O rovnicích

6. Neřešitelnost rovnic vyššího než čtvrtého stupně

In: Štefan Schwarz (author): O rovnicích. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1940. pp. 67–78.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402955

6. Neřešitelnost rovnic vyššího než čtvrtého stupně.

V předcházejících kapitolách naučili jsme se řešiti rovnice třetího a čtvrtého stupně. Jest přirozené, že hledáme obdobné metody k řešení rovnic pátého stupně. Chtěli bychom totiž nalézti nějaké řešení analogické na př. Cardanovu vzorci. Nalézti takovéto řešení se matematikům přes veškeré úsilí dlouho nedařilo. Starší matematikové si ovšem nelámali vůbec hlavu nad tím, zda takovéto řešení existuje, t. j. zda jest možné — považovali to za samozřejmé. Tady byl kámen úrazu. Ukázalo se totiž — když nesčetné pokusy nevedly k cíli — a po dlouhé době — že takové řešení obecně vůbec není možné.

První důkaz tohoto tvrzení pochází v podstatě od italského matematika Ruffiniho. Otázkou tou zabývali se později Cauchy, Abel a nakonec geniální matematik Galois.*)

*) Paolo Ruffini (1765—1822), původně lékař, stal se profesorem matematiky na universitě v Modeně. Jeho, zde citovaný důkaz, byl těžký a i Cauchy mu jen stěží rozuměl; přes to jeho zásluha jest nesporná.

Augustin Louis Cauchy narodil se 1789 v Paříži. Žil po červencové revoluci jako vychovatel u vévody z Bordeaux v Praze po dobu šesti let. Později působil opět na pařížské universitě. Žil v době rušných politických změn a dostával se často do nepříjemných situací pro svůj zatvrzelý odpor proti Napoleonovi i revoluci, zachovávaje věrnost královskému rodu bourbonskému. Přes to, uznávajíc jeho ohromné vědecké dílo, zachovala se k němu revoluce s nejkrajnější šetrností a byla mu několikráte nabídnuta universitní stolice. Na konec stal se prof. teor. astronomie v Paříži. Zemřel r. 1857 v Sceaux. Je jedním z nejvšestrannějších badatelů a nejplodnějších spisovatelů skoro ve všech oborech matematiky a matematické

Obsahem této kapitoly jest ukázati, proč rovnice pátého (a tím spíše vyššího) stupně jest neřešitelná v takové formě, v jaké jsme zvyklí počítati na př. kořeny kvadratické rovnice. I když neprovedeme důkaz do všech detailů (proč — to se ukáže na příslušném místě), máme aspoň možnost vniknouti hlouběji do struktury algebraických rovnic.

Tato kapitola bude poněkud obtížnější než předchozí, neboť musíme zavést několik nových pojmů. Odměnou za

---

fysiky. Jeho „Sebrané spisy" vycházejí stále v mnoha svazcích vydávaných pařížskou Akademií. Kromě prací v algebře zasloužil se Cauchy hlavně o solidní výstavbu diferenciálního počtu, teorie nekonečných řad, diferenciálních rovnic, teorie funkcí atd.

Niels Henrik Abel, narozený 5. srpna 1802 ve Finnö u Stavangeru v Norsku, zemřel ve věku 27 let dne 6. dubna 1829 ve Frolandu v Norsku. Milý a družný, avšak stále churavějící mladý tento muž, jest typem genia, stihaného životním osudem. Pocházeje z chudé rodiny vystudoval v bídě a v neradostném světě. Vzdělával se nejdříve sám. Když se po studijním pobytu ve Francii a Německu vrátil do Kristianie, stal se tam docentem. O rok později (1829) zemřel ve chvíli, kdy měl býti povolán jako řádný profesor na berlínskou universitu. Cenu francouzské Akademie na r. 1830, kterou obdržel zároveň s Jacobim za vynikající práce matematické, dostali už jenom jeho dědici. Matematické zásluhy Abelovy jsou nesmrtelné. Jeho vyšetřování rovnic pátého stupně obsahují sice jisté nedostatky, ale jako zakladatel nauky o eliptických funkcích projevil intuici a nadání pro všechny časy těžko napodobitelné.

Evarist Galois jest jedinečnou postavou v dějinách matematiky. Narodil se 26. října 1811 v Paříži. Zemřel v souboji v květnu 1832 ve věku 21 let. Jeho romantický skon (šlo o milostnou záležitost) je pouze vyvrcholením jeho stejně pestrého — byť krátkého — života. V předtuše smrti, v předvečer osudného souboje, uložil své nejdůležitější výsledky v dopise svému příteli Augustu Chevalierovi. Práce ty vyšly pak několikrát během minulého století. Galois předstihl své vrstevníky o celé půlstoletí. Jeho neobyčejně jasné a překrásné práce byly na tehdejší dobu příliš abstraktní a těžké. Nebyl dlouho pochopen. Až koncem minulého a začátkem tohoto století řada matematiků propracovala jeho náměty a myšlenky. Pak teprve algebra dosáhla nečekaného rozkvětu.

námahu s tím spojenou dotkne se čtenář věcí, které patří k nejkrásnějším partiím matematiky a k nejhlubším pravdám, kterých se lidský duch dodnes vůbec dopracoval.

Číselná tělesa. Tělesem budeme rozuměti souhrn čísel majících tu vlastnost, že sčítáním, odčítáním, násobením a dělením čísel z toho souhrnu dostáváme opět jenom čísla z téhož souhrnu.

Na př. a) Souhrn všech čísel racionálních tvoří těleso. Neboť sčítáním, odčítáním, násobením a dělením dvou racionálních čísel obdržíme opět racionální čísla. Ve vzorcích

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Toto těleso budeme značiti znakem R.*)

b) Souhrn všech čísel reálných (t. j. racionálních a iracionálních) tvoří těleso.

c) Všechna čísla komplexní tvoří těleso.

d) Všechna čísla tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b jsou čísla racionální, tvoří těleso, které označme T.

Neboť

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Všimněme si tohoto tělesa. Obsahuje „více" elementů než těleso R. Položíme-li totiž v T $b = 0$ a a necháme probíhati všechna racionální čísla, dostaneme právě R. Těleso T jest tedy „širší" než těleso R.

Říkáme, že těleso T jest nadtělesem tělesa R. Těleso T vzniklo z tělesa R přidáním, nebo tak zvanou adjunkcí

*) Čtenáře snad nepřekvapuje, že značíme celý souhrn čísel jediným znakem. Počínáme si obdobně, jak jsme zvyklí z geometrie, kde na př. kružnici (t. j. souhrn nekonečně mnoho bodů roviny) značíme také jediným znakem k a pod.

čísla $\sqrt{2}$ (T je „nejmenší“ těleso obsahující R a $\sqrt{2}$). Značíme $\mathsf{R} \subset \mathsf{T}$; $\mathsf{T} = \mathsf{R}(\sqrt{2})$.

e) Adjunkcí elementu i k tělesu čísel racionálních R vznikne těleso $\mathsf{R}(i)$. To obsahuje všechna čísla tvaru $a + bi$, kde a, b jsou racionální.

Podobně adjunkcí čísla i k tělesu čísel reálných vznikne těleso čísel komplexních.

f) Těleso $\mathsf{R}(\sqrt{2})$ vzniklo tak, že jsme k tělesu R adjungovali kořen rovnice $x^2 - 2 = 0$. Podobně adjunkcí kořene rovnice $x^2 + 1 = 0$ k tělesu čísel reálných vznikne těleso čísel komplexních.

Tento postup lze zobecniti. Je dáno těleso racionálních čísel R a nějaká nerozložitelná*) algebraická rovnice n-tého stupně s racionálními koeficienty

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Jeden pevně zvolený kořen této rovnice budiž Θ. Sčítáním, odčítáním, násobením a dělením racionálních čísel a čísla Θ lze vytvořiti těleso, které budeme značiti $\mathsf{R}(\Theta)$.

Obecný prvek tohoto tělesa takto získaný jest nejdříve tvaru

$$\alpha = \frac{b_0 + b_1\Theta + \ldots + b_m\Theta^m}{c_0 + c_1\Theta + \ldots + c_l\Theta^l},$$

kde b_i, c_i jsou racionální čísla. Z původní rovnice však plyne

$$\begin{aligned}
\Theta^n &= -a_1\Theta^{n-1} - a_2\Theta^{n-2} - \ldots - a_n,\\
\Theta^{n+1} &= -a_1\Theta^n - a_2\Theta^{n-1} - \ldots - a_n\Theta =\\
&= -a_1(-a_1\Theta^{n-1} - a_2\Theta^{n-2} - \ldots - a_n) -\\
&\quad - a_2\Theta^{n-1} - \ldots - a_n\Theta =\\
&= a'_1\Theta^{n-1} + a'_2\Theta^{n-2} + \ldots + a'_n.
\end{aligned}$$

Lze tedy z α mocniny Θ, vyšší než Θ^{n-1} odstraniti a psáti

*) Tím rozumíme nerozložitelná ve dva polynomy s racionálními koeficienty.

$$\alpha = \frac{b'_0 + b'_1\Theta + \ldots + b'_{n-1}\Theta^{n-1}}{c'_0 + c'_1\Theta + \ldots + c'_{n-1}\Theta^{n-1}}.$$

Lze dokázati však dále, že vhodným rozšířením jmenovatele (tak jak to děláme na př. při usměrňování jmenovatele zlomku) lze číslo Θ z jmenovatele odstraniti a lze tedy úhrnem říci:

Každé číslo tělesa $\mathbf{R}(\Theta)$, vzniklého adjunkcí čísla Θ k tělesu $\mathbf{R}$, lze psáti ve tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1\Theta + \ldots + d_{n-1}\Theta^{n-1}, \tag{1}$$

kde $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ jsou racionální čísla.

Cvičení. 1. Vyjádřiti ve tvaru (1) výraz

$$\alpha = \frac{5\Theta + 6}{1 + \Theta + \Theta^2},$$

kde Θ jest kořenem rovnice $x^3 - 2 = 0$!

[Návod: Rozšiřte číslem $\Theta - 1$ a uvažte, že je $\Theta^3 = 2$! $\alpha = 5\Theta^2 + \Theta - 6$.]

2. Totéž pro výraz $\alpha = \dfrac{1}{\Theta^3 - \Theta + 2}$, kde Θ vyhovuje rovnici $x^4 - 5 = 0$. [$\alpha = -\frac{1}{4}(2\Theta^3 + 3\Theta^2 + 4\Theta + 7)$.]

Reducibilní a ireducibilní polynomy. S pojmem tělesa souvisí úzce pojem t. zv. reducibility a ireducibility polynomů.

Budiž dán polynom s racionálními koeficienty — budeme říkati stručně polynom z $\mathbf{R}$ — na př.

$$x^2 - 2. \tag{2}$$

Tento polynom nelze rozložiti na součin lineárních faktorů, žádáme-li, aby jejich koeficienty byly racionální čísla. Říkáme: Polynom (2) jest v tělese racionálních čísel ireducibilní. Naproti tomu připustíme-li, aby koeficienty byly čísla z tělesa $\mathbf{R}(\sqrt{2})$, lze psáti

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Polynom (2) jest v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{2})$ reducibilní.

Zrovna tak polynom $x^4 + 1$ jest v **R** ireducibilní; naproti tomu v $\mathbf{R}(\sqrt{2})$ se dá rozložiti v součin

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Polynom $x^2 + 5$ jest v tělese **R** ireducibilní. Ani v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{5}) = \mathbf{T}_1$ není ještě reducibilní. Jestliže však k tomuto tělesu adjungujeme ještě číslo i a vytvoříme těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(i) = \mathbf{R}(\sqrt{5}, i)$ pak v tomto tělese $\mathbf{T}_2$ lze psáti

$$x^2 + 5 = (x + i\sqrt{5})(x - i\sqrt{5}).$$

Jiný příklad. Polynom $x^4 - 16x^2 + 4$ se nedá v **R** rozložiti. V tělese $\mathbf{R}(\sqrt{3})$ lze však psáti

$$x^4 - 16x^2 + 4 = (x^2 - 2x\sqrt{3} - 2) \, . \, (x^2 + 2x\sqrt{3} - 2).$$

Žádný z obou faktorů na pravé straně nelze již v $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}(\sqrt{3})$ dále rozložiti. Jestliže však k tělesu $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}(\sqrt{3})$ adjungujeme ještě číslo $\sqrt{5}$, t. j. vytvoříme těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(\sqrt{5}) = \mathbf{R}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, lze dokonce psáti

$$x^4 - 16x^2 + 4 =$$
$$= (x - \sqrt{3} + \sqrt{5})(x - \sqrt{3} - \sqrt{5})(x + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \, .$$
$$. \, (x + \sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

Všimněme si jednotlivých těles!

Těleso **R** se skládá ze všech racionálních čísel.

Těleso $\mathbf{T}_1$ se skládá ze všech čísel tvaru $a + b\sqrt{3}$, kde a, b jsou čísla racionální.

Těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(\sqrt{5}) = \mathbf{R}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ se skládá ze všech čísel tvaru $r + s\sqrt{5}$, kde r a s jsou libovolná čísla z $\mathbf{T}_1$, t. j. ze všech čísel tvaru

$$(r_1 + r_2\sqrt{3}) + (s_1 + s_2\sqrt{3}) \, . \, \sqrt{5} = r_1 + r_2\sqrt{3} + s_1\sqrt{5} + s_2\sqrt{15},$$

kde r_1, r_2, s_1, s_2 jsou racionální.

Těleso $\mathbf{T}_2$ obsahuje v sobě těleso $\mathbf{T}_1$ (k tomu stačí položiti $s_1 = s_2 = 0$, r_1, r_2 libovolné) a toto těleso $\mathbf{T}_1$ obsahuje v sobě opět těleso **R** (k tomu stačí položiti $s_1 = s_2 = r_2 = 0$, r_1 libovolné). Píšeme proto

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2.$$

Cvičení. 1. Kdy jest polynom $ax^2 + bx + c$ s celočíselnými a, b, c rozložitelný v **R**? [Musí platiti $b^2 - 4ac = m^2$, kde m jest celé číslo.]

2. Kdy jest $ax^2 + bx + c$ s racionál. koeficienty a, b, c rozložitelný v $\mathbf{R}(\sqrt{7})$? [Musí $b^2 - 4ac = 7m^2$, kde m jest racionální.]

Postupná adjunkce a řešení algebraických rovnic. Když jsme v předcházejících příkladech k základnímu tělesu **R** přidávali postupně nové prvky, čili konstruovali nadtělesa, stala se rovnice postupně reducibilní, až se nakonec dala rozložiti v součin samých lineárních činitelů.

Pro jednoduchost budeme v dalším uvažovati jen rovnice z **R**, t. j. rovnice s racionalními koeficienty, ačkoliv všechny úvahy platí i tenkráte, zvolíme-li jiné těleso za základní.

Při řešení algebraických rovnic sestrojujeme vlastně postupně k původnímu tělesu **R** řetězec nadtěles

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{T}_{N-1} \subset \mathbf{T}_N$$

takový, že se v posledním tělese $\mathbf{T}_N$ dá již původní polynom rozložiti v samé lineární faktory.

Když se nám podaří sestrojiti takové těleso $\mathbf{T}_N$, (ve kterém jest možný úplný rozklad daného polynomu v lineární činitele), pak víme, že v tomto tělese leží všechny kořeny dané rovnice.

Dříve jsme hledali řešení dané rovnice v tom smyslu, že jsme chtěli nalézti přímo hodnotu jejích kořenů. Nehledejme nyní hodnotu kořenů, nýbrž pouze těleso, ve kterém se kořeny nalézají.

Opakuji ještě jednou: Nepůjde nám — na chvíli — o žádné řešení vyjádřitelné nějakým vzorcem, nýbrž o pouhou — více méně myšlenkovou — konstrukci jistého tělesa $\mathbf{T}_N$ (nadtělesa k tělesu **R**).

Tato úloha jest do jisté míry jednodušší. Po stránce čistě matematické a myšlenkové jest však skoro ekvivalentní s úlohou dřívější — i když tady nutno více mysliti a uvažovati než počítati.*)

Výklad pojmu algebraického řešení rovnic. V příkladě f) na str. 70 jsme viděli, jak pomocí kořene Θ algebraické rovnice z $\mathbf{R}$ lze vytvořiti těleso, které je nadtělesem tělesa $\mathbf{R}$. Každé číslo takového tělesa lze pak vyjádřiti ve tvaru (1).

Z algebraických rovnic zvlášť jednoduché jsou rovnice zvané binomické. Budeme se nyní zabývati tělesy, které vzniknou adjunkcí kořenů takovýchto binomických rovnic.

Binomická rovnice tvaru

$$x^n - a = 0,$$

kde a jest racionální číslo a nikoliv n-tá mocnina, má, jak víme, n kořenů. Zvolme jeden z nich a označme jej $\Theta = \sqrt[n]{a}$. Takovýto symbol budeme nazývati radikálem. Přesněji: radikálem n-tého stupně nad těles m $\mathbf{R}$. Obecněji: Nechť jest $\mathbf{T}_K$ nějaké těleso a číslo a nikoliv n-tá mocnina z toho tělesa, potom číslo $\sqrt[n]{a}$ nazveme radikálem n-tého stupně nad $\mathbf{T}_K$.

Na př. Rovnice $x^3 - 7 = 0$ má kořeny $x_1 = \sqrt[3]{7}$, $x_2 = \varepsilon\sqrt[3]{7}$, $x_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{7}$. Zvolme $\Theta = \sqrt[3]{7}$. Potom těleso $\mathbf{R}(\Theta)$ skládá se ze všech čísel tvaru

*)Poznamenejme výslovně (a čtenář si toho jistě všiml), že $\mathbf{R}, \mathbf{T}_1 \ldots \mathbf{T}_N$ a vůbec každé číselné těleso, o kterém zde mluvíme jest obsaženo v „daleko širším“ tělese všech komplexních čísel. Podle fundamentální věty algebry rozpadne se v tomto tělese, jak již dávno víme, každý polynom z tělesa $\mathbf{R}$ (ba dokonce každý polynom s komlexními koeficienty) v samé lineární činitele. Nás však, na tomto místě, zajímá vždy „malé“ těleso $\mathbf{T}_N$, v němž tento rozklad v lineární činitele jest již možný.

$$\alpha = d_0 + d_1 \,.\, \sqrt[3]{7} + d_2(\sqrt[3]{7})^2,$$

kde d_1, d_2, d_3 jsou libovolná rac. čísla.

Zvolíme-li $\Theta = \varepsilon\sqrt[3]{7}$, jest $\mathbf{R}(\Theta)$ souhrn všech čísel tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1 \,.\, \varepsilon \,.\, \sqrt[3]{7} + d_1 \,.\, \varepsilon^2 \,.\, (\sqrt[3]{7})^2,$$

kde d_1, d_2, d_3 jsou opět libovolná racionální čísla.

Jiný příklad. Rovnice z tělesa $\mathbf{T} = \mathbf{R}(\sqrt{2})$

$$x^3 - (1 + \sqrt{2}) = 0$$

má 3 kořeny a to

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, \ \varepsilon\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, \ \varepsilon^2\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}.$$

Zvolme $\Theta = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$; potom Θ jest radikálem třetího stupně nad tělesem $\mathbf{T}$ a těleso $\mathbf{T}(\Theta)$ se skládá ze souhrnu všech čísel tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + d_2\,(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2,$$

kde d_0, d_1, d_2 jsou lib. čísla z tělesa $\mathbf{T} = \mathbf{R}(\sqrt{2})$, t. j. tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b jsou racionální.

Rovnice $x^2 - a = 0$, je-li a racionální, ale nikoliv čtverec, není v $\mathbf{R}$ řešitelná. Avšak v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{a})$, které dostáváme z $\mathbf{R}$ adjunkcí $\sqrt{a}$ lze psáti $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$. Kořen rovnice jest vyjádřen radikálem. Říkáme: daná rovnice jest řešitelná pomocí radikálů.

Zrovna tak rovnice $(x^2 - a)^3 - b = 0$, kde a, b jsou rac. čísla, má zřejmě kořen $x = \sqrt{a + \sqrt[3]{b}}$. Tato rovnice jest opět řešitelna radikály. Jenom, že nyní jest nutno adjungovati radikály postupně za sebou dvakrát. Nejdříve totiž k tělesu $\mathbf{R}$ adjungovati kořen rovnice

$$x^3 - b = 0, \text{ t. j. radikál } \beta = \sqrt[3]{b},$$

potom ještě kořen rovnice

$$x^2 = a + \beta, \text{ t. j. radikál } \sqrt[3]{a + \beta}.$$

Obecně budeme říkati, že nějaké číslo lze vyjádřiti radikály, jestliže jest obsaženo v tělese, které vzniklo z tělesa racionálních čísel konečným počtem postupných adjunkcí radikálů, vždy z tělesa předcházejícího.

Viděli jsme, že kořeny rovnice 2., 3., 4. stupně jsou vždy vyjádřeny radikály, t. j. rovnice 2., 3., 4. stupně lze vždy řešiti pomocí radikálů. Bylo snahou matematiků nalézti takové řešení (t. j. pomocí radikálů) i pro obecnou rovnici pátého a vyššího stupně. To však právě pro obecnou rovnici pátého (a tím spíše vyššího) stupně nejde. To znamená: Ne ke každé algebraické rovnici pátého stupně s racionálními koeficienty lze sestrojiti postupnou adjunkcí radikálů takové nadtěleso T_N, ve kterém se rovnice dá rozložiti v samé lineární činitele. Jinými slovy: Existují algebraické rovnice pátého stupně s racionálními koeficienty, jichž kořeny nelze vyjádřiti radikály. Proto nelze také kořeny algebraické rovnice pátého stupně s obecnými koeficienty $a, b, c, \ldots$ vyjádřiti vzorcem, který by byl funkcí koeficientů a neobsahoval žádných jiných matematických symbolů než konečný počet odmocnin.

Říkáme: Obecná rovnice pátého stupně jest algebraicky neřešitelná.

To ovšem neznamená, když jsou koeficienty dané rovnice vhodným způsobem specialisovány, že by se daná rovnice nedala řešiti pomocí radikálů. Naopak, dovedeme již řešiti speciální rovnice (na př. reciproké, pro dělení kruhu) i stupňů vyšších než čtvrtého. Obecně nazýváme rovnice, které lze řešiti radikály rovnicemi metacyklickými.

Poznámka I. Aby nevzniklo nedorozumění, jest nutno ještě jednou výslovně podotknouti: Máme-li předloženou rovnici jakéhokoliv stupně s danými numerickými koeficienty, dovedeme nalézti — jak později ještě podrobněji ukážeme — její kořeny s jakoukoliv přesností, t. j. na jakýkoliv počet desetinných míst. Zrovna tak (dle analogie goniometrického řešení rovnic třetího stupně) dovedeme řešiti rovnici pátého stupně pomocí t. zv. eliptických funkcí. Neexistuje však vzorec obsahující jen konečný počet odmocnin, kamž by stačilo dosaditi koeficienty předložené rovnice, abychom dostali hledané kořeny.

Poznámka II. Hledíme-li na řešení rovnic jako na konstrukci jistého nadtělesa T_N k tělesu R, nebudeme již jistě překvapeni tím, že každou rovnici (pátého a vyššího stupně) nelze algebraicky řešiti. Při algebraickém řešení, tak jak jsme si je definovali, smíme užíti k sestrojení hledaného nadtělesa T_N jen binomických rovnic. V příkladě f) na str. 70 jsme však viděli, že nadtělesa lze sestrojovati pomocí jakýchkoliv rovnic. Bylo by tedy právě naopak překvapující, kdyby zrovna binomické rovnice (přes svůj jednoduchý tvar) měly tak privilegované postavení, že by pomocí nich bylo možno sestrojiti k libovolnému polynomu těleso, v němž se tento rozpadne v samé lineární faktory.

Obecná rovnice pátého stupně jest neřešitelná pomocí radikálů. Měli bychom nyní provésti důkaz nahoře uvedeného tvrzení. Od podrobného důkazu musíme upustiti, neboť svoji povahou zasahuje příliš hluboko do jemných otázek algebry a čtenář, kterému jest tato knížka určena, těžko by dovedl vystihnouti všechny podrobnosti důkazu. Důkaz lze provésti na př. tak, že se nejdříve dokáže tato věta:

Algebraická ireducibilní rovnice pátého stupně s racionálními koeficienty, která jest řešitelná pomocí radikálů, musí míti buď jeden kořen reálný a dva páry kořenů komplexních sdružených, anebo 5 kořenů reálných.*)

Abychom potom ukázali, že algebraická rovnice pátého stupně

---

*) Tato věta pochází od Kroneckera; v jejím důkazu spočívá jádro důkazu našeho tvrzení. Věta jest speciálním případem podobné obecné věty o rovnicích prvočíselného stupně. Neřešitelnost obecných rovnic vyššího než čtvrtého stupně lze dokázati též jinými metodami, kde o stupni n rovnice nečiníme žádných zvláštních předpokladů (kromě $n > 4$). Takový důkaz, vyžadující však již hlubší znalosti teorie těles a t. zv. teorie grup, nalezne čtenář na př. v knize O. Perron: Lehrbuch der Algebra, II. díl.

není obecně řešitelna pomocí radikálů, stačí sestrojiti ired. rovnici pátého stupně, která má racionální koeficienty a jeden pár kořenů komplexních sdružených a tři kořeny reálné. Takových rovnic dovedeme udati, kolik chceme. Jest takovou na př.

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

(Že má tři kořeny reálné, zjistíme z grafického znázornění — že je ireducibilní, dá se též lehce dokázati.) Tato rovnice není řešitelna pomocí odmocnin, čímž naše tvrzení dokázáno.

Poznámka. Uvedený důkaz není jediným možným. Jiný důkaz — a ovšem úplný — nalezne čtenář v knize O. Perron: Algebra, a ještě jiný v knize Weber: Lehrbuch der Algebra. Všechny důkazy předpokládají však znalost z teorie těles a po případě z tak zvané teorie grup.

Dodatek. Když tedy obecná rovnice stupně vyššího než čtvrtého jest pomocí odmocnin neřešitelná, zajímají nás rovnice, které řešitelny jsou, čili — jak jsme je nazvali — rovnice metacyklické. Ptáme se na př. kdy rovnice s racionálními koeficienty jest metacyklická? Takové a podobné úvahy vedly k vyšetřování funkcí kořenů, kterých hodnota se jistými permutacemi indexů nemění — tak, jak jsme to již viděli dříve. Ukázalo se dále nanejvýš plodným vyšetřování jistého souhrnu permutací — anebo, jak říkáme, grup permutací. Ke každé algebraické rovnici přísluší jistá grupa permutací, zvaná grupou Galoisovou. Vlastnosti této grupy podávají jasný obraz o vlastnostech dané rovnice, na př. také o řešitelnosti pomocí radikálů.

Tato vyšetřování jsou dost obtížná; patří však nesporně — jak ještě jednou zdůrazňujeme — k nejhezčím partiím matematiky vůbec.