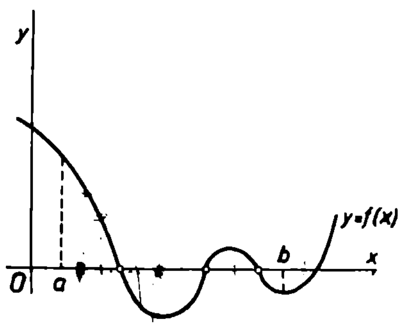
7. Dva další problémy o algebraických rovnicích.

Numerické řešení rovnic. V předcházejících kapitolách naučili jsme se řešiti algebraicky rovnice 2., 3., 4. stupně a naznačili jsme důkaz, proč to u rovnic 5. stupně není možné. Již tam jsme řekli, že nedovedeme sice obecně řešiti rovnici vyššího stupně než čtvrtého, dovedeme však s libovolnou přesností udati kořeny každé, numericky dané předložené rovnice. V takovém případě mluvíme o numerickém řešení dané rovnice.

Máme-li rovnici $f(x) = 0$ a sestrojíme grafické znázornění funkce $y = f(x)$, dávají průsečíky takto vzniklé křivky s osou x prvý hrubý odhad velikosti reálných kořenů. K přesnějšímu výpočtu nutno nahraditi metodu geometrickou metodou algebraickou.

Postup, kterého užíváme, skládá se ze dvou kroků: separace a aproximace kořenů. Separace záleží v hledání intervalů, v kterých jest obsažen pouze jediný kořen. Aproximace značí pak: postupně zužovati interval, v němž se uvažovaný kořen nalézá, tak dlouho, až nalezneme jeho hodnotu s takovou přesností, s jakou chceme.



Obr. 6.

Při separaci užíváme nejčastěji věty, o níž jsme již mluvili při důkazu fundamentální věty: Jestliže pro $x = a$ a $x = b$ jsou hodnoty $f(a)$ resp. $f(b)$ opačných znamének, leží mezi a a b lichý počet kořenů. Jsou-li však $f(a)$, $f(b)$ stejných znamének, jest mezi a a b buď žádný anebo sudý počet kořenů. (Viz obr. 6.)

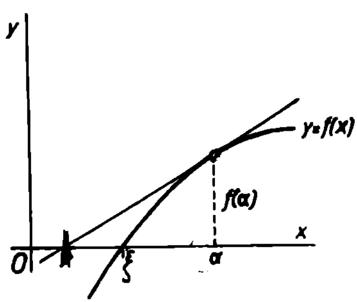
Hledáme proto takové — pokud možno úzké — intervaly (a, b), aby bylo $f(a)$ opačného znaménka než $f(b)$.

Postup osvětlíme nejlépe na příkladě. Jest separovati reálné kořeny rovnice $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Rovnice může míti jeden, nebo tři reálné kořeny. Již nejhrubší graf ukazuje, že existuje jenom jeden, jediný, reálný kořen. Abychom jej nalezli, dosazujme postupně:

$$\begin{array}{rcccccccc} x = \ldots & -2; & -1; & 0; & 1; & 2; & 3; & \ldots \\ f(x) = \ldots & -11; & -2; & -1; & -2; & 1; & 14; & \ldots \end{array}$$

Jelikož jest tedy mezi 1 a 2 změna znaménková, jest hledaný kořen mezi 1 a 2.

Dosaďme nyní $x = 1{,}5$; jest $f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 1{,}5^2 - 1{,}5 - 1 = -1{,}375$. Kořen leží mezi 1,5 a 2. Dosaďme $x = 1{,}8$. Vyjde $f(1{,}8) = -0{,}208$. Kořen jest v intervalu (1,8; 2). Dosadíme-li $x = 1{,}9$, dostáváme $f(1{,}9) = 0{,}349$. Kořen leží tedy mezi 1,8 a 1,9. Interval mohli bychom dále zužovati a vypočítati jeho hodnotu s přesností, s jakou chceme.



Obr. 7.

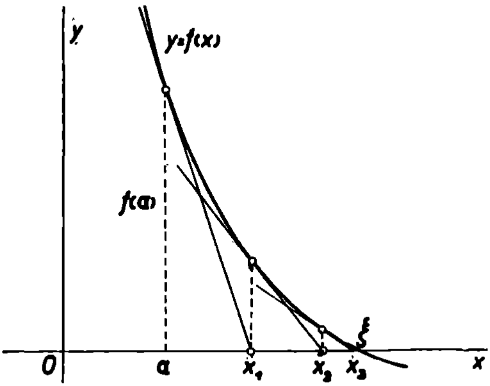
Když už jsme nalezli dosti přibližnou hodnotu kořene dané rovnice, jest výhodné, užíti k dalšímu výpočtu tak zvané metody Newtonovy, kterou krátce vyložíme.

Mysleme si v obr. 7 zobrazenou křivku $y = f(x)$ a budiž α přibližná hodnota kořene. Přesná hodnota kořene rovnice $f(x) = 0$ buďiž ξ. Sestrojme v bodě o souřadnicích $(\alpha;\ f(\alpha))$ tečnu. Její směrnice v tomto bodě — jak známo z diferenciálního počtu — jest $f'(\alpha)$. Rovnice tečny jest tudíž

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha) \,.\, (x - \alpha).$$

Její průsečík s osou x jest (pro $y = 0$)

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$



Obr. 8.

Jestliže rozdíl $\xi - \alpha$ byl dosti malý, t. j. hodnota α se nelišila příliš od skutečné hodnoty ξ, jest tato nová hodnota x — jak z geometrického zobrazení je jasně viděti, ale jak lze i početně lehce dokázati — lepší než původní hodnota α. Několikanásobným užitím téhož postupu dostáváme velmi přesnou hodnotu kořene. (Geometrický obraz postupného užití viz obr. 8.)

Jak viděti, nahrazujeme v podstatě v okolí hledaného bodu ξ křivku $f(x)$ její tečnou.

Příklad. U rovnice $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ nalezli jsme přibližnou hodnotu kořene $x = 1{,}8$. Jest $f(1{,}8) = -0{,}208$. Derivace $f'(1,8) = 3 \cdot 1,8^2 - 2 \cdot 1,8 - 1 = 5,12$

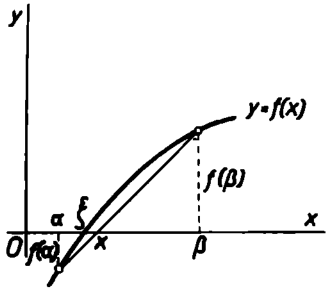
$$x = 1,8 - \frac{-0,208}{5,12} = 1,8406\ldots$$

Dosadíme-li nyní opět $\alpha = 1,840$, dostáváme obdobně $x = 1,839264\ldots$, což souhlasí již na 5 cifer se skutečnou hodnotou (jak se dá na př. dosazením zjistiti).

Při podrobném provádění jest ovšem dobře míti stálou kontrolu a abychom věděli s jakou přesností počítáme, všímati si obou mezí intervalu. Nemůžeme se však pouštěti do podrobností.

Jinou metodou jest t. zv. *„regula falsi"*. Je-li $f(x) = 0$ opět daná rovnice a (α, β) interval, ve kterém leží kořen, ξ jeho přesná hodnota, spojme body $[\alpha; f(\alpha)]$, $[\beta; f(\beta)]$, t. j. nahraďme křivku $f(x)$ sečnou. Rovnice této sečny jest

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha).$$



Obr. 9.

Průsečík s osou $y = 0$ (obr. 9) dává přibližnou hodnotu kořene

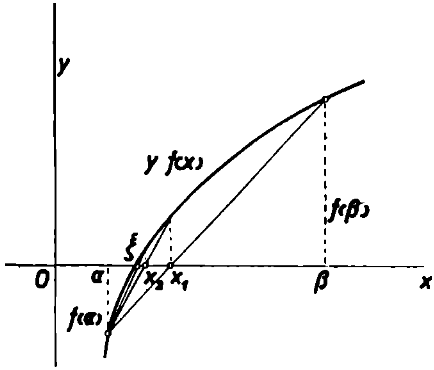
$$x = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Obecně však vede metoda Newtonova rychleji k cíli než tato. (Geometrický obraz postupného užití viz obr. 10.)

Numerický výpočet kořenů jest pro praksi, hlavně technickou, velmi důležitý. Je známo množství dalších metod k separaci i aproximaci. Pro pohodlný výpočet (dosazování, sčítání, násobení velikých čísel) vypracována jsou jistá schemata (na př. t. zv. Hornerovo schema), která výpočet usnadňují. I počítací stroje a tabulky se zde uplatní.

Při separaci se často užívá s výhodou této t. zv. věty Descartovy: Počet kladných kořenů rovnice s reálnými koeficienty jest nejvýše roven počtu změn znaménkových v rovnici; je-li menší, jest menší o sudý počet. Při tom změnou rozumíme, když u koeficientů rovnice za znaménkem (+) přijde (—) anebo opačně. Na př. V rovnici $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ jest jediná změna (totiž mezi prvým a druhým členem); tedy rovnice má jeden kladný kořen. Abychom nalezli počet záporných kořenů, položme $x = -y$ a počítejme počet kladných kořenů. Jest $-y^3 - y^2 + y - 1 = 0$. Tato rovnice má dvě změny, tedy počet záporných kořenů jest 2 nebo 0 (t. j. o sudý počet méně); my víme již, že je to 0.

Obratné užívání Descartova pravidla umožní separaci kořenů bez jakéhokoliv grafického znázornění.



Obr. 10.

Čtenář, který by se zajímal o tyto a podobné otázky, nalezne obšírné poučení v knize Láska-Hruška: Teorie a praxe numerického počítání, Praha 1934 (nákl. JČMF).

Cvičení. 1. Dokažte: je-li A (> 0) absolutní hodnota největšího koeficientu reálného polynomu $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, jest

$$f(x) > 0 \text{ pro všechna } x > A + 1,$$

$$f(x)\begin{cases} < 0 \text{ pro všechna } x < -(A + 1), \text{ pro } n \text{ liché,} \\ > 0 \text{ pro všechna } x < -(A + 1), \text{ pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

[Návod (viz též str. 28): Pro kladná $x > 1$ jest $f(x) = x^n \Big[1 + \frac{a_1}{x} +$

$+ \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\Big] \geqq x^n \Big[1 - A\left(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^n}\right)\Big] \geqq \Big[1 - A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right)\Big] = \Big[1 - \frac{A}{x - 1}\Big]$. Závorka bude kladná pro $x > A + 1$. Analogicky další případy.]

2. Separujte reálné kořeny

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0,9 = 0!$$

[(−2; 1), (−1; 0), (0; 1), (3; 4)].

3. Dokažte: Jsou-li veličiny $A_i > 0$, má rovnice $\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} = 0$ samé reálné kořeny!

[Návod: Srovnejte $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, a uvažujte intervaly $(a_1; a_2)$ $(a_2; a_3) \ldots$ (Místo zlomků musíte ovšem uvažovati polynom.) Užijte věty citované na začátku!]

4. Užijte Newtonovy metody k řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$! [Vyjděte od hodnoty $x_1 = \frac{3}{2}$ jakožto první aproximace; je $x_1 = \frac{17}{12} = 1,417\ldots$, $x_2 = \frac{577}{408} = 1,414215\ldots$ (tedy přesnost na 5 míst).]

5. Řešte analogicky $x^3 - 2 = 0$!

6. Newtonova metoda a metoda „regula falsi" blíží se ke kořenu vzájemně opačným směrem. Užívajíce této vlastnosti, sevřete kořen rovnice

$$x^5 + 5x + 1 = 0$$

mezi dvě meze lišící se o $\frac{1}{10^5}$.

[$-0.19993611 < x < -0,19993603$.]

7. Řešte rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0!$$

[0,834...; 2,217...; 5,949...]

8. (Gräffeho metoda.) Analogicky jako u kvadratické rovnice (viz př. 8 str. 39) lze největší reálný kořen libovolné rovnice s reálnými koeficienty vypočítati jako limitu

$$x = \lim_{k=\infty} \frac{s_{k+1}}{s_k},$$

kde s_k jsou mocninné součty. Proveďte u rovnice $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$!

[$s_0 = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 7$, $s_4 = 11$, $s_5 = 21$, $s_6 = 39$, $s_7 = 71$, $s_8 = 131$, $s_9 = 241$, $s_{10} = 443$, $s_{11} = 815$, $s_{12} = 1499$,

$$x \doteq \frac{1499}{815} = 1{,}839264\ldots].$$

9. Metodou Newtonovou lze řešiti i rovnice transcendentní. Řešte na př. $\log x - \frac{1}{x} = 0$! [2,506...].

Systémy rovnic o více neznámých. a) Naše dosavadní úvahy vztahovaly se jen na rovnice o jedné neznámé. Je pochopitelné, že obecná teorie soustavy (systému) rovnic o více neznámých bude komplikovanější. Lze dokonce říci, že je v tom směru dodnes mnoho nerozřešených problémů — ač jde o otázky již značně staré.

Obecný systém n rovnic o m neznámých $x, y, z, \ldots$ stupňů $q_1, q_2, q_3, \ldots$ má tvar

$$f_1(x, y, z, \ldots) = 0, \; f_2(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots \; f_n(x, y, z, \ldots) = 0, \quad (1)$$

kde f_1, f_2, f_3 jsou polynomy proměnných $x, y, z, \ldots$ stupňů $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Tak na př. obecný systém 2 rovnic o 2 neznámých druhého stupně jest tvaru

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f &= 0, \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' &= 0, \end{aligned}$$

při tom čísla $a, b, \ldots a', b', \ldots$ jsou daná, obecně komplexní čísla.

U rovnic o jedné neznámé zaručovala nám fundamentální věta vždy existenci n kořenů. Docela jinak jest tomu tady. U takového systému (1) lze se ptáti:

α) Má systém (1) řešení? T. j. existuje soustava čísel $(x; y; z; \ldots)$ hovící systému (1)?

β) Má-li, tak kolik?

γ) Jak poznáme, má-li (1) řešení nebo ne?

δ) Existuje-li řešení, jak se nalezne?

atd.

Na tyto otázky nelze obecně dáti odpověď. Může se státi, že takový systém má jen konečný počet řešení, ale zrovna tak se může státi, že má nekonečně mnoho řešení anebo vůbec žádné řešení. V tom směru nutno vyšetřovati každý předložený případ zvláště.

Obecný postup řešení jest možno — alespoň myšlenkově — provésti takto. Máme-li na př. 3 rovnice o 3 neznámých jakéhokoliv stupně, vypočteme z jedné rovnice jednu neznámou a dosadíme do zbývajících dvou. Pak z takto získaných 2 rovnic zvolíme jednu a vypočteme z ní opět jednu další neznámou. Když ji dosadíme do zbývající jediné rovnice, obdržíme jedinou rovnici o jedné neznámé, jejíž teorii již známe. Další neznámé se pak vypočtou z původních rovnic.

Řekli jsme, že jest to pochod pouze teoretický, neboť na př. při systému

$$x^7 + 2y^5x + y^4 + 4 = 0$$
$$x^5y^2 + 3x^2y + y^5 + 7 = 0,$$

nedovedeme vypočítati ze žádné z nich ani x ani y. Prakticky provést naznačenou myšlenku lze jen v některých jednoduchých příkladech.

Základní myšlenkou každého takového pochodu jest tedy vyloučiti z několika rovnic všechny neznámé s výjimkou jediné tak, abychom dostali jen rovnici (po případě rovnice) o jediné neznámé.

Tomuto pochodu říkáme eliminace. Dá se ukázati, že tuto lze provésti vždy i bez řešení rovnic jen pomocí racionálních operací. To jsou však již problémy daleko složitější a nespadají do rámce této knížky.

Snadno nahlédneme nyní, že jsou myslitelné a možné nejrůznější případy. Mysleme si, že jsme v daném systému provedli již eliminaci všech neznámých s výjimkou jediné. Může nyní nastati několik případů:

1. Po eliminaci zbývá jediná rovnice o jediné neznámé.

2. Po eliminaci zůstalo nám více rovnic o jediné neznámé.

3. Eliminaci jsme nemohli provést do konce, neboť již dříve, než jsme vyloučili všechny neznámé s výjimkou

jediné, zbyla nám jediná rovnice obsahující však více neznámých.

Úvaha — spíše jen orientační — nám nyní ukazuje: V případě

1. bude normálním zjevem, že ke každému kořenu vzniklé rovnice nalezneme jednu nebo více hodnot pro zbývající neznámé. Bude tedy existovati v tomto případě zpravidla konečný počet řešení.

2. V druhém případě může se státi lehce — a bude to opět normálním zjevem — že rovnice o jedné neznámé, které zůstaly, si navzájem odporují. V tomto případě neexistuje řešení.

3. V třetím případě, ježto máme jednu rovnici a více neznámých, lze několik neznámých voliti libovolně a ostatní jsou pak již určeny. V tomto případě bude existovati nekonečný počet řešení.

b) Ukážeme na několika jednoduchých příkladech to, o čem jsme mluvili v předešlém odstavci. Pomůžeme si geometrickým názorem.

α) Systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Každá z těchto dvou rovnic představuje v pravoúhlém systému souřadnic přímku. Dvě přímky mohou být různoběžné, rovnoběžné anebo totožné. V prvním případě mají rovnice jediné řešení odpovídající souřadnicím průsečného bodu. V druhém případě, kdy přímky jsou rovnoběžné, nemá příslušný systém řešení. V případě třetím, kdy obě přímky jsou totožné, existuje nekonečně mnoho řešení — totiž souřadnice všech bodů společné přímky. Uvádíme příklady na každý systém.

$3x + 2y = 4$	$2x + 3y = 5$	$3x + 4y = 3$
$2x + y = 3$	$2x + 3y = 7$	$6x + 8y = 6$
$x = 2,\ y = -1$		

Lehce se zjistí, že první případ nastane vždy, když $a_1 : b_1 \neq$ $\neq a_2 : b_2$, t. j. když determinant*)

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

β) S y s t é m t ř í r o v n i c o t ř e c h n e z n á m ý c h.

Ještě názorněji jest viděti poměry u systému

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

V trojrozměrném prostoru značí totiž taková rovnice vždy rovinu. Dle toho, jaká je vzájemná poloha tří různých rovin, má tento systém buď žádný, konečný (totiž právě jeden) nebo nekonečný počet řešení. Nemůžeme se pouštěti do detailného rozboru, jen stručně poznamenáváme. Obecně — pokud tedy koeficienty $a_1, b_1, \ldots$ nepodléhají nějakým podmínkám — protnou se tři roviny v jednom bodě — proto i tyto tři rovnice budou míti jediné řešení, t. j. existuje jediná trojice $(x; y; z)$, která vyhovuje všem daným třem rovnicím.

Ovšem jsou možné i jiné případy. Na př. dané tři roviny mohou tvořiti s v a z e k, t. j. mají společnou přímku: pak existuje nekonečně mnoho řešení. Jiný případ: Jsou-li dvě z rovin rovnoběžné, neexistuje řešení atd.

Dá se dokázati, že otázka, který případ nastane, závisí na determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

resp. na determinantech s ním souvisících.

*) Teorie lineárních rovnic dá se celá obecně vybudovati tak, že tvoří uzavřený harmonický celek. Jest při tom zapotřebí znáti ovšem teorii d e t e r m i n a n t ů, k jejíž vybudování vyšel popud právě z řešení lineárních rovnic. Kdo se o to zajímá podrobněji, nalezne bližší výklad v knize B. B y d ž o v s k ý: Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha 1930 (nákl. JČMF).

γ) Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16y^2 &= 144 \\ 3x - 4y &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice $x = \frac{4}{3}y$. Dosazením do první dostaneme

$$9 \cdot \frac{16y^2}{9} - 16y^2 = 144$$

$$0 = 144,$$

což ovšem není pravda. Daný systém nemá řešení. Když tento systém znázorníme graficky, vidíme, že jde o hyperbolu a její asymptotu, a o těch ovšem víme, že se v konečnu neprotnou.

δ) Zvolme jiný případ. Jest řešiti systém

$$\begin{aligned} 6x^2 + xy - 2y^2 &= 0 \\ 3x + 2y &= 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Dosadíme-li $x = -\frac{2}{3}y$ do první rovnice máme

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-\tfrac{2}{3}y)^2 - \tfrac{2}{3}y^2 - 2y^2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice jest splněna identicky pro jakoukoliv hodnotu y.

Daný systém má nekonečně mnoho řešení, totiž všechny body vyplňující přímku $3x + 2y = 0$. V grafickém znázornění křivka (*) jest složena ze dvou přímek, z nichž jednou jest právě přímka $3x + 2y = 0$.

Tyto dva příklady, řekli bychom „pathologické", jasně ukazují okolnosti, které musíme míti na zřeteli vždy tenkráte, když se zabýváme systémem algebraických rovnic. Může se totiž státi, že křivky příslušející uvažovaným rovnicím mají „společnou součást", nebo, že „průsečík křivek padne do nekonečna".

c) Jinou obecnou metodu k řešení rovnic o více neznámých, než jsme udali, udati nelze. Pokud jde o počet řešení platí však důležitá obecná věta Bezoutova, kterou formulujeme jen pro dvě neznámé. Dvě rovnice

n-tého a m-tého stupně mají obecně $m \,.\, n$ řešení. Při tom slovu „obecně" jest rozuměti takto: V obecném případě nebudou míti obě rovnice společnou součást (viz příkl. δ), ani se nestane, že kořen padne do nekonečna (viz příkl. γ). Při tom jest ovšem nutno počítati každý kořen s příslušnou násobností. Násobnost se pak definuje vhodným způsobem. Geometrická interpretace této věty jest pak tato: Dvě křivky stupně m-tého a n-tého — nemají-li společnou součást — protínají se v $m \,.\, n$ bodech. (Při tom počítáme i eventuální průsečíky v nekonečnu a béřeme zřetel k násobnosti průsečíků.)

d) Zatím co lze obecnou teorii systému více rovnic jen těžko ovládnouti, dovedeme poměrně lehce řešiti rozličné specialisované systémy.

Takové systémy jsou na př. rovnice zvané symetrické, homogenní atd. Ježto jsou to však z obecného hlediska jen speciální případy, kterých řešení vyžaduje všelijakých umělých obratů a jest věcí matematické a početní zručnosti, uvádíme je jen v cvičeních. Při tom, jak zjistíte, jde při řešení v podstatě o to, onu eliminaci, o které jsme nahoře mluvili, provésti nějakým, vtipným jednoduchým obratem.

Cvičení: Řešte systémy rovnic:

1. $x^2 + y^2 = r^2$
$y = kx + q.$ (Proveďte rozbor!)

2. Řešte obecný systém t. zv. souměrných rovnic:
$a\,(x^2 + y^2) + bxy + d\,(x + y) + f = 0$
$a'(x^2 + y^2) + b'xy + d'\,(x + y) + f' = 0.$
[Návod: Za $x + y$ a xy dosaďte nové neznámé!]

3. $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ (t. zv. homogenní rovnice)
$y = kx + q.$
$\left[\text{Návod: Vypočtěte } \frac{y}{x}!\right]$

4. $x^2 - 2xy + 6y^2 = 5$
$3x^2 + 3xy + 2y^2 = 8.$
[Návod: Vyloučením pravých stran určete nejprve homogenní rovnici!]

5. a) $x^3 + y^3 = m^3$ b) $x^4 + y^4 = m^4$

$x + y = n.$ $x + y = n.$

[Umocněte druhou rovnici třemi resp. čtyřmi a vypočtěte xy!]

6. $x + y + \frac{x}{y} = 5$

$x^2 + y^2 + \frac{x^2}{y^2} = 15.$ [(5, $\pm i\sqrt{5}$), (1, 2 $\pm \sqrt{3}$).]

7. $x^2 + y^2 = 5\sqrt[3]{x^3 + y^3}$

$x^2 - y^2 = 3\sqrt[3]{x^3 + y^3}.$

(Pozor na počítání třetími odmocninami!)

8. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 15$

$x^6 + x^4y^2 + xy^4 + y^6 = 85.$

(Rozložte levé strany a zaveďte nové neznámé! (1; 2) další kořeny složitější.)

9. $x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = a$

$x^2 - y^2 + xy = b$

[Nové neznámé $x^2 - y^2 = u$, $xy = v$!]

10. $x^4 + y^4 + x^2y^2 = a$

$x^2 + y^2 - xy = b.$

11. $x^2 - xy + 2y + 3 = 0$

$xy - y^2 + 4x + 6 = 0.$

[Odečtěte od dvojnásobku první rovnice rovnici druhou a rozložte! $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$, $(4 \pm \sqrt{11}; 2(2 \pm \sqrt{11}))$.]

12. $x + y + z = a$

$xy + xz + yz = -a$

$xyz = -1.$

[$(-1; \frac{1}{2}(a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 3})$; $\frac{1}{2}(a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 3}))$ a dalších pět trojic z týchž tří čísel.]

13. $x + y + z = a$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$

[Umocněte první rovnici dvěma a třemi! (0, 0, a), (0, a, 0), (a, 0, 0).]

14. $x(y + z) = a$

$y(z + x) = b$ (Rovnice sečtěte!)

$z(x + y) = c.$

15. $x + y + z + xyz = 3$

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2z^2 - 1$

$xy + yz + zw = 2.$

[Vypočtěte nejprve $t = xyz$. Vyjde $t = 1$; kořeny $(1; \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}))$, atd.]

16. $x^2 + y^2 + xy = 7$
$y^2 + z^2 + yz = 19$
$z^2 + x^2 + xz = 13.$

[Po odečtení rovnic od sebe, rozložte! $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm \frac{5}{3}\sqrt{3}$, $y_{1,2} = \pm 2$, $y_{3,4} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $z_{1,2} = \pm 3$, $z_{3,4} = \pm \frac{7}{3}\sqrt{3}$.]

17. $x^3 = xyz + 3$
$y^3 = xyz + 1$
$z^3 = xyz + 10.$

(Určete nejprve xyz! $(\sqrt[3]{1}; \sqrt[3]{-1}; \sqrt[3]{8})$; $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{14}}; \frac{-1}{\sqrt[3]{14}}; \frac{5}{\sqrt[3]{14}}\right)$ celkem 18 trojic kořenů.)

Závěrem. Některé příklady zde uvedené jsou vybrány z „Rozhledů matematicko-přírodovědeckých“, kde v novějších i starších ročnících nalezne čtenář řadu poměrně těžších (a právě proto vábivých) příkladů. Pisatel těchto řádků věří, že pozorný čtenář jeho knihy příklady zde i tam uveřejněné lehce rozřeší a při jejich řešení obohatí a zdokonalí svůj matematický obzor. To bylo také účelem této knížky.