O metodách rovinných konstrukcí

1. Přehled metod planimetrických konstrukcí

In: Josef Holubář (author): O metodách rovinných konstrukcí. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940. pp. 5–13.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402962

1.

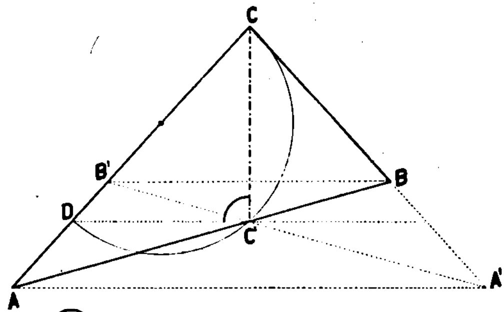
PŘEHLED METOD PLANIMETRICKÝCH KONSTRUKCÍ.

Metody řešení konstruktivních úloh planimetrických lze rozlišiti podle toho, pracuje-li se s geometrickými prvky a útvary přímo beze všech výpočtů anebo vyšetřují-li se geometrické útvary pro konstrukci pomocí algebry, hlavně na základě souřadnic. První metoda jest ryze geometrická, druhá pak je metoda na základě algebraickém. Metoda první používá jako pomůcky obrazců, čímž se stává velmi názornou, a byla v elementárních částech geometrie hojně využita již ve starém Řecku. Bývá také někdy nazývána metodou synthetickou, ježto vytváří a vyšetřuje geometrické útvary na základě vlastností a souvislostí těchto útvarů anebo jejich částí, při čemž postupuje od jednodušších vztahů k složitějším. Metoda na základě algebraickém nebo též analytickém vypočítává veličiny hledané z veličin daných proto, abychom došli k výslednému výrazu, jenž určuje veličiny hledané, a z něho mohli sestrojiti hledaný útvar. Jest však i metoda algebraická vhodným postupem, jak často jednoduše řešiti úlohy konstruktivní.

Metoda ryze geometrická, pokud máme na mysli hlavní myšlenku konstruktivního postupu při řešení úlohy, jest dvojího druhu, a to metoda geometrických míst a metoda transformační. Toto rozdělení platí však jen při řešení úloh jednoduchých; řešíme-li konstruktivní úlohu složitější, vniká postup transformační do řešení používajícího geometrických míst a zase naopak při metodě transformační použité při úloze složitější vyskytnou se některá, aspoň základní geometrická místa.

Při řešení mnohých úloh užíváme často speciálních vztahů, odvozených mezi útvary danými a hledanými, že nelze dobře mluviti ani o prvé ani o druhé metodě, neboť se obě metody prostupují a výlučný jejich ráz se podřizuje oněm speciálním vztahům; říkáme, že jsme použili metody založené na speciálních vztazích.

A. Úloha řešená několika metodami. Abychom lépe objasnili postup při jednotlivých metodách, provedeme jako příklad úlohu řešenou několika metodami, při čemž uvidíme, že všechny metody nejsou vždy stejně výhodné.



1

Zvolíme úlohu: Sestrojiti trojúhelník ABC, který je dán dvěma stranami a, b a délkou osy o_γ úhlu γ, tedy třemi nezávislými prvky.

a) K speciálním vztahům dospějeme rozborem. Na obr. 1 je hledaný trojúhelník ABC ;$\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$. Vedeme-li kolmice k ose úhlu γ koncovým bodem osy C' a vrcholy A, B, pak na straně AC dostaneme body, které tvoří harmonickou čtveřinu, protože platí $(AB'CD) = -1$; to plyne z rovnoramenného lichoběžníka $AA'BB'$, který považujeme za úplný čtyrroh.[1])

Konstrukci tedy provedeme tak, že na danou stranu, na př. b, naneseme $\overline{CB'} = a$ a sestrojíme bod D jakožto čtvrtý

[1]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 60.

harmonický ke třem bodům $A, B'; C$. Nad průměrem CD sestrojíme kružnici ($\sphericalangle CC'D = 90°$), která určí vrchol C' pomocného trojúhelníka pravoúhlého $CC'D$, v němž známe ještě jednu odvěsnu $\overline{CC'} = o_\gamma$; trojúhelník výsledný ABC snadno již pak doplníme.

Vymezení: Abychom dostali vrchol C' pravoúhlého trojúhelníka, musí býti $\overline{CC'} < \overline{CD}$,[2]) t. j. daná délka o_γ menší než harmonický průměr daných stran $a = \overline{CB'}$, $b = \overline{CA}$. Harmonický průměr úseček a, b je dán výrazem $\frac{2ab}{a+b}$; proto musí $o_\gamma < \frac{2ab}{a+b}$. Úloha je pak jednoznačná, nehledíme-li k trojúhelníku souměrně sdruženému k $\triangle ABC$ podle strany b.

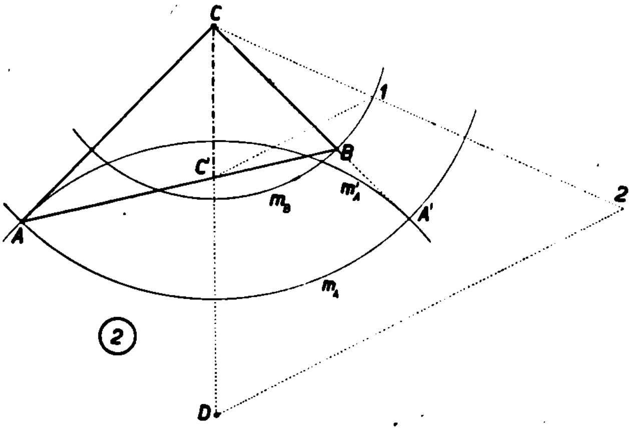
b) Máme-li úlohu řešiti užitím g. m., hledíme obyčejně sestrojiti určitý bod výsledného útvaru, čímž úloha je již v podstatě rozřešena. Při úloze t. zv. určité, t. j. dané tak, aby uvedeným podmínkám vyhovoval konečný počet výsledných útvarů, dospějeme ke g. m. hledaného bodu vynecháním jednoduché podmínky. Provedeme-li to dvakráte, dojdeme k dvěma g. m. — dvěma čarám — pro hledaný bod, jenž je pak jejich průsečíkem.

V našem příkladě (obr. 2) hleďme určiti vrchol A hledaného trojúhelníka. Sestrojíme-li danou délku $o_\gamma = \overline{CC'}$ a vyhovíme-li podmínce dané délkou strany b, pak g. m. bodu A je kružnice $m_A\,(C, b)$. Podobně bod B leží na kružnici $m_B\,(C, a)$, z níž lze odvoditi druhé g. m. pro bod A, uvážíme-li, že platí známý vztah $\overline{C'A} : \overline{C'B} = -b : a$. Opíše-li bod B kružnici m_B, opíše proto současně bod A kružnici m'_A homotheticky sdruženou s m_B dle vnitřního středu homothetie C'; pro střed D kružnice m'_A platí $\overline{DC'} : \overline{CC'} = -b : a$ a pro její poloměr $r' = a \cdot \frac{b}{a} = b$. Tím jest kružnice určena.

---

[2]) Ze svých úvah vylučujeme útvary degenerované v úsečky, přímky atd.

V konstrukci tedy pokračujeme tak, že na libovolný paprsek vedený C naneseme $\overline{C1} = a$, $\overline{12} = b$ a učiníme $2D \parallel 1C'$; tím na paprsku CC' dostaneme bod D. Průsečík g. m. m_A a m'_A je hledaný vrchol A.[3]) Druhý průsečík A' těchto kružnic spojen s C stanoví na m_B vrchol B. Úloha je v podstatě jednoznačná (trojúhelník o výsledném vrcholu A' byl by totiž s prvním trojúhelníkem souměrně sdružený podle CC'); je možná tehdy, pokud středná CD kružnic



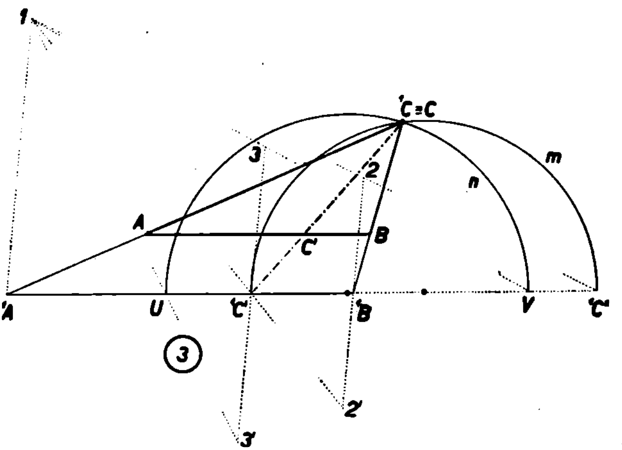
m_A a m'_A je menší než součet jejich poloměrů, t. j. $2b$. Však $\overline{CD} = \overline{CC'} + \overline{C'D} = o_\gamma\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, takže opět musí $o_\gamma < \frac{2ab}{a+b}$.

c) Řešíme-li úlohu metodou transformační, pak přeměníme útvary dané nebo jejich část tak, aby řešení úlohy za změněných poměrů bylo možno snáze provésti. Máme ovšem na mysli přeměnu, transformaci, která je před tím definována zcela určitými vlastnostmi, jež udávají jednoznačně

[3]) Viz Lit. č. XII, str. 12.

přechod z dané soustavy útvarů do druhé a naopak. Z výsledku získaného v útvaru odvozeném přejdeme zpětnou transformací k výsledku, který řeší úlohu původní. Tak je tomu při transformacích pohybových, jak jsou známy ze školních výkladů, jako je posunutí (translace), otočení (rotace) nebo překlopení kolem přímky (souměrnost podle osy).

Při transformaci v útvar homothetický nebo podobný sestrojíme rovněž napřed výsledek pro odvozené útvary,

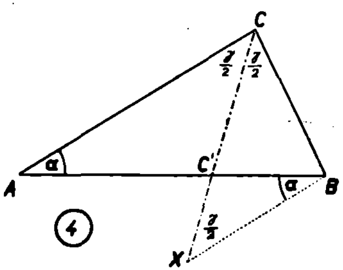


kterého lze snáze dosíci; k tomuto výsledku je pak výsledek úlohy původní homothetický, resp. podobný.

Zvláštní postavení při řešení konstruktivních úloh zaujímá a speciálního použití skýtá inversní transformace a dilatace, jak uvidíme později; rovněž tak i středová kolineace (a afinita) nebo polarita.

Vraťme se opět ke zvolené úloze, kterou rozřešíme nyní stejnolehlostí (homothetií). Sestrojíme napřed $\triangle\, {}^1A{}^1B{}^1C$, v němž je dán poměr ${}^1a : {}^1b : {}^1o_\gamma = a : b : o_\gamma$, tedy trojúhelník podobný výslednému $\triangle\, ABC$; sestrojíme jej (obr. 3) pomocí g. m. takto: Zvolíme libovolně stranu ${}^1c = \overline{{}^1A{}^1B}$;

ježto poměr dalších stran je dán, je g. m. vrcholu ${}^1C$ Apolloniova kružnice m sestrojená[4]) nad průměrem ${}^1C'{}^1C''$ pro daný poměr $b : a$. Podobně známe v trojúhelníku pomocném ${}^1A{}^1C'{}^1C$ poměr stran $\overline{{}^1A{}^1C} : \overline{{}^1C'{}^1C} = b : o_\gamma$ a sestrojíme tedy druhé g. m. bodu ${}^1C$, Apolloniovu kružnici n nad průměrem UV. V průsečíku g. m. m a n je hledaný bod ${}^1C$; trojúhelník výsledný ABC sestrojíme jako homothetický s $\triangle\, {}^1A{}^1B{}^1C$ podle středu ${}^1C \equiv C$. Úloha je možná potud, pokud se kružnice m a n protínají, čili padne-li bod V v našem obrazci (za předpokladu $b > a$) dovnitř úsečky ${}^1C'{}^1C''$, t. j. platí-li ${}^1C'V : {}^1C''V < 0$. Výpočtem bychom dostali pro o_γ zase nerovnost dřívější. Je viděti, že metoda této konstrukce je pro zvolený příklad složitější než obě metody předcházející.



d) Nejrychlejší cestu k výsledku v našem příkladě poskytne však **metoda na základě algebraickém**: Napřed vypočteme neznámou délku x (na obr. 4 je $x = \overline{C'X}$) a tu pak sestrojíme. Vrcholem B výsledného $\triangle\, ABC$ je v obrazci vedena se stranou AC rovnoběžka BX, jež protíná prodlouženou úsečku $o_\gamma \equiv CC'$ v bodě X. Z podobných trojúhelníků $AC'C$ a $BC'X$ plyne: $\overline{AC} : \overline{C'C} = \overline{BX} : \overline{C'X}$. Poněvadž však $\triangle\, CXB$ je rovnoramenný, ježto oba úhly při základně CX se rovnají $\frac{1}{2}\gamma$, jest $\overline{BX} = \overline{BC} = a$. Předchozí úměru můžeme tedy psáti:

$$b : o_\gamma = a : x$$

a podle toho můžeme sestrojiti délku x. Sestrojení $\triangle\, ABC$ je pak velmi jednoduché. Z $\triangle\, CXB$, který se sestrojí napřed, vyplývá pak toto vymezení: Řešení je možné, pokud $\overline{CX} <$

[4]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 58.

$< \overline{CB} + \overline{BX}$. Dosazením za $\overline{CX} = o_y + x$, dostaneme zase jako dříve, že musí býti $o_y < \frac{2ab}{a+b}$. —

B. K přehledu metod užívaných k řešení konstruktivních úloh elementárních připojíme ještě zmínku o tom, **kdy je úloha elementární,** t. j. kdy k jejímu řešení stačí užíti jen přímek a kružnic, a o pomůckách, kterými se takové úlohy provádějí. Tato část teorie geometrických konstrukcí nebude naším úkolem, i odkazujeme zvláště na pojednání uvedené v Lit. č. XIII.

a) Analytické kriterium německého geometra F. Kleina o elementárních úlohách konstruktivních praví: Konstruktivní úlohu lze tehdy a jenom tehdy řešiti kružítkem a pravítkem, dají-li se veličiny, určující hledané prvky, odvoditi z veličin daných konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.[5])

b) Všecky konstrukce proveditelné pravítkem a kružítkem lze provésti též jen kružítkem, jak po prvé ukázal italský geometr Mascheroni (1797) — „konstrukce mascheroniovské“ — nebo také použitím pravítka a jediné pevné kružnice s daným středem — „konstrukce Steinerovy“[6]) — anebo též náhradním náčiním jiným, jako je pravoúhlé pravítko a j.

C. Jako příklad provedeme nyní konstrukce, kterých bude později potřebí.

a) Sestrojíme úsečku $x = \frac{a \cdot b}{c}$, tedy čtvrtou geometricky úměrnou ke třem daným úsečkám a, b, c (obr. 5a), pouhým kružítkem. Sestrojíme kružnici $k(O)$ poloměrem $\overline{OC} = c$, učiníme $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$ a opíšeme z bodů B a A oblouky

[5]) Viz o tom též v knize B. Bydžovský - J. Vojtěch: Mathematika pro nejvyšší třídu reálek, Praha 1912, str. 80 a zvláště stať v pojednání výše citovaném.

[6]) Nazvané podle slavného německého geometra J. Steinera (1796—1863).

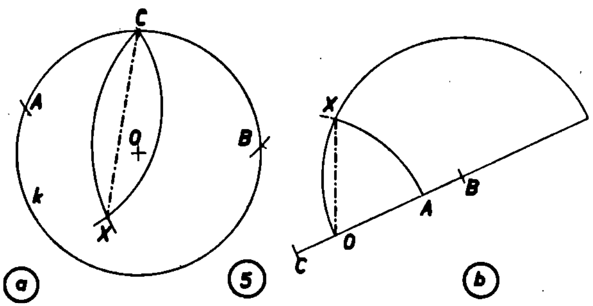
jdoucí bodem C; ty se protnou v bodě X. Pro obsah trojúhelníka ABC platí:

$$P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB}}{4 \cdot \overline{OC}} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{CX}.$$

Z toho:

$$\overline{CX} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{\overline{OC}} = x.$$

Aby konstrukce byla možná, musí: $a < 2c$, $b < 2c$. Není-li



tomu tak, zvolíme vhodně celé číslo n a sestrojíme napřed úsečku $y = \dfrac{ab}{n \cdot c}$; pak $x = n \cdot y$, což lze učiniti zase kružítkem (viz též str. 79).

b) Pro sestrojení úsečky $x = \sqrt{ab}$, tedy střední geometricky úměrné, je výhodná konstrukce Pelzova[7]) (obr. 5b). Na přímku naneseme úsečky: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, z bodu A úsečku $\overline{AC} = b$ a z bodů B i C touž délkou b sestrojíme

[7]) Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie pro vys. šk. techn., I; JČMF, Praha 1928; str. 18.
K. Pelz byl vynikající český geometr (1845—1909).

oblouky, které se protnou v bodě X. Podle věty Eukleidovy v kružnici o středu B platí:

$$\tfrac{1}{2}\overline{OA} \,.\, 2 \,.\, \overline{OB} = \overline{OA} \,.\, \overline{OB} = \overline{OX}^2 = x^2.$$

Tedy $\overline{OX} = x$.

Jiná konstrukce mascheroniovská jest provedena též na obr. 27. —