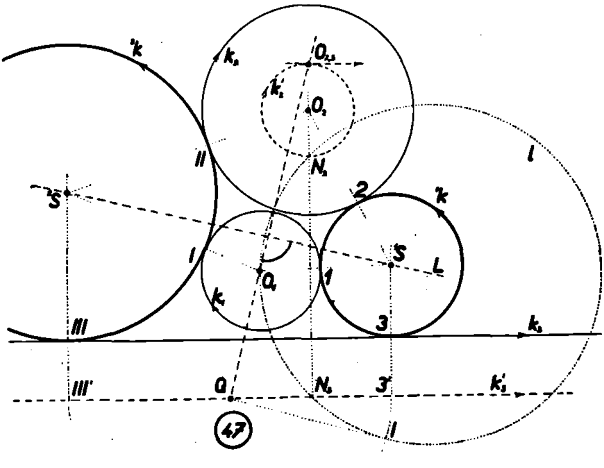
46

b) Dilatace lze použíti ve zvláštních případech ú. A., a to v případě (kkp) a (kpp); úlohy přejdou v jednoduché, a to (Bkp), resp. (Bpp).

α) Jsou-li dány dvě kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ a přímka $k_3(r_3 = \infty)$, orientujeme tyto kružnice i přímku a provedeme dilataci o velikosti r_1. Dospějeme mimo bod O_1 obdobně jako v odst. a) k cyklu k'_2 o poloměru $r_2 - r_1$ a k přímce orientované k'_3, rovnoběžné s k_3 ve vzdálenosti r_1 od k_3, jejíž umístění je jednoznačné.

Má-li na obr. 47 při zvolené orientaci přímky k_3 bod O_1 od ní vzdálenost v (kladnou), pak po provedené dilataci bude mít O_1 od přímky k'_3 vzdálenost $v' = v - r_1$. V obraze je r_1 záporné, proto v' je opět kladné: $v' = v + |r_1|$.

Řešíme nyní jmenovanou úlohu (*Bkp*) a určíme dva cykly ${}^1k'({}^1S)$ a ${}^2k'({}^2S)$, které procházejí bodem O_1 a dotýkají se cyklu k'_2 i přímky k'_3, třeba způsobem dříve uvedeným na obr. 22. V našem obraze 47 bylo použito pomocné kružnice $l(L)$ jdoucí body O_1, N_2, N_3; další bod této kružnice a také cyklu hledaného ${}^1k'$ na spojnici O_1O_{23} nebyl ani vyrýsován (vychází nepřesně a lze se obejíti bez něho). Stačí z bodu Q (průsečíku to k'_3 a O_1O_{23}) vésti tečnu QI ke kružnici l a její



délku nanésti na k'_3 od bodu Q na obě strany do bodů $3'$ a III', čímž dospějeme k dotykovým bodům cyklů ${}^1k'$ a ${}^2k'$; ty ovšem zase není třeba rýsovati: středy ${}^1S$ a ${}^2S$ výsledných cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$ leží tam, kde se kolmice vedené z bodů $3'$ a III' k tečně k_3 protínají s kolmicí spuštěnou s bodu L na spojnici O_1O_{23}. Řešením čtyř příslušných úloh (*Bkp*) dostaneme opět osm výsledných cyklů, reálných podle toho, jak dopadne řešení jednotlivých úloh (*Bkp*).

β) Je-li dána kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a dvě přímky k_2, k_3, pak tyto útvary opět orientujeme a provedeme dilataci velikosti r_1, čímž cyklus k_1 přejde ve svůj střed O_1 a orientované přímky k_2 a k_3 v přímky s nimi rovnoběžné ve vzdálenostech r_1, a to k'_2, resp. k'_3, jako v odstavci předcházejícím jednoznačně umístěné a orientované. Tím je převedena úloha (kpp) na zmíněnou úlohu (Bpp), tedy zcela jednoduchou, kterou řešíme celkem čtyřikráte pro dané útvary podstatně různě ve čtyři skupiny orientované; dospějeme tak obecně k osmi výsledkům úlohy původní.

Poznámka: Tuto transformační metodu zavedl do geometrie slavný Viète, a jak již v úvodu kapitoly 2 bylo uvedeno, má řešení ú. A. jí provedené i vzpomenutý význam historický.

B. Užití kruhové inverse. Transformace inversní, která je důležitá pro řešení četných úloh planimetrických a jež má veliký počet aplikací dalších, sahajíc hluboko do transformačních metod vyšší geometrie, byla zavedena do geometrie Stubbsem (ve Philosophical Magazine) r. 1843. Název inverse zavedl italský geometr Bellavitis (v Annali delle scienze del regno Lombardo Veneto, sv. VI). Podle základních vlastností byla pak francouzským matematikem Liouvillem (v Journal de mathématiques, sv. XII, 1847) nazvána transformací reciprokými (převrácenými) průvodiči.

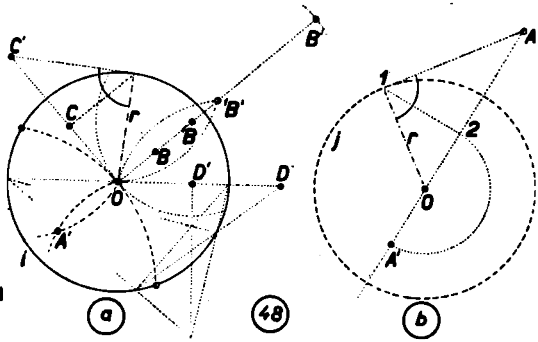
Vlastnosti inverse: Její hlavní a pro náš účel potřebné vlastnosti odvodíme.

a) Je-li dána kružnice i (obr. 48a), t. zv. základní (řídicí) kružnice inverse, jejíž střed O se zove středem inverse a r poloměrem inverse, pak body A, A' jsou navzájem inversní neboli inversně sdružené, platí-li vztah

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = r^2.$$

Hodnota konstantního součinu nazývá se též mocností inverse. Odtud plyne konstrukce bodu A', je-li dán bod A, nebo naopak, protože body inversní jsou sdruženy involutorně, t. j. náleží-li bodu A jako inversní bod A', náleží i bodu A', provedeme-li inversi, opět bod A. V obrazci jest provedena konstrukce bodu A' pouze kružítkem podle

(1Ca), str. 11. Tu doplníme ještě pro případ, když bod B je dán tak, že $\overline{OB} < \frac{r}{2}$, že tedy kružnice se středem v B a poloměru BO kružnici i neprotne. Sestrojíme nejprve bod ${}^1B$ k bodu B homothetický dle středu O v poměru n (celé číslo dostatečně velké, v obrazci $= 2$), což by bylo možno učinit opět na př. jen kružítkem, a to tak, aby $O^1B > \frac{r}{2}$; pak již sestrojíme dřívějším způsobem bod inversní ${}^1B'$. Hledaný bod B' bude n-kráte více vzdálen od O než bod ${}^1B'$.[4])



Z vlastnosti bodů A, A', jakožto sdružených pólů vzhledem ke kružnici i, je dána též výhodná konstrukce bodu A' při jakékoliv poloze daného bodu A užitím pravoúhlého pravítka anebo známá konstrukce na základě vlastností úplného čtyrrohu. Tak určen v témž obrazci bod C', resp. D'.

Body kružnice i jsou samodružnými body při této transformaci; středu inverse O, a to jedinému reálnému toho druhu, náleží jako inversní kterýkoliv bod úběžný.

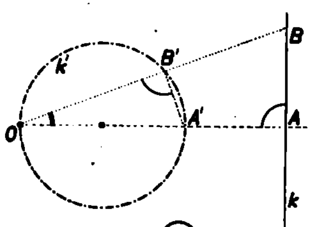
Kdyby vztah inversních bodů A, A' byl dán rovnicí

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = -r^2,$$

[4]) Jiné konstrukce mascheroniovské útvarů inversních viz Lit. č. XI, str. 47 a n.

byly by body A a A' na různých stranách od středu inverse a kružnice základní poloměru imaginárního ri. Často se tato imaginární kružnice nahrazuje kružnicí reálnou j (poloměru r), jakožto svým „ideálním“ obrazem (obr. 48b).

b) Pohybuje-li se bod A po přímce k (obr. 49), inversní body A' vytvoří kružnici k', jdoucí středem inverse O. Důkaz: Budiž A' bod inversní k bodu A přímky k na kolmici spuštěné s O na k, k jinému bodu B přímky k inversní bod B'. Platí:



49

$$\overline{O'A} \,.\, \overline{OA'} = \overline{OB} \,.\, \overline{OB},$$

neboli

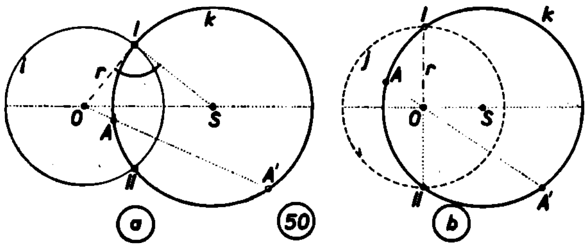
$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB'} : \overline{OA'}.$$

Trojúhelníky OAB a $OB'A'$ jsou tedy podobné, takže úhel $OB'A'$ jest pravý. Pokud bod B jest na přímce k, leží body inversní B' na kružnici k' inversně sdružené s přímkou k. Z involutorního přiřazení bodů inversních plyne i naopak, že každé kružnici, která prochází středem inverse, odpovídá jako útvar inversní přímka kolmá na střednou kružnice inverse i a kružnice dané. Toliko přímky, které jdou středem inverse, t. zv. paprsky inverse, jsou samy k sobě inversní.

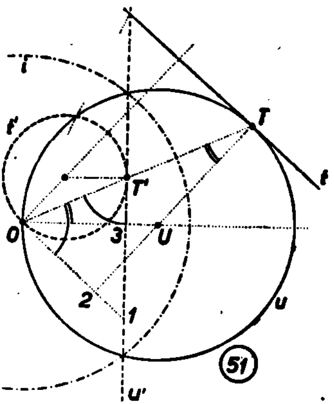
c) Kružnici, která neprochází středem inverse, náleží jako inversní útvar opět kružnice. Důkaz této věty byl už vlastně proveden v (4Da), str. 69, obr. 42 pro body P kružnice p, neboť podle vztahů tam použitých jsou body $\overline{T}$ inversně sdruženy s body P a při tom body $\overline{T}$ vyplňují kružnici tam označenou $\overline{c}$. Vidíme odtud i dále, že kružnice inversně sdružené jsou vždy zároveň vzájemně homothetické podle téhož středu O, a protínají-li se, pak jejich průsečíky leží na kružnici inverse.

Má-li střed inverse O při zvláštní poloze kružnice k

mocnost k ní r^2, tedy rovnu mocnosti inverse, je **kružnice** k **inversní sama k sobě** tak, že body její po dvou na každém paprsku inverse jsou spolu sdruženy; kružnice k protíná kružnici inverse i orthogonálně (obr. 50a). Při záporné mocnosti inverse $-r^2$ protíná taková kružnice k, k níž opět střed inverse má mocnost $-r^2$, ideální obraz j kružnice i diametrálně (obr. 50b).



d) Jestliže se kružnice (křivky) dotýkají v bodě T, mají v tomto bodě společnou tečnu t a dotykovou kružnici u, kterou lze vésti středem inverse O (obr. 51). Kružnice (křivky) inversní mají v společném bodě T', který je inversní k T, společnou tečnu u', inversní ke kružnici u, neboť i kružnice t', inversní k t, se přímky u' v bodě T' dotýká. To plyne z rovnosti zatržených úhlů při O a při T' v trojúhelníku $OT'1$, kdež $O1$ jest tečna kružnice t' v bodě O rovnoběžná s přímkou t. Jest postupně:



$\sphericalangle\, 1OT' = R - \sphericalangle\, OT2$ (v pravoúhlém $\triangle\, O2T$),

$$\sphericalangle\, OT'1 = R - \sphericalangle\, T'O3 \text{ (v pravoúhlém } \triangle\, O3T');$$

ale

$$\sphericalangle\, OT2 = \sphericalangle\, T'O3 \text{ (v rovnoramenném } \triangle\, TOU),$$

proto

$$\sphericalangle\, 1OT' = \sphericalangle\, OT'1.$$

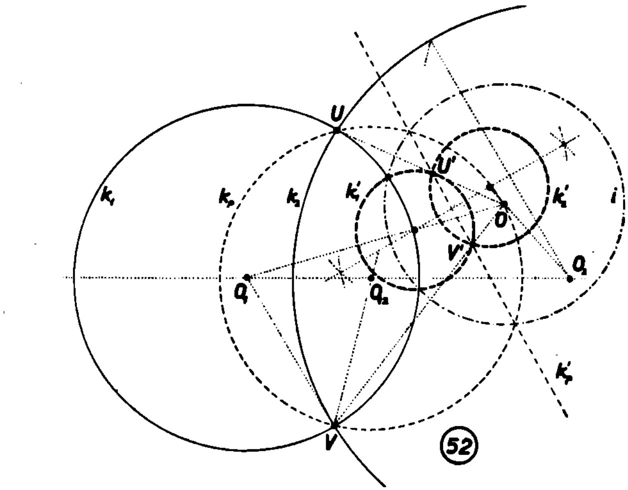
Jest proto i $T'1$ tečnou kružnice t'. Dotýkají-li se tedy dvě křivky, dotýkají se i jejich křivky inversní. Inverse je proto transformací dotykovou.

Z výkladů dřívějších (3Aa) na str. 21, kde jsme již také název bodů inversních uvedli, můžeme odvoditi hned další vlastnosti transformace inversní. Z obr. 7 a z rovnice $\overline{OT}_1 \,.\, \overline{OT}_2 = \overline{OA}_1 \,.\, \overline{OA}_2$ vyplývá, že kružnice k_1, k_2 jsou navzájem inversně sdružené pro bod O jakožto střed inverse a že je paprsek inverse protíná v T_1, resp. T_2 pod stejnými úhly opačného smyslu, tedy isogonálně. Kdyby body T_1, resp. T_2 téhož obrazce procházely ještě jiné dvě kružnice k'_1, resp. k'_2 vzájemně sdružené při téže inversi, protínal by je týž paprsek rovněž isogonálně; proto i úhly kružnic k_1, k'_1 a kružnic k nim inversních k_2, k'_2 v bodech inversních by byly stejné a opačného smyslu. Můžeme tedy prosloviti větu, kterou lze i jinak dokázati z dřívějších pouček: Inversí přecházejí kružnice (a ovšem i křivky) v kružnice (křivky), jež se protínají v úhlu téže velikosti, ale opačného smyslu jako kružnice původní; říkáme, že inverse je transformací isogonální.

e) Každé dvě kružnice, které se protínají nebo dotýkají, a tím též svazek kružnic těmito dvěma kružnicemi určený, můžeme inversí transformovati ve svazek přímek, resp. osnovu rovnoběžek. Stačí zvoliti střed inverse v základním bodě svazku podle věty sub b).

Dvě kružnice se neprotínající i svazek jimi určený lze transformovati v kružnice soustředné, zvolíme-li střed inverse v základním bodě svazku kružnic k^o, které protínají kružnice prvého svazku orthogonálně (viz 4Ab na str. 45). Inversí přejde totiž svazek kružnic k^o ve svazek přímek a kružnice svazku prvého v kružnice, které protínají svazek přímek orthogonálně, tedy v kružnice soustředné.

f) Z obr. 28 a z rovnic k němu se vztahujících vyplývá tato věta: Každé dvě kružnice k_1, k_2 lze považovati za útvary navzájem inversní, a to pro oba středy podobnosti jako středy inversí. Základní kružnice těchto inversí jsou příslušné kružnice potenční k_p a k'_p. Třeba však rozlišovati:

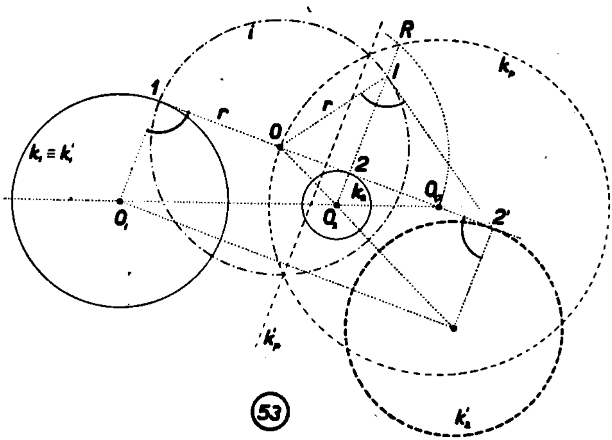


52

Kružnice potenční je reálnou kružnicí inverse při kladné mocnosti ($\overline{OR}^2$) nebo je ideálním obrazem imaginární kružnice inverse při záporné mocnosti ($-\overline{O'R'}^2$). Kružnice k dotýkající se k_1 a k_2 v inversních bodech T_1 a T_2 jsou při tom samy k sobě inversní, zrovna tak, jako kružnice k protínající k_1 a k_2 isogonálně (viz obr. 19); kružnici potenční k_p protínají pak tyto kružnice k orthogonálně, po případě při záporné mocnosti inverse diametrálně.

Obě kružnice potenční půlí úhel obou kružnic k_1, k_2, což je důsledek vlastností odvozených sub d), a samy k sobě jsou tedy kolmé; platnost této věty je z předešlých výkladů jasná v případě, když se kružnice k_1, k_2 protínají reálně. Případ imaginárního průseku zde pomineme.

g) Mysleme si nyní inversi novou (obr. 52), aby střed inverse ležel v bodě O na kružnici potenční k_p daných



53

kružnic k_1, k_2. Poloměr inverse může býti jakýkoliv. Pak kružnice k_p se transformuje v přímku k'_p a kružnice k_1, k_2 přejdou v kružnice k'_1, k'_2 svírající s přímkou k'_p stejné úhly opačného smyslu, protínajíce k'_p ve dvou společných bodech U', V'; jsou tedy kružnicemi souměrnými podle osy k'_p a tedy stejných poloměrů.

Totéž by platilo[5]) i pro kružnice k_1, k_2, jež by se neprotí-

[5]) Kdybychom totiž úhel dvou kružnic poloměrů r_1, r_2 a středné c definovali z věty kosinové užité na $\triangle\, O_1O_2U$ rovnicí

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2r_1r_2}$$

naly. Takový případ je proveden v obr. 53, kde střed inverse byl zvolen v průsečíku O kružnice k_p a společné tečny 12 daných kružnic k_1, k_2; poloměr inverse r byl zvolen rovný délce $O1$ tečny kružnice k_1. Základní kružnice inverse i protíná tedy k_1 orthogonálně, takže kružnice k_1 a inversní k ní k'_1 se ztotožňují. Kružnice k'_2, inversní k dané k_2 a shodná s k'_1, byla určena užitím bodu $2'$, inversně sdruženého s bodem 2.

Řešení úloh inversí. Uvedené vlastnosti transformace inversní dovolují řešiti výhodně nejen obecnou ú. A. a její případy zvláštní, ale též úlohy obsahující podmínku orthogonálního (a také diametrálního) protnutí daných kružnic, některé z nich dokonce zvlášť jednoduše. Vlastnost odvozená sub d) v předešlém odstavci umožňuje pak použíti inverse i pro skupinu úloh, jež obsahují podmínku protnutí kružnic nebo přímek pod danými úhly.

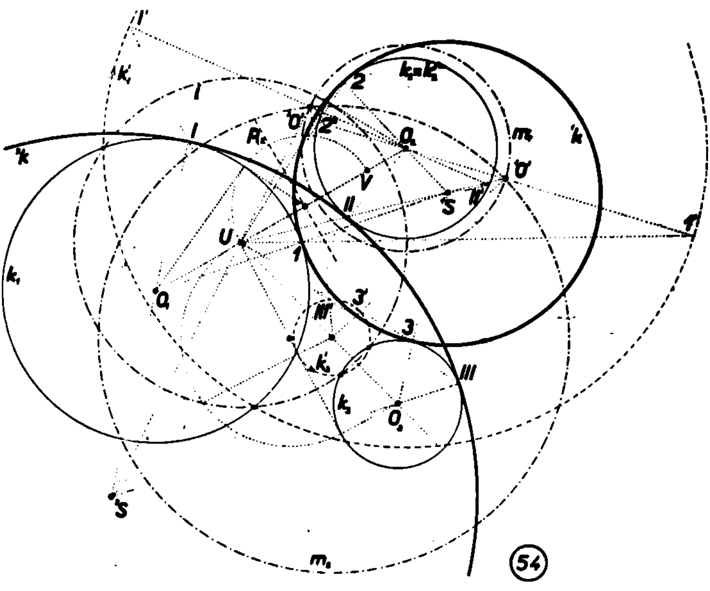
a) Při obecné ú. A. zvolme nejprve případ, kdy aspoň dvě kružnice, na př. k_1 a k_2, se neprotínají. Pak můžeme konstrukci uspořádati takto: Podle vlastnosti sub e) transformujeme kružnice k_1 a k_2 v kružnice soustředné k'_1 a k'_2. Volíme-li pak poloměr inverse rovný délce tečny vedené ze středu inverse k jedné dané kružnici, transformuje se tato kružnice v samu sebe.

V soustavě nové rozřešíme úlohu: Sestrojiti kružnici, která se dotýká dvou kružnic soustředných k'_1 a k'_2 a kružnice k'_3. Známe zde poloměr kružnic, které se dotýkají k'_1 a k'_2, t. j. $r' = \frac{r'_1 + r'_2}{2}$ nebo $\frac{r'_1 - r'_2}{2}$; tato druhá hodnota poloměru by byla obsažena v první, kdybychom užili cyklů. Úloha tedy přechází v úlohu jednoduchou (krk) skupiny δ) v (2B) na str. 16.

---

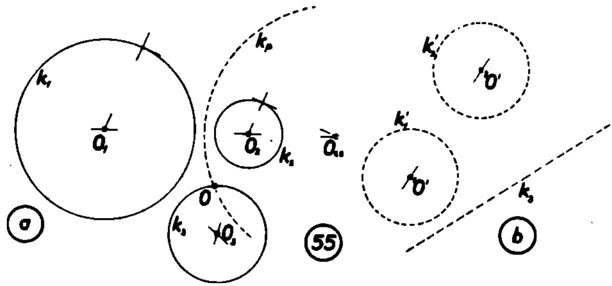
a vypočetli $\cos\alpha'$, kde α' je úhel kružnic inversních, pak bychom snadno potvrdili rovnost $\cos\alpha$ a $\cos\alpha'$ i pro $|\cos\alpha| > 1$, t. j. při $r_1 - r_2 > c > r_1 + r_2$, čili když úhel α je imaginární.

V obr. 54 jsme zvolili střed inverse v bodě U, jenž byl sestrojen tak jako v obr. 23, a poloměr tak, aby $k'_2 \equiv k_2$. Kružnice k'_i, $i = 1, 2, 3$, nyní orientujeme, na př. v pořadí $(++-)$, takže poloměr cyklů zde výsledných má jedinou hodnotu $\left(r' = \dfrac{r'_1 + r'_2}{2} > 0\right)$. G. m. sestrojené podle (4Afα)



na str. 57 jest pro dvojici (k'_1, k'_2) kružnice m_1 a pro podmínky (k'_3, r') kružnice m_2; v průsečících těchto kružnic leží dva středy $^1O'$ a $^2O'$ dotykových cyklů $^1k'$ a $^2k'$. Tyto cykly není třeba ani rýsovati, nýbrž jen jejich body dotyku $1', 2'$ a I', II' na k'_1, resp. k'_2 spojnicemi $^1O'O_2$, resp. $^2O'O_2$. Z nich dostaneme dotykové body dvou kružnic výsledných ^1k a ^2k s k_1, resp. k_2 na příslušných paprscích inverse. Z nich doplníme snadno středy ^1S a ^2S výsledných kružnic; jsou ovšem i na spojnicích U^1O', resp. U^2O'. Příslušné další skupiny znamének cyklů k'_i poskytly by stejným postupem dalších šest řešení. —

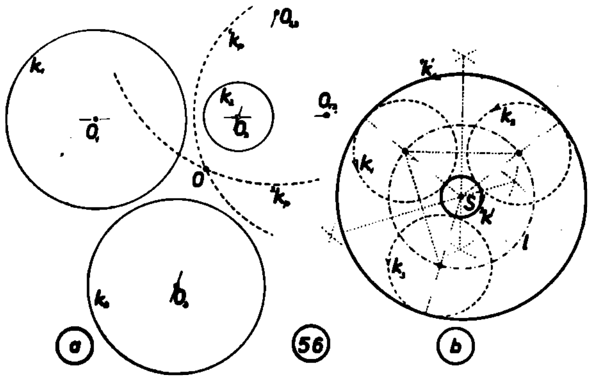
Jestliže dané tři kružnice k_i se vesměs protínají, zvolíme střed inverse v některém průsečíku dvou kružnic, na př. k_1 a k_2. Transformací přejdou k_1 a k_2 v přímky k'_1 a k'_2, kružnice k_3 v k'_3 a pro útvary odvozené řešíme úlohu (*ppk*) některým způsobem dříve uvedeným. —



Užitím vlastností sub g) možno postupovati ještě jinak. Zvolíme-li střed inverse O na některé kružnici potenční k_p na př. dvojice k_1, k_2, bude odvozený útvar obsahovati dvě kružnice k'_1 a k'_2 stejných poloměrů, a jestliže kružnice k_p protne kružnici k_3, pak volbou středu inverse v průsečíku O (obr. 55a) dostaneme dokonce po transformaci kromě dřívějších dvou kružnic k'_1 a k'_2 jako třetí útvar odvozený přímku k'_3 (obr. 55b). Úloha týkající se útvarů odvozených provede se pak výhodně dilatací.

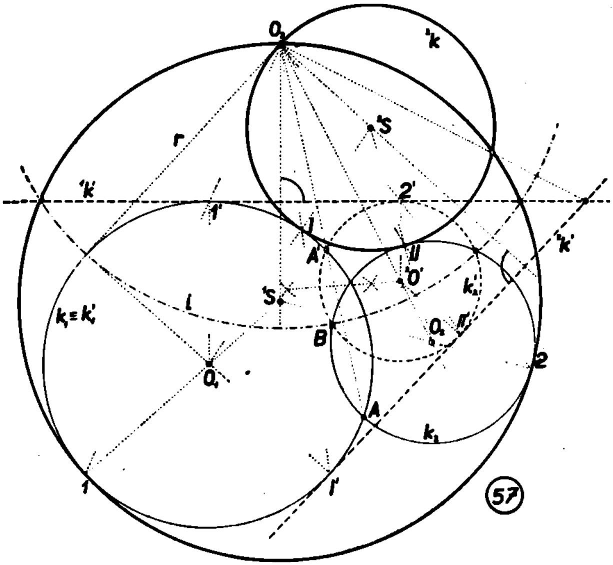
Kdyby poloha daných kružnic byla tak příznivá, že by se dvě kružnice potenční, na př. dvojic k_1, k_2 a k_2, k_3 protínaly (obr. 56a), volili bychom střed inverse v tomto průsečíku O; kružnice dané by transformací přešly ve tři kružnice shodné (obr. 56b) a řešení úlohy v nové soustavě bylo by zvlášť jednoduché. (Dva výsledky — nejjednodušší — cykly soustředné jsou v obr. b) vyznačeny.)

b) Všimneme si ještě čtyř zvláštních případů ú. A. Úlohy (kkp) a (kpp) řešili bychom inversí podobně jako v případě obecném. Poněkud jinak utváří se řešení případu (kkB) a (kpB). Zvolíme-li střed inverse v daném bodě O_3, bude v inversi odpovídati tomuto bodu přímka úběžná, dalším daným prvkům pak dvě kružnice k'_1, k'_2. Kružnice, které se mají dotýkati k'_1, k'_2 a přímky úběžné, mají nekonečně velké poloměry a jsou tedy společnými tečnami kružnic k'_1 a k'_2.



V obr. 57 je proveden případ (kkB). Poloměr inverse r byl volen tak, aby $k'_1 \equiv k_1$. Kružnice k'_2, jejíž střed $^2O'$ leží na přímce O_2O_3, byla sestrojena pomocí svého bodu A', inversního k A, a bodu samodružného B na kružnici inverse i. Společné tečny $^1k'$ a $^2k'$ kružnic k'_1, k'_2 se protínajících jsou jen dvě reálné, a proto také jsou jen dvě reálné kružnice výsledné ^1k a ^2k. Středy těchto kružnic, body ^1S a ^2S, leží na kolmicích, vedených středem inverse k tečnám $^1k'$ a $^2k'$; byly určeny použitím dotykových bodů $1, 2$ a I, II kružnice ^1k, resp. ^2k s kružnicemi danými, inversních k bodům $1', 2'$ a I', II' tečny $^1k'$, resp. $^2k'$.

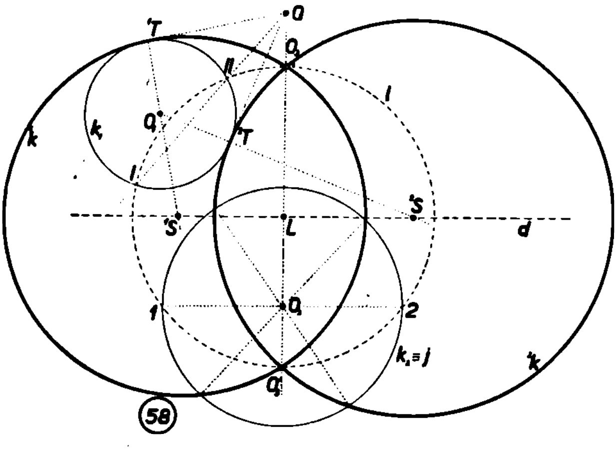
c) Souvislost podmínky dotyku a průseku orthogonálního nebo diametrálního při kružnicích, vyložená již v kapitole 4 (obr. 28), poskytuje možnost řešiti inversí úlohy, které obsahují podmínku (k^o) nebo (k^d) ve spojení s podmínkou (k) a pod. takto: Považujeme-li danou kružnici, která má býti proťata orthogonálně nebo diametrálně za



57

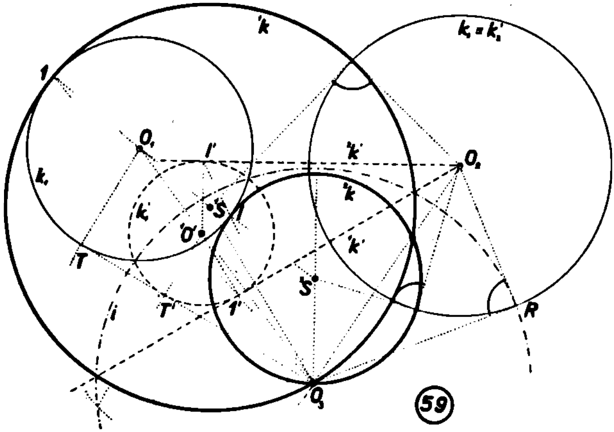
základní kružnici inverse i, resp. j, dospějeme od podmínky (k^o), resp. (k^d) k další podmínce (k) a pod. pro úlohu odvozenou; tedy opačně, než tomu bylo v (4Bc) na str. 59.

Tak je řešena v obr. 58 úloha (kk^dB), sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, diametrálně protíná danou kružnici $k_2(O_2, r_2)$ a prochází daným bodem O_3. Kružnici k_2 zvolíme za ideální obraz j kružnice inverse, jejíž mocnost je záporná, rovna $-r_2^2$. K bodu O_3 sestrojíme inversní bod O'_3, kterým také musí procházeti kružnice hledaná. Rovněž tak by se hledaná kružnice musela dotýkati kružnice k'_1, inversní ke kružnici k_1, což v obrazci jako zbytečné nebylo sestrojeno. Bod O'_3 určíme na paprsku inverse O_2O_3 pomocnou kružnicí $l(L)$, která protíná diametrálně kružnici j v bodech *1, 2* a prochází bodem O_3. Kružnice l pak použijeme i pro řešení úlohy $(k_1O_3O'_3)$ známým způsobem. Výsledné dvě kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$, samy k sobě inversní, řeší současně úlohu původní.



58

d) Některé úlohy s podmínkou (k^o), a to ve spojení s podmínkou (B) lze inversí řešiti zvlášť výhodně. Ukážeme to aspoň na příkladě (kk^oB) v obr. 59; úlohou jest nalézti kružnici, která se dotýká $k_1(O_1)$, protíná orthogonálně $k_2(O_2)$ a prochází bodem O_3. Střed inverse zvolíme v bodě O_3, poloměr inverse tak, aby $k'_2 \equiv k_2$, a sestrojíme kružnici k'_1, inversní ke k_1 (v obrazci byl určen bod T', inversní k bodu T na tečně O_3T kružnice k_1). Ježto bodu O_3 přináleží jako útvar inversní přímka úběžná, budou kružnice ${}^1k'$ a ${}^2k'$ řešící úlohu pro útvary odvozené tečnami kružnice k'_1, vedenými z bodu O_2, který je středem kružnice k'_2, jež má být proťata orthogonálně. Střed ${}^1S$ prvé výsledné kružnice ${}^1k$ leží jednak na kolmici s O_3 spuštěné na tečnu ${}^1k'$, jednak na spojnici dotykového bodu *1* (inversního k dotykovému

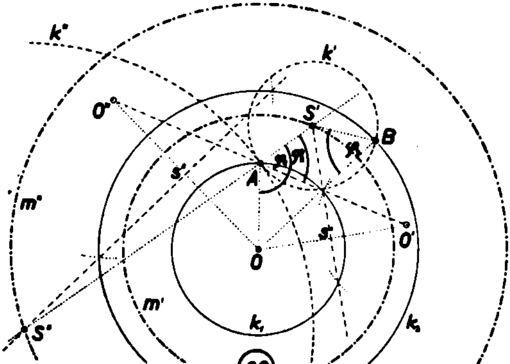


59

bodu *1'*) na kružnici k_1 se středem této kružnice. Podobně dostaneme i střed ${}^2S$ výsledné kružnice ${}^2k$. Kontrola přesnosti je v tom, že kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$ se protínají ze známého důvodu na středné O_2O_3.

Řešení zobecněné ú. A. Velikost úhlů, ve kterých se kružnice protínají, se při transformaci inversní podle věty sub d) nemění, takže transformujeme-li dané dvě kružnice výhodně dle e) na dvě kružnice soustředné, resp. na dvě přímky, převedeme zobecněnou ú. A. označenou v kapit. 2 sub E ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$) na některou zvláštní úlohu této skupiny, a to na úlohu sestrojiti kružnici, která buď protíná dvě kružnice soustředné v úhlech dané velikosti φ_1, resp. φ_2 a kružnici třetí v daném úhlu φ_3, nebo která protíná dvě přímky v daných úhlech φ_1, resp. φ_2 a mimo to kružnici v daném úhlu φ_3. Řešením těchto zvláštních úloh pro útvary odvozené bude pak po inversi řešena i úloha původní, t. j. ú. A. zobecněná.[6])

a) Odvodíme nejprve konstrukci g. m. středů kružnic, které protínají dvě kružnice soustředné $k_1(O, r_1)$ a $k_2(O, r_2)$ v daném úhlu φ_1 a φ_2. Při tom vezmeme velikosti úhlů absolutně (bez zřetele na jejich smysl), což povede k výkladu pro náš účel jednoduššímu.



60

Je-li sestrojena v obr. 60 jedna kružnice $k'(S')$, která protíná k_1 v bodě A v úhlu φ_1 a k_2 v bodě B v úhlu φ_2, mysleme si bod O' souměrně sdružený s O podle osy souměrnosti s' bodů A, B. Ježto úhel $OAS' = \varphi_1$ a úhel $OBS' = \varphi_2$, jest úhel $OAO' = \varphi_1 - \varphi_2$, tedy známý. Dále jest úsečka $AO' = OB = r_2$ také známá. Můžeme tedy bod O' sestrojiti, zvolíme-li na k_1 bod A, jakožto vrchol trojúhelníka OAO' dokonale určeného. Středem S' kružnice k' jest pak průsečík osy souměrnosti bodů O, O' a toho ramene úhlu φ_1, které středem O neprochází. Kružnice m', soustředná s kružnicemi danými a procházející bodem S', jest jednou částí hledaného

[6]) Viz Lit. č. VII, str. 304 a n.

g. m. Bod O' jest určen vzdáleností r_2 dvojznačně, takže naneseme-li r_2 od bodu A do bodu O'', souměrného s O' podle středu v bodě A — úhel OAO'' bude roven $2R - (\varphi_1 - \varphi_2)$ — poskytne bod O'' stejným postupem jako bod O' ještě střed S'' druhé kružnice k'', která vyhovuje daným podmínkám a jde bodem A; kružnice m'' soustředná s m' jdoucí S'' jest druhou částí g. m. hledaného. Snadno lze ukázati, že nanesením φ_2 od ramene AS' úhlu φ_1 opačně dojdeme opět jen k bodům S' a S''.

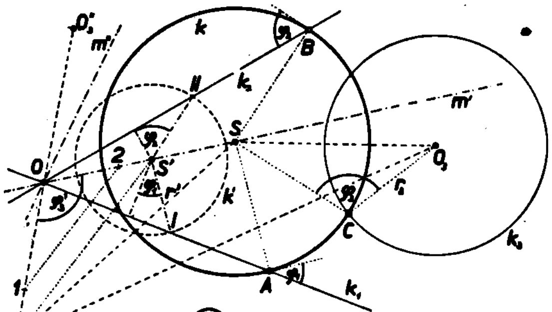
Je dále patrno, že všecky kružnice k', jejichž středy jsou na m' a jež splňují dané podmínky, mají stálý poloměr $r' = \overline{S'A}$, jednou z nich tedy určený, a zrovna tak, že kružnice k'' mají stálý poloměr $r'' = \overline{S''A}$.

Je-li dána nyní ještě kružnice k_3, která má být proťata v daném úhlu φ_3 kružnicemi nalezených poloměrů r', resp. r'', dostaneme pro každý poloměr dvě kružnice soustředné s k_3, jakožto příslušné g. m. středů kružnic pro dvojici podmínek $(k^\varphi r)$. Úloha $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$ má tedy obecně **osm řešení**, tak jako obecná ú. A.

b) Pro druhou odvozenou úlohu určíme opět nejprve g. m. středů kružnic, které protínají dvě přímky k_1 a k_2 v daných úhlech φ_1 a φ_2.

Protíná-li na obr. 61 kružnice $k'(S', r')$ přímku k_1 v bodě I v úhlu φ_1, pak její střed je vzdálen od k_1 o délku $r' \cos \varphi_1$; od přímky k_2 je tedy vzdálen o délku $r' \cos \varphi_2$. Poměr těchto vzdáleností je proto $\dfrac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} =$ konst., při čemž znaménko může býti kladné i záporné. G. m. jsou tedy dvě přímky m' a m'', jejichž body mají od přímek k_1, k_2 vzdálenosti v daném poměru $(\pm)$. Tvoří s k_1 a k_2, jak známo, harmonickou čtveřinu paprskovou. Je dále patrno, že všecky kružnice, vyhovující daným podmínkám, jsou homothetické podle středu $O \equiv k_1 \times k_2$, mají-li středy jednou na m', po druhé na m''.

V obrazci budiž ještě dána kružnice $k_3(O_3, r_3)$, která má být proťata výslednou kružnicí v daném úhlu φ_3. Jestliže touto výslednou kružnicí je $k(S)$, tedy kružnice homothetická s kružnicí pomocnou k', a je-li vždy jeden průsečík její s k_i $(i = 1, 2, 3)$ bod A, resp. B, resp. C, pak úhel $SCO_3 = \varphi_3$. Sestrojme úhel $\varphi'_3 = \varphi_3$ při vrcholu O a rameni m' a doplňme $\triangle\, SOO'_3$ tak, aby byl podobný $\triangle\, SCO_3$. Pak platí postupně:



61

$$\frac{\overline{SO'_3}}{\overline{SO_3}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{S'O}}{\overline{S'I}} = \frac{\overline{S'O}}{r'} = n$$

a rovněž:

$$\frac{\overline{OO'_3}}{\overline{CO_3}} = n = \frac{\overline{OO'_3}}{r_3},$$

a proto: $$\overline{OO'_3} = n \,.\, r_3.$$

Volbou pomocné kružnice k' známe tedy hodnotu poměru n a můžeme bod O'_3 snadno sestrojiti: Na obr. jsme učinili $\overline{O1} = r_3$, $\overline{O2} = r'$ a bodem S' jsme vedli se spojnicí 12 rovnoběžku, která proťala spojnici $O1$ v bodě O'_3. Z rovnice $\dfrac{\overline{SO'_3}}{\overline{SO_3}} = n$ plyne, že g. m. bodu S jest Apolloniova kružnice m_1, sestrojená pro pevné body O'_3 a O_3 a dělicí poměr hodnoty $\pm n$.[7]) Průsečíky kružnice m_1 (na obr. není sestrojena) s přímkou m' jsou pak dva středy hledaných kružnic naší úlohy $(p^\varphi p^\varphi k^\varphi)$.

Použijeme-li úhlu $2R - \varphi_3$, dostaneme ještě další bod, a to O''_3 souměrný podle středu O s bodem O'_3, který určí podobně pro týž poměr $\pm n$ druhou Apolloniovu kružnici m_2 a poskytne obecně na přímce m' další dva výsledné středy. Nanesením úhlu φ_3 na opačnou stranu ramene m' nedospěli bychom k novým výsledkům.

Na přímce m'' dostaneme pak rovněž obecně čtyři výsledné středy, tedy dohromady obecně zase osm řešení.

c) Konstrukcí v předcházejících odstavcích jsou také řešeny zvláštní případy zobecněné ú. A. $(k^\varphi k^\varphi \chi^\varphi)$ a $(k^\varphi k^\varphi B)$.

Tuto poslední úlohu a všecky úlohy v kap. 2 uvedené, které obsahují aspoň jednu podmínku (B), lze řešiti inversí zvláště výhodně tak, že zvolíme střed inverse v daném bodě. Výsledné kružnice se tím transformují v přímky.

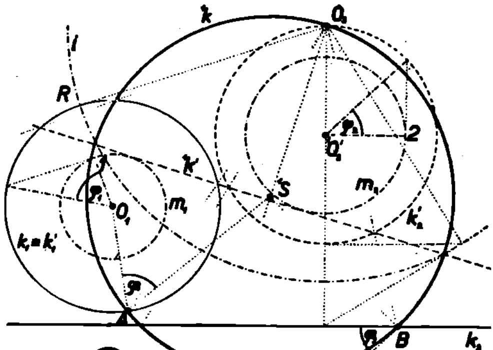
Tak provedeme v obr. 62 aspoň úlohu $(k^\varphi p^\varphi B)$; máme sestrojiti kružnici, která protíná danou kružnici $k_1(O_1)$ v daném úhlu φ_1, danou přímku k_2 v daném úhlu φ_2 a prochází daným bodem O_3.

Inversi středu O_3 volme tak, aby základní kružnice i protínala k_1 orthogonálně, takže $k'_1 \equiv k_1$; přímka k_2 se transformuje v kružnici k'_2. Kružnice, které řeší úlohu pro útvary odvozené a mají nekonečně velké poloměry, určíme jako čtyři společné tečny ${}^1k', {}^2k', \ldots$ kružnic pomocných m_1 a m_2, soustředných s kružnicí k'_1, resp. k'_2, o poloměrech $r_1 \cos \varphi_1 = O_1 1$, resp. $r'_2 \cos \varphi_2 = {}^1O'_2 2$. Kružnice ${}^1k, {}^2k, \ldots$, inversní k oněm tečnám jsou hledané kružnice o středech ${}^1S, {}^2S, \ldots$ Na obrazci je vyrýsována jedna výsledná kružnice ${}^1k$, odpovídající jedné tečně ${}^1k'$ kružnic m_1, m_2; úloha je ovšem obecně čtyrznačná.

[7]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 58.

d) Zvláště jednoduše lze pak řešiti úlohu $(p^\varphi p^\varphi p^\varphi)$, neboť příslušná g. m. podmínek $(p^\varphi p^\varphi)$ jsou přímky, odvozené v odst. b). Úloha má tedy čtvero řešení.

Úlohu $(p^\varphi p^\varphi B)$ lze řešiti zcela jednoduše, a to homothetií: středem homothetie kružnic výsledných a pomocných je průsečík daných přímek; další postup pak je již jasný podle výkladů odst. b). —



62

e) Jestliže v úloze $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$ úhly φ_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou si rovny, pak máme protnouti dané tři kružnice k_i isogonálně v daném úhlu φ. Mimo řešení inversí, které jsme vyložili pro případ obecný, můžeme pro tento zvláštní případ použít někdy vhodně i vlastností kružnic isotomických, známých nám z poznámky na str. 39. Sestrojíme-li pro dané tři kružnice (orientované v cykly) osu podobnosti o, dostaneme na o dva základní body U, V svazku kružnic isotomických. Jsou-li tyto body reálné, přejde naše úloha na zvláštní úlohu $(k^\varphi BB)$, již řešíme snadno podle odst. c).

f) Při této příležitosti zmíníme se ještě o úloze isogonálního protnutí daných kružnic kružnicí hledanou, neudáme-li velikost úhlu φ. Aby úloha byla určitá, musí býti dány čtyři kružnice k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, jež jest protnouti isogonálně. Úlohu řešíme tak, že pro dvojici orientovaných kružnic k_i, na př. pro $i = 1, 2$, najdeme kružnici potenční ${}^1k_p$. Ta bude hledanou kružnicí podle f) na str. 83 proťata orthogonálně (resp. diametrálně). Podobně i potenční kružnice ${}^2k_p$ další dvojice cyklů k_i $(i = 2, 3)$ a ${}^3k_p$ pro dvojici k_i $(i = 3, 4)$. Kružnice hledaná protíná pak tyto tři potenční kružnice orthogonálně (nebo diametrálně) a lze ji sestrojiti způsobem vyloženým v kapit. 4.

Pro osm podstatně různých skupin znamének cyklů k_i — skupiny znamének pro všecky příslušné cykly k_i vesměs opačných poskytují zřejmě týž výsledek — dostaneme obecně osm výsledných kružnic isotomických. —