# O rovnicích

## 5. Některé zvláštní typy rovnic

In: Štefan Schwarz (author): O rovnicích. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1940. pp. 58–66.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402954

## 5. Některé zvláštní typy rovnic.

**Rovnice pro dělení kruhu.** Zajímavým a důležitým typem rovnic jest rovnice tvaru

$$x^n - 1 = 0. \qquad (1)$$

Řešením této rovnice jest $x = \sqrt[n]{1}$. Víme z Moivreovy poučky (str. 9), že $n$-tá odmocnina z každého komplexního čísla má $n$ hodnot a platí vzorec

$$\sqrt[n]{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ježto $1 = \cos 0 + i \sin 0$, dosadíme sem $\varphi = 0$ a máme ihned

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Označme první kořen $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \varepsilon$.

Dle Moivreovy poučky jest

$$\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon^k;$$

tedy: Řada čísel

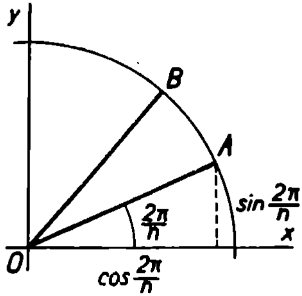
$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1 \qquad (2)$$

představuje všecky kořeny dané rovnice (1).

Nalezením kořenů dané rovnice v goniometrickém tvaru jsme úlohu v jistém směru úplně rozřešili.

Všimněme si nyní geometrického významu řešení (2). Abychom v komplexní rovině nalezli bod $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, sestrojíme kružnici o poloměru $r = 1$ a rozdělíme její obvod na $n$-stejných dílů. Bod $A$ příslušející úhlu $\frac{2\pi}{n}$ představuje číslo $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$. Bod $B$ příslušející úhlu $\frac{4\pi}{n}$ představuje číslo $\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2$ atd.

Vidíme tedy, že řešiti rovnici (1) neznamená geometricky nic jiného, než rozděliti plný úhel na $n$ stejných dílů [anebo — což je totéž — sestrojiti pravidelný $n$-úhelník vepsaný do kružnice].



Obr. 5.

Odtud pochází název uvedený v nadpisu.

Goniometrické řešení nás však úplně neuspokojuje. Zajímá nás řešení algebraické,*) t. j. takové, kde kořeny máme vyjádřeny jen pomocí odmocnin, bez goniometrických funkcí.

Na př. pro rovnici $x^3 - 1 = 0$ jsme nalezli $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Řešme ještě rovnici $x^5 - 1 = 0$. Po dělení kořenovým činitelem $x - 1$ lze psáti

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Dosadíme-li $x + \frac{1}{x} = y$, máme

*) Přesný výklad pojmu algebraické řešitelnosti jest podán na str. 74.

$$y^2 - 2 + y + 1 = 0,$$
$$y_{12} = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

odkud po dosazení do $x + \dfrac{1}{x} = y$ a řešení kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{5} + \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}\right), \\ x_{3,4} &= \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{5} - \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Vhodným obratem lze řešiti několik prvních rovnic, na př. také $x^7 - 1 = 0$ atd. Gaussovi**) se podařilo důvtipným způsobem nalézti obecnou metodu k řešení takových rovnic. Dokázal tím, že obecná rovnice typu (1) jest vždy algebraicky řešitelná. Jeho výsledky na tomto poli byly rozhodující důležitosti pro další vývoj nauky o rovnicích.

Gauss zároveň dokázal, že kořeny této rovnice lze vyjádřiti pomocí druhých odmocnin jenom tenkráte, je-li $n$ číslo složené z libovolné mocniny $2^\nu$ a prvočísel tvar $2^k + 1$, při čemž každé z nich smí vystupovati jen v první mocnině.

Ježto kružítkem a pravítkem lze sestrojiti jen takové

---

**) Karel Bedřich Gauss byl vůdčím duchem matematickým počátkem 19. století (nar. 30. dubna 1777 v Brunšviku, zemřel 23. února 1855 v Gotinkách). Jeho všestranný duch zasáhl hluboko do všech odvětví matematiky a astronomie, fysiky i geodesie. Gauss vynikl svou obsáhlostí a koncepcí daleko nad své současníky. Ať v číselné teorii a algebře, nebo v teorii magnetismu, nebo v otázkách nebeské mechaniky, všude jsou Gaussovy práce základem dalšího vývoje. Roku 1801 vydal svoje proslavené dílo „Disquisitiones arithmeticae" — vrchol tehdejší čisté matematiky. Gaussovi patří také zásluha, že zavedl čísla imaginární, dokázal první fundamentální větu, řadu vět z teorie ploch atd. Jeho objevy v teorii rovnic pro dělení kruhu měly nesmírný význam pro celé další století. Gauss byl si také vědom jejich ceny. Říká se, že jako si kdysi přál Archimedes, aby na jeho náhrobním kameni byl válec s koulí, tak i Gauss si přál, aby na jeho náhrobním kameni byl zvěčněn sedmnáctiúhelník — kterého se týká jedno z jeho vrcholných děl.

obecné algebraické výrazy, v kterých se vyskytují jen druhé odmocniny, znamená to, že **kružítkem a pravítkem** lze sestrojiti jen takové pravidelné mnohoúhelníky, jejichž počet stran má shora vytčenou vlastnost.

Speciálně pro mnohoúhelníky o prvočíselném počtu stran $p$, musí

$$p = 2^k + 1.$$

Toto číslo může býti prvočíslem — jak se lehce zjistí — jenom tenkráte, když $k = 2^\lambda$, tedy

$$p = 2^{2^\lambda} + 1.$$

Pro $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ máme prvočísla $p = 3, 5, 17, 257, 65\,537$. Pro $\lambda = 5$ však číslo $4\,294\,967\,297$ jest — jak Euler ukázal — dělitelné číslem 641 a tedy není prvočíslem.*) Nevíme, zda existují ještě vůbec další prvočísla tohoto tvaru.

Z napsaných čísel vyplývá, že pravidelný 5-úhelník a 17-úhelník lze pravítkem a kružítkem sestrojiti, ne však na př. pravidelný 7-úhelník. Další pravítkem a kružítkem konstruovatelný mnohoúhelník má 257 stran.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníka byla známa již v starověku. Je zajímavé, že sedmnáctiúhelník sestrojil první teprve Gauss a to až tehdy, když již znal řešení rovnice $x^{17} - 1 = 0$.

**Cvičení. 1.** Dokažte:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = 0.$$

**2.** Dokažte, je-li $\omega$ třetím kořenem z jedné jest

$$(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz!$$

**3.** Řešení rovnice $x^7 - 1 = 0$ lze převésti na řešení těchto dvou rovnic po sobě

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$x^2 - yx + 1 = 0.$$

Dokažte!

*) Euler tak také vyvrátil hypotetické tvrzení Fermatovo (1601—1665), že všechna čísla tvaru $2^{2^\lambda} + 1$ jsou prvočísla.

Usuďte odtud, že pravidelný sedmiúhelník nelze sestrojiti pravítkem a kružítkem.

4. Dokažte, že platí:

α) pro $n$ sudé: $(x^n - 1) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right) \cdot$

$\cdot \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right) \ldots \left(x^2 - 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x + 1\right),$

β) pro $n$ liché: $(x^n - 1) = (x - 1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right) \cdot$

$\cdot \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right) \ldots \left(x^2 - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x + 1\right).$

{Návod: Rozložíme v kořenové činitele a vynásobíme členy s koeficienty komplexními sdruženými:

$$\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right] =$$
$$= x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}x + 1.\}$$

5. Dokažte pomocí rovnice

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1).\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

tento zajímavý vztah:

$$\sin\frac{\pi}{2n}.\sin\frac{2\pi}{2n}.\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

[Návod: Dělte levou stranu $x - 1$. Dosaďte pak $x = 1$. Obecný výraz na pravé straně bude $2 - 2\cos\frac{k\pi}{n} = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$. Nalevo máme pak $2n$.]

**Reciproké rovnice.** Rovnici tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (4)$$

nazveme reciprokou — a to prvního nebo druhého druhu — platí-li pro koeficienty vztahy buď (I): $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots,$ (5)

nebo (II): $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}, a_2 = -a_{n-2}, \ldots$ (6)

Takto definované rovnice vyznačují se touto vlastností:

Má-li reciproká rovnice kořen $\alpha$, má i kořen $\frac{1}{\alpha}$.

Důkaz: Dle předpokladu jest $\alpha$ kořenem (4), t. j. platí

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Abychom dokázali, že $\frac{1}{\alpha}$ vyhovuje též rovnici (4), dosaďme tam. Máme

$$\begin{aligned} &a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_n = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n . (a_n\alpha^n + a^{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0). \end{aligned} \qquad (7)$$

V případě (I) máme však vzhledem k (5) místo (7) výraz

$$\frac{1}{\alpha^n} . (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n),$$

který je vskutku roven nule.

V případě (II) máme místo (7)

$$-\frac{1}{\alpha^n} . (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n),$$

což opět vymizí.

Řešení takovýchto rovnic lze lehce převésti na řešení rovnic nižšího stupně. To nyní ukážeme.

(Ia) Rovnice (4) buď sudého stupně, tvaru

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$$

Spojme první člen s posledním atd. a dělme $x^k$

$$\begin{aligned} &a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + \\ &+ a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Nyní dosadíme novou neznámou

$$x + \frac{1}{x} = y. \tag{9}$$

Postupně

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^m + \frac{1}{x^m} = y^m - my^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}y^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3}y^{m-6} + \ldots$$

Dosazením do (8) máme rovnici $k$-tého stupně

$$b_0y^k + b_1y^{k-1} + \ldots + b_k = 0. \tag{10}$$

Tato rovnice má $k$ kořenů, které nutno pak dosaditi do (9).

Problém se redukoval na řešení jediné rovnice $k$-tého stupně (10) a $k$ rovnic kvadratických (9).

(Ib) Rovnice (4) jest lichého stupně:

$$a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$$

Tato rovnice má vždy kořen $x = -1$ (jak se lehce přesvědčíme dosazením). Dělením faktorem $x + 1$ dostaneme reciprokou rovnici sudého stupně, kterou jsme vyšetřovali sub a).

(II) Reciproká rovnice druhého druhu

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots - a_1x - a_0 = 0$$

má vždy kořen $x = 1$, což plyne dosazením. Po dělení faktorem $x - 1$ zůstává pak rovnice $(n - 1)$ stupně, ale I. druhu, které jsme právě vyšetřili.

**Poznámka historická.** Řešením reciprokých rovnic zabýval se první Francouz Abraham de Moivre (1667—1754). Substituce $y = x + \frac{1}{x}$ pochází od Lagrangea (kolem r. 1770).

**Poznámka 1.** Rovnice pro dělení kruhu jest zvláštním případem rovnic reciprokých a zvláštním případem obecné třídy rovnic zvaných rovnicemi Abelovými. Tak nazýváme totiž nerozložitelné algebraické rovnice, u kterých jeden kořen jest racionální funkcí jiného kořene. Tak u rovnice pro dělení kruhu jsou všechny kořeny mocninami jediného. Abelovy rovnice se vyznačují tím, že se dají vždy algebraicky řešiti.

**Poznámka 2.** Často se stává, že jest předložena k řešení rovnice s numerickými koeficienty vhodným způsobem specialisovaná. Zde ovšem záleží všecko na vhodné úpravě výrazů. Získati zručnosti v řešení takových příkladů jest věcí početní a matematické bystrosti a hlavně praxe. Zde nelze udati obecné metody, nutno každý případ vyšetřiti zvláště. Ve cvičení podáváme několik příkladů pro čtenáře.

**Cvičení. 1.** Uvažte podrobně: Ježto dovedeme řešiti obecnou rovnici třetího a čtvrtého stupně, dovedeme řešiti reciproké rovnice I. druhu až do devátého stupně a rovnice II. druhu dokonce až do desátého stupně.

**2.** Řešiti $(x+1)^6 + (x-1)^6 = a\,(x^6+1)$!

**3.** Řešiti $(x+1)^8 + (x-1)^8 = a\,(x^8+1)$!

**4.** Řešiti $(x+1)^{12} + (x-1)^{12} = 2\,(x^4 + 6x^2 + 1)^3$. (Substituce $y = x + \dfrac{1}{x}$; $y_{1,2} = 0$, $y_{3,4} = \pm\, i$, $x_{1,2,3,4} = \pm\, 2i$, $x_{5,6,7,8} = {}$ $= \pm\,(1 \pm \sqrt{2})\, i$.)

**5.** Čtverce kořenů jisté reciproké rovnice čtvrtého stupně jsou kořeny reciproké rovnice čtvrtého stupně identické s původní. Nalezněte všechny rovnice žádané vlastnosti! [Jsou čtyři: $(x-1)^4 = 0$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, $(x^2 + x + 1)^2 = 0$, $(x-1)^2\,(x^2 + x + 1) = 0$.]

Jest řešiti rovnice:

**6.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$ [$x_{1,2} = -1{,}73\dot{2}\ldots$; $x_3 = 3$].

**7.** $x^4 + x^3 + 6x^2 + 8x + 2 = 0$ [$x_1 = -1$; $x_2 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}\,(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \pm i\sqrt{3}\,.\,\frac{1}{2}\,(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$].

**8.** $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$.

**9.** $x(x+2)(x+4)(x+6) = 105$ [$z = x + 3$ nová nezn.; $1; -7; -3 \pm i\sqrt{6}$].

**10.** $x^3 + 6x^2 + 12x = 117$ [$3; \frac{1}{2}(-9 \pm 5i\sqrt{3})$].

**11.** $3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0$ ($-2; -\frac{2}{3}; -6$).

**12.** $x^4 - 4x^3 + 6x - 4x^2 = 15$.

**13.** Metodou, kterou jsme rozřešili rovnici třetího stupně při Cardanově vzorci, lze řešiti i obecnější rovnice tvaru

$$x^n - \frac{n}{1}\binom{n-2}{0}\frac{p}{n}x^{n-2} + \frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{1}\frac{p^2}{n^2}x^{n-4} - \ldots - P = 0.$$

Řešte tak $x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2x + q = 0$! [Vyjde $x_1 = A + B = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}}$; $x_2 = \varepsilon A + \varepsilon^4 B$, $x_3 = \varepsilon^2 A + \varepsilon^3 B$, $x_4 = \varepsilon^3 A + \varepsilon^2 B$, $x_5 = \varepsilon^4 A + \varepsilon B$.] [$\varepsilon$ jest pátý kořen z 1.]

Řešte rovnice:

**14.** $x^3 - 3ax + a^3 + 1 = 0$.

**15.** $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + (a^5 + 1) = 0$.