O rovnicích

4. Řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně

In: Štefan Schwarz (author): O rovnicích. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1940. pp. 37–57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402953

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fysiků v Praze

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4. Řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně.

Přistoupíme nyní k metodám, jak nalézti kořeny dané obecné rovnice.

Kvadratická rovnice. Rovnici druhého stupně $ax^2 + bx + c = 0$ řešíme — jak známo — tak, že doplníme levou stranu na úplný čtverec. Jest

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

Otázka, která nás vždy bude zajímati, jest: Kdy má taková rovnice vícenásobný kořen. Z výrazu pro $x_{1,2}$ jest jasné, že to nastane tenkrát, když výraz $D = b^2 - 4ac$, zvaný diskriminant rovnice, jest roven nule.

Tato otázka dá se však vždy řešiti bez znalosti kořenů; to nyní provedeme ihned dvěma způsoby.

α) Dle obecné teorie o vícenásobných kořenech v 2. kapitole bude míti naše rovnice dvojnásobný kořen, má-li $ax^2 + bx + c = 0$ a derivace $2ax + b = 0$ společné řešení. Ježto druhá rovnice má jen jediné řešení $x = -\frac{b}{2a}$, musí

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

t. j. $$D = b^2 - 4ac = 0,$$
jak již víme.

β) Instruktivnější — vzhledem k dalšímu — jest řešení téže otázky pomocí symetrických funkcí. Hledejme takovou symetrickou funkci, která se rovná nule, když oba kořeny splynou.

(Když ji nalezneme, máme problém řešen, neboť dle věty o symetrických funkcích lze tuto vyjádřiti pomocí čísel a, b, c.)

Takovou funkcí jest „skoro" $x_1 - x_2$. Tato ale není symetrickou, neboť záměnou indexů změní znaménko. Naproti tomu $(x_1 - x_2)^2$ jest symetrickou funkcí a rovná se nule, když $x_1 = x_2$. Počítejme — pamatujíce na vlastnosti kořenů $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ —

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$$
$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{D}{a^2};$$

odtud vidíme tedy: Je-li $D = 0$, je $x_1 = x_2$ a naopak.

Všimněte si úzkého vztahu mezi $(x_1 - x_2)^2$ a D!

Podrobný rozbor rovnice (*) přenechávám laskavému čtenáři.

Cvičení. 1. Řešte rovnici $x^2 - (5 + 4i)\,x + (6 + 8i) = 0$! $[3 + 4i;\ 2]$

2. Jsou-li koeficienty dané rovnice veliká čísla, volíme místo (*) toto t. zv. goniometrické řešení kvadratické rovnice. Píšeme $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c}$. Je-li $c > 0$ a $c < \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, položme $c = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 . \sin^2\varphi$. Pak $x_{1\cdot 2} = -\frac{b}{2a} \pm$
$\pm \frac{b}{2a}\cos\varphi = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi) = \begin{cases} -\frac{b}{a}\sin^2\frac{1}{2}\varphi \\ -\frac{b}{a}\cos^2\frac{1}{2}\varphi \end{cases}$, kde φ je definováno vztahem $\sin^2\varphi = \frac{4a^2c}{b^2}$. Tento výraz se hodí

k logaritmování. Jsou možná i jiná goniometrická řešení. Nalezněte nějaké další! Řešte rovnici

$$x^2 - 93{,}7062x + 1984{,}74 = 0! \quad [61{,}3607;\ 32{,}3454.]$$

3. Ukažte, že rovnice

$$x^2 + 2(b_1 + ib_2)x + (c_1 + ic_2) = 0$$

má reálný kořen, když $c_2^2 - 4b_1b_2c_2 + 4c_1b_2^2 = 0$!

4. Ukažte: Nutná a postačující podmínka proto, aby oba kořeny rovnice $x^2 + ax + b = 0$ měly absolutní hodnotu rovnou 1 jest: $|a| \leq 2$, $|b| = 1$, $2 \operatorname{ampl} a = \operatorname{ampl} b$.

5. Jestliže do rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dosadíme novou neznámou y vztahem $x = \dfrac{my + n}{py + q}$ (t. zv. lineární lomená substituce) dostaneme opět kvadratickou rovnici v proměnné y. Diskriminant této nové rovnice liší se od diskriminantu původní rovnice jen tím, že jest násobkem tohoto. Faktorem úměrnosti jest výraz $(mq - np)^2$. Jestliže substituce jest taková, že $mq - np = \pm 1$ (t. zv. unimodulární substituce), jsou oba diskriminanty dokonce stejné. Říkáme proto, že výraz $b^2 - 4ac$ jest invariantem vzhledem k těmto lineárním substitucím. Proveďte podrobně!

6. Řešte rovnici $ax^2 + bx + a = 0$! Jakou vlastnost mají kořeny? [Reciproká rovnice.]

7. Dokažte, že mnohočlen 2. stupně, který pro $x = a, b, c$ nabývá po řadě hodnot α, β, γ, má tvar

$$f(x) \equiv \alpha \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \beta \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \gamma \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}!$$

(t. zv. kvadratická interpolace).

8. Rovnice s reálnými koeficienty a kořeny $ax^2 + bx + c = 0$ dá se pohodlně řešiti také takto. Nechť jest $s_k = x_1^k + x_2^k$ a $|x_1| > |x_2|$. Jest

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1}}{x_1^k + x_2^k} = x_1 \cdot \frac{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{k+1}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k}.$$

Protože je $\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right| < 1$, je pro dosti veliká k hodnota $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^k$ velmi malá. Přesně $\lim\limits_{k=\infty} \dfrac{s_{k+1}}{s_k} = x_1$. $\left(\text{Ježto } \lim\limits_{k=\infty} \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^k = 0\right)$.

Vypočteme-li tedy postupně $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$, lze lehce určiti hodnotu většího z kořenů. Na př. pro rovnici $x^2 - 2x - 1$ (užíváme Newtonových vztahů) $s_0 = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$, $s_3 = 2 \cdot 6 + 2 = 14$, $s_4 = 2 \cdot 14 + 6 = 34$, $s_5 = 2 \cdot 34 + 14 = 82$, $s_6 = 2 \cdot 82 + 34 = 198$, $s_7 = 2 \cdot 198 + 82 = 478$, $s_8 = 2 \cdot 478 + 198 = 1154$, $s_9 = 2 \cdot 1154 + 478 = 2786$, $s_{10} = 2 \cdot 2786 + 1154 = 6726$. Jest $\frac{s_{10}}{s_9} = 2{,}41421393\ldots$ Přesná hodnota jest $2{,}41421356\ldots$ Proč neplatí věta pro rovnice s komplexními kořeny? $\left[\text{Není } \left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1, \text{ nýbrž vždy } \left|\frac{x_2}{x_1}\right| = 1.\right.$ Uvažte na př. při rovnici $x^2 - 2x + 2 = 0!\Big]$

9. Sestrojte rovnici, která má za kořeny k-té mocniny kořenů rovnice $x^2 - 2ax + b = 0$! [$x^2 - s_k x + b^k = 0$; s_k má známý význam.]

Kubická rovnice. K rovnicím třetího stupně (kubickým) dospěli matematikové z četných geometrických problémů jako trisekce úhlu, zdvojení krychle a pod. Geometrické úlohy vedoucí ke kubickým rovnicím jsou pravítkem a kružítkem obecně neřešitelné. Jestliže se o ně přes to pokoušeli matematikové starověku a středověku, má to pro dnešní dobu ten význam, že se rozmohlo pěstování rovnic třetího a vyššího stupně a položen tak základ k výstavbě algebry.

a) Dřív než přistoupíme k řešení obecné rovnice třetího stupně, bude nutno rozřešiti tuto speciální rovnici

$$x^3 - 1 = 0. \tag{1}$$

Rovnici (1) lze psáti $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$, odkud

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

Čísla $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ představují nám třetí odmocniny z jedné.

Třetí odmocnina z 1 a vůbec z každého čísla má tedy tři hodnoty. Řešení rovnice

$$x^3 - a = 0 \tag{2}$$

nalezneme tak, že si nejdříve pod znakem $\sqrt[3]{a}$ myslíme jednu docela určitou hodnotu odmocniny; další kořeny jsou pak $\varepsilon\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{a}$. (Srovnej také s odst. Moivreova poučka v 1. kapitole.)

Rovnicemi tvaru (1) budeme se zabývati obšírně v 5. kapitole.

b) K řešení kubické rovnice

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{3}$$

existuje veliká řada metod. Uvedeme si dvě typické.

První z nich pochází od Huddeho.*)

Především místo x zavedeme novou neznámou y vztahem

$$\boxed{x = y - \tfrac{1}{3}a_1}$$

$$(y - \tfrac{1}{3}a_1)^3 + a_1(y - \tfrac{1}{3}a_1)^2 + a_2(y - \tfrac{1}{3}a_1) + a_3 = 0.$$

Z rovnice vypadne člen s y^2 a zůstane rovnice tvaru

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3'}$$

kde

$$p = a_2 - \tfrac{1}{3}a_1^2 \qquad q = a_3 - \tfrac{1}{3}a_1a_2 + \tfrac{2}{27}a_1^3. \tag{4}$$

Podstatou metody jest nyní, že místo jedné neznámé y zavedeme neznámé dvě: u a v vztahem

$$y = u + v. \tag{5}$$

Tedy $\qquad (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$

po úpravě

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{6}$$

---

*) První, kdo objevil řešení kubické rovnice byl Scipione del Ferro (od 1496—1526 prof. v Bologni). Poté se rozpoutal nepěkný boj o prioritu mezi Geronimem Cardanem (Hieronymus Cardano 1501—1576, Pavia a Řím) a Nicola Tartagliou (1500—1557, Brescia). Cardano uveřejnil první svoje řešení ve své knize „Ars magna“ (Norimberk, 1545), proto se mluví dnes o Cardanově vzorci.

Rozřešení kubické rovnice bylo na tehdejší dobu — kdy ještě neexistovala matematická symbolika a dnešní „mluva vzorců“ — výkon skoro zázračný. Cardano pomáhá si geometrickými obrazci, a ježto neznal přirozeně ani imaginárních čísel, musel činiti různé předpoklady o znaménkách koeficientů a pod.

Ježto jsme místo jedné neznámé y zavedli dvě neznámé u, v, můžeme ještě mezi u a v voliti jeden vztah. Volme u, v tak, aby bylo

$$3uv = -p. \tag{7}$$

Pak ale z (6) plyne

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{8}$$

Z těchto dvou rovnic vyjde (jako řešení kvadratické rovnice)

$$v^3 = -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3},\quad u^3 = -\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}.$$

(anebo obráceně s výměnou u^3 a v^3).

Dále

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}},\\ u &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Každá z veličin (9) jest trojznačná. Měli bychom tedy pro y zdánlivě 9 hodnot odpovídajících všem kombinacím u, v. Nesmíme však zapomínat, že čísla (9) mají vyhovovat (7) a (8) [a že jsme rovnici (7) během počítání umocnili]. Musíme zjistiti, zda tomu tak jest. Rovnice (8) jest zřejmě splněna, ať pod odmocninou rozumíme kteroukoliv hodnotu odmocniny.

Dle (7) má však býti

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}\cdot\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} = \\ = -\tfrac{1}{3}p. \tag{10}$$

Na levé straně vyjde po vynásobení nejdřív jen trojznačný výraz $\sqrt[3]{-(\frac{1}{3}p)^3} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{3}p)^3}$. Má-li býti tento výraz roven pravé straně, musíme to zaříditi tak, že hodnotu odmocniny jednoho faktoru v (10) volíme libovolně, ale hodnotu druhého již ne libovolně, nýbrž právě tak, aby (10) bylo splněno.

Dle (5) jest pak jedno řešení rovnice (3′)

$$y_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \tag{11}$$

Jestliže — jak řečeno — jedné odmocnině přisoudíme všechny tři hodnoty a druhé z odmocnin pak takovou hodnotu, aby byl splněn vztah (10), jsou další kořeny — má-li ε, ε^2 význam dříve citovaný —

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varepsilon \,.\, \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \\ &+ \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}, \\ y_3 &= \varepsilon^2 \,.\, \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \\ &+ \varepsilon \,.\, \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Vzorec (11), (11′) nazývá se **Cardanova formule.**

Chceme-li nyní nalézti řešení původní rovnice (3), stačí se vrátiti k původní proměnné ze (4).

Máme

$$(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3 = (\tfrac{1}{2}a_3 - \tfrac{1}{6}a_1a_2 + \tfrac{1}{27}a_1^3)^2 + (\tfrac{1}{3}a_2 - \tfrac{1}{9}a_1^2)^3 =$$
$$= \tfrac{1}{4}a_3^2 - \tfrac{1}{6}a_1a_2a_3 - \tfrac{1}{108}a_1^2a_2^2 + \tfrac{1}{27}a_1^3a_3 + \tfrac{1}{27}a_2^3 = -\tfrac{1}{108}D,$$

kde D budeme nazývati **diskriminantem** rovnice (1). Je pak

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}a_1 + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{6}a_1a_2 - \tfrac{1}{27}a_1^3 + \tfrac{1}{18}\sqrt{-3D}} +$$
$$+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{6}a_1a_2 - \tfrac{1}{27}a_1^3 - \tfrac{1}{18}\sqrt{-3D}}$$

a analogicky další.

c) Metoda řešení rovnice (3′) byla jednoduchá, ale do značné míry *náhodná*. [Němci mají pro podobné obraty výstižné slovo „*Kunstgriff*“.]

Systematičtější jest metoda pomocí symetrických funkcí pocházející od *Lagrange*.*) Hledejme totiž nějaké jednoduché

*) Joseph Louis Lagrange (1716—1813; pochován jest v pařížském Pantheonu). Jeho život spadá do období francouzské revoluce, znamenající v dějinách matematiky horečnou činnost přečetných znamenitých učenců. Hlavní Lagrangeovy práce týkají se užití infinitesimálního počtu v mechanice.

symetrické funkce kořenů rovnice

$$x^3 + px + q = 0.$$

Takovou jest na př. $x_1 + x_2 + x_3$. Pro tu — ježto chybí člen s x^2 — platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Podobný výraz $x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3$, resp. $x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3$ není symetrickou funkcí; zato však výrazy $t_1 = (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3$ a $t_2 = (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3$ mají tu vlastnost, že se cyklickou*) záměnou indexů vůbec nemění.

Pokusíme se určiti jejich hodnotu. Abychom vypočetli hodnoty t_1 a t_2 jako funkce koeficientů p, q, nalezněme kvadratickou rovnici tvaru

$$t^2 + b_1 t + b_2 = 0,$$

které t_1 a t_2 vyhovují. Pro koeficient b_1 máme

$$\begin{aligned} -b_1 &= (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3 + (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + \\ &+ x_3^3 + 3\varepsilon\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) + 3\varepsilon^2\,(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + \\ &+ x_3^2 x_2) + 6x_1x_2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\varepsilon^2\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \\ &+ x_3^2 x_1) + 3\varepsilon\,(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) + 6x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

(Užíváme vztahů $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^4 = \varepsilon$, $\varepsilon^5 = \varepsilon^2$.) Ježto z $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ plyne $\varepsilon^2 + \varepsilon = -1$, máme

$$\begin{aligned} -b_1 &= 2\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + \\ &+ x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) + 12x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Přidáme a ubereme člen $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ a $6x_1x_2x_3$ a máme:

$$-b_1 = 3\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1 + x_2 + x_3)^3 + 18x_1x_2x_3.$$

Dle Newtonových vzorců na str. 35 jest $s_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$, tedy

$$-b_1 = -9q - 0 - 18q = -27q.$$

Dále

$$\begin{aligned} b_2 &= t_1 \cdot t_2 = (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3\,(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3 = \\ &= [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3]^3 = [(x_1 + \\ &+ x_2 + x_3)^2 - 3\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)]^3 = [-3p]^3 = \\ &= -27p^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Jeho práce v algebře, směřující k řešení rovnic, pocházejí z let 1770—71. Lagrange sestrojuje jisté výrazy kořenů a vyšetřuje jejich vlastnosti vzhledem k permutacím indexů. Zavádí pojem resolventy atd. Tyto práce jsou prvním stupněm k dosažení výsledků pocházejících teprve od Abela a E. Galoise.

*) T. j. píšeme-li na př. místo x_1 kořen x_2 a pak místo x_2 kořen x_3 a místo x_3 kořen x_1.

Tedy

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0.$$

Tuto rovnici nazýváme kvadratickou resolventou kubické rovnice. Dovedeme-li totiž rozřešiti tuto rovnici, máme — jak ihned uvidíme — řešenu i původní rovnici.

Jest

$$t_1 = 27\left[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}\right],$$
$$t_2 = 27\left[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}\right].^{*})$$

Máme tedy tři rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 &= \sqrt[3]{t_1} \\ x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 &= \sqrt[3]{t_2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ježto — jak jsme v (12) vypočetli — je $(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = -3p$, musíme rozumět odmocninám v (13) opět tak, že si zvolíme jen takové jejich hodnoty, aby součin byl $(-3p)$.

Vzhledem ke vztahu $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ dostaneme sčítáním rovnic (13)

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}\right).$$

Násobíme-li (13) po řadě 1, ε, ε^2, nebo 1, ε^2, ε a sčítáme, máme

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon^2\sqrt[3]{t_1} + \varepsilon\sqrt[3]{t_2}\right),$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon\sqrt[3]{t_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{t_2}\right),$$

což jsou Cardanovy formule.

d) Chceme nyní provésti diskusi získaných výsledků.

Uvažujme výraz

$$D = -108\left[(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3\right] = -(27q^2 + 4p^3),$$

který jsme nazvali diskriminantem rovnice (3′).

Ukážeme, že jest

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2. \tag{14}$$

Abychom to dokázali, stačí dosaditi:

---

*) Přímým výpočtem se přesvědčíme, že jsme volili znaménka správně.

$$y_1 = u + v,\ y_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2,\ y_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon,$$
$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3});\ \varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3});\ 1 - \varepsilon = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3};$$
$$1 - \varepsilon^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3};\ \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3},$$
$$y_1 - y_2 = \tfrac{3}{2}(u + v) - i\sqrt{3}\,.\,\tfrac{1}{2}(u - v),$$
$$y_1 - y_3 = \tfrac{3}{2}(u + v) + i\sqrt{3}\,.\,\tfrac{1}{2}(u - v),$$
$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 3(u^2 + v^2 + uv),\quad y_2 - y_3 = i\sqrt{3}(u - v),$$
$$[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2 = -27(u^3 - v^3) = -(27q^2 + 4p^3),\ \text{c. b. d.}$$

Dosavadní výsledky platily pro kubickou rovnici s libovolnými koeficienty. Nyní předpokládejme, že p a q jsou čísla reálná.

Platí: Jestliže pro diskriminant kubické rovnice s reálnými koeficienty je $D > 0$, má rovnice tři kořeny reálné; je-li $D = 0$, má rovnice tři kořeny reálné, které však nejsou vesměs různé. Je-li $D < 0$, má rovnice jeden kořen reálný a jeden pár kořenů komplexních sdružených.

Důkaz: Ze (14) plyne:

α) Jsou-li y_1, y_2, y_3 reálné a navzájem různé, jest D jako čtverec reálného čísla kladný.

β) Jsou-li kořeny y_1, y_2, y_3 navzájem různé a existuje-li pár komplexních sdružených kořenů, nechť jest to y_1 a y_2. Výraz $(y_1 - y_2)^2$ jest pak záporný, ale $(y_3 - y_1)^2\,(y_3 - y_2)^2$ jakožto součin dvou komplexních sdružených čísel jest kladný. Tedy $D < 0$.

γ) Je-li $D = 0$, existuje — jak víme — (alespoň) dvojnásobný kořen; ten jest ovšem reálný, a ježto komplexní kořeny vystupují jen v párech, musí býti i třetí kořen reálný.

e) Cardanův vzorec podává řešení kubické rovnice v nevhodném tvaru, a to ze dvou důvodů.

α) Rovnice $y^3 - 5y + 4 = 0$ má — jak patrno na první pohled — kořen $y = 1$. Cardanův vzorec však dává

$$y = \sqrt[3]{-2 + \tfrac{1}{3}\sqrt{-\tfrac{13}{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{-\tfrac{13}{3}}}.$$

Jest ovšem $\sqrt[3]{-2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{17}{3}}$ — jak se přesvědčíme umocněním na třetí — takže úpravou dostáváme $y = 1$; v takovémto případě jest však lépe hledati racionální kořeny zkusmo.

β) Jestliže $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$ (to je možné jen pro $p < 0$), má rovnice 3 reálné kořeny. Cardanův vzorec podává je však ve tvaru komplexním. To zdá se býti oklikou, kterou by bylo lépe obejíti. Kdybychom chtěli tyto komplexní veličiny odstraniti, t. j. třetí odmocniny komplexních čísel, které jsou v Cardanově formuli, uvésti na tvar komplexního čísla $A + Bi$, zjistili bychom, že veličiny A, B musí vyhovovati úplně stejné rovnici, jako byla rovnice daná. Kořeny rovnice pro A byly by reálné, takže ve výraze pro A by vystupovaly opět komplexní veličiny. Proto byl tento případ nazván „casus irreducibilis“.

Dá se dokázati, že neexistuje žádný tvar algebraického řešení*) rovnic 3. stupně s třemi reálnými kořeny, který by operoval jen reálnými čísly a že tedy objevení se komplexních veličin není důsledkem nevhodně voleného postupu řešení.

f) V případě $D > 0$ pomáháme si proto jednoduše t. zv. řešením goniometrickým.

Je-li $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$, musí $p < 0$. Položme ve vzorci

$$y = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}$$

$$-\tfrac{1}{2}q = \varrho \cos\varphi,$$

$$\sqrt{-(\tfrac{1}{2}q)^2 - (\tfrac{1}{3}p)^3} = \varrho \sin\varphi,$$

(to lze, neboť $D > 0$). Odtud

$$\varrho = \sqrt{(-\tfrac{1}{3}p)^3} > 0$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\varrho} = -\frac{q}{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}}.$$

*) T. j. (zhruba řečeno) pomocí odmocnin. Přesný výklad viz str. 74.

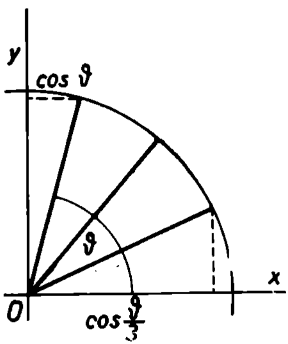
Je $\quad y = \sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + \sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)}.$

(Při tom musí součin obou odmocnin býti, jako vždy, $-\frac{1}{3}p$.) Dle Moivreovy poučky v 1. kapitole je

$$\sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{\varrho}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)] =$$
$$= \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)].$$

Stejně

$$\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) - i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)].$$



Obr. 4.

Aby součin byl $(-\frac{1}{3}p)$, stačí vzíti v obou výrazech totéž číslo k. Jest tedy pro $k = 0, 1, 2$:

$$y_1 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$y_2 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2\pi),$$
$$y_3 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 4\pi). \qquad (15)$$

Také pro $D < 0$ lze odvoditi řešení goniometrické; není však již tak jednoduché.

Poznámka. Goniometrické řešení ukazuje, že řešení kubické rovnice úzce souvisí s úlohou rozděliti úhel na tři díly. Poznáme to přímo takto: Z goniometrie je známý vztah

$$4\cos^3\tfrac{1}{3}\vartheta - 3\cos\tfrac{1}{3}\vartheta = \cos\vartheta.$$

Položme

$$x = 2\cos\tfrac{1}{3}\vartheta, \text{ pak } x^3 - 3x - 2\cos\vartheta = 0.$$

Rozděliti úhel na tři díly znamená nalézti veličinu x, je-li dáno $\cos\vartheta$. (Viz obr. 4.) Ježto pro x jsme dostali rovnici 3. stupně, dá se dokázati, že ji lze řešiti pomocí druhých odmocnin jen pro některé speciální hodnoty ϑ. Jest proto trisekce úhlu pravítkem a kružítkem obecně neřešitelná.*)

*) Bližší výklad viz v knize: Vl. Knichal: Konstrukce pravítkem a kružítkem, (vyjde nákl. JČMF).

Cvičení. 1. Řešte rovnice:

α) $2x^3 - 3x - 3 = 0$. [1,568, . . .]

β) $x^3 + 7x + 3 = 0$. [— 0,4181286; 0,209064 ± 2,67042*i*.]

γ) $x^3 + 3x + 2 = 0$. [— 0,5961; . . .]

δ) $x^3 - 9x - 28 = 0$. [4; $-2 \pm i\sqrt{3}$.]

2. Ukažte dle odstavce e) neupotřebitelnost Cardanova vzorce v příkladech:

α) $x^3 + x + 10 = 0$.

β) $x^3 + 2x - 3 = 0$.

γ) $x^3 - 4x - 3 = 0$.

δ) $x^3 - x - 6 = 0$.

3. Řešte $x^3 - 3x - 2 = 0$! [$x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1$.]

4. Řešte rovnici $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, víte-li, že mezi x_1 a x_2 platí vztah $x_2 = x_1^2 + x_1 + 1$.

[Návod: Dosazením za x_2 do původní rovnice jest $x_1^6 + 3x_1^5 - 5x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 = 0$. Společný dělitel tohoto výrazu a původní rovnice jest $x_1 - 1$. Jest pak $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.]

5. Jest dán mnohočlen $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ mající kořeny 1, α, β. Nalezněte mnohočlen $\varphi(x)$ druhého stupně, který při $x = 1$ je roven 1, při $x = \alpha$ nabývá hodnoty β a při $x = \beta$ nabývá hodnoty α! [$\varphi(x) = \frac{1}{5}(4x^2 + 3x - 2)$.]

6. Dokažte: Mají-li kořeny rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \qquad (*)$$

tvořiti aritmetickou řadu, musí

$$2a_1^3 - 9a_0a_1a_2 + 27a_3a_0^2 = 0.$$

[Návod. Dosaďte za x do (*) $x_1 - d$, x_1, $x_1 + d$. Ze vzniklých tří rovnic eliminujte dvě neznámé x_1, d!] [Lze také dokázati že výraz na levé straně jest roven součinu $(x_1 - 2x_2 + x_3) . (x_2 - 2x_3 + x_1) . (x_3 - 2x_1 + x_2)$, z čehož plyne okamžitě jiný důkaz.]

7. Dokažte, že $a_1^3 . a_3 - a_0 . a_2^3 = 0$ je postačující podmínkou, aby rovnice (*) měla kořeny, tvořící geometrickou řadu.

8. Budiž $2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_0a_3^2 = 0$. Pak jeden kořen rovnice (*) jest harmonickým průměrem obou dalších. Dokažte!

9. Aby rovnice (*) měla dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale opačného znaménka, musí platiti

$$a_0a_3 - a_1a_2 = 0. \text{ Dokažte!}$$

[Návod. Rovnici musí hověti $-x$; obě rovnice sečteme a odečteme a eliminujeme proměnnou x^2.]

10. Dokažte, že tyto geometrické úlohy vedou na kubické rovnice nerozložitelné ve dvě části s racionálními koeficienty (a jsou tedy pravítkem a kružítkem obecně neřešitelny):

α) Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, je-li dáno: obvod $2s$ poloměr kružnice vepsané ϱ.

β) Sestrojiti obecný trojúhelník, dáno-li u_α, u_β, u_γ.

γ) Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, dáno-li r, P.

11. Řešení kubické rovnice lze provésti také tak, že do rovnice

$$a_0x^3 - 3a_1x^2 + 3a_2x - a_3 = 0$$

dosadíme y substitucí $x = \dfrac{\mu y - \lambda}{y - 1}$ a volíme μ a λ tak, aby rovnice přešla na tvar $y^3 - A = 0$. Ukažte, že k tomu nutno a stačí zvoliti za λ a μ kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - \frac{a_0a_3 - a_1a_2}{a_0a_2 - a_1^2} \cdot z + \frac{a_1a_3 - a_2^2}{a_0a_2 - a_1^2} = 0!$$

Rovnice čtvrtého stupně. Řešení a diskusi rovnic čtvrtého stupně nebudeme prováděti již tak detailně jako u rovnice 3. stupně, ježto metody vyšetřování jsou skoro stejné. Na některých místech uvedeme jen výsledky.

a) První metoda k řešení rovnice

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (1')$$

jest Eulerova*) modifikace metody Huddeovy.**)

---

*) Leonhard Euler (nar. v Basileji r. 1707). Jeho otec, reform. farář byl žákem slavného J. Bernoulliho. Byl proto prvním učitelem svého syna. Euler již v 23 letech byl členem petrohradské Akademie, později ředitelem berlínské Akademie. Od r. 1735 byl slepý na jedno oko; v r. 1766 dokonce oslepl úplně. Přece však nepřestával pracovati a své práce až do r. 1783, kdy zemřel, diktoval. Euler byl poslední matematik všestranně činný. Jeho práce v integrálním počtu, v teorii čísel, v trigonometrii, v teorii křivek, hlavně však v nauce o řadách jsou základem, na němž spočívá veliká část dnešní matematiky. Nemalá jest také zásluha Eulerova, že zavedl definitivní symboliku, názvosloví a označování matematických veličin (jako e, π, i, kombinační čísla atd.). Vydal veliký počet prací, psaných velmi jasně a srozumitelně.

Substitucí $x = y - \frac{a_1}{4}$ odstraníme člen s x^3. Bude

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{1}$$

kde

$$p = a_2 - \tfrac{3}{8}a_1^2,$$
$$q = a_3 - \tfrac{1}{2}a_1a_2 + \tfrac{1}{8}a_1^3,$$
$$r = a_4 - \tfrac{1}{4}a_1a_3 + \tfrac{1}{16}a_1^2a_2 - \tfrac{3}{256}a_1^4.$$

Dosaďme místo jedné neznámé y **tři** neznámé u, v, w, vztahem

$$2y = u + v + w.$$

Pamatujme při tom, že máme pak ještě k disposici dva vztahy mezi u, v, w, které si můžeme voliti vhodným způsobem. Počítejme

$$4y^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2\,(uv + uw + vw),$$
$$16y^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4\,(u^2 + v^2 + w^2)\,(uv + vw + wu) + $$
$$+ 4\,(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw\,(u + v + w).$$

Dosaďme do (1) násobené 16; je

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4\,(uv + vw + wu)\,(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) +$$
$$+ 4p\,(u^2 + v^2 + w^2) + 8\,(uvw + q)\,(u + v + w) +$$
$$+ 4\,(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2) + 16r = 0. \tag{2}$$

Za dva volitelné vztahy vezmeme

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \tag{3}$$
$$uvw = -q. \tag{4}$$

Z rovnice (2) zůstává po dosazení

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = p^2 - 4r. \tag{5}$$

[J. Bernoulli, o kterém se vpředu zmiňujeme, byl jedním z členů proslavené matematické rodiny Bernoulliů (1654 až 1863), z které pochází neméně než 11 znamenitých matematiků. Rodina ta pocházela původně z Antverp; pronásledována z náboženských důvodů uchýlila se však do Basileje. Členové této rodiny byli profesory na universitách v Basileji, Groningách, Padově atd.]

**) První nalezl řešení rovnice čtvrtého stupně Luigi Ferrari (1522—1565, Bologna, Milán), žák Cardanův.

Umocníme-li (4) na druhou

$$u^2v^2w^2 = q^2. \tag{6}$$

Vztahy (3), (5), (6) ukazují, že veličiny u^2, v^2, w^2 jsou kořeny rovnice třetího stupně

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)\,t - q^2 = 0. \tag{7}$$

Tuto rovnici nazýváme kubickou resolventou bikvadratické rovnice (1). Nechť její kořeny jsou t_1, t_2, t_3, pak

$$u = \sqrt{t_1},\ v = \sqrt{t_2},\ w = \sqrt{t_3}.$$

Znaménka odmocnin nejsou ovšem zcela libovolná, neboť dle (4) musí*)

$$\sqrt{t_1}\,.\,\sqrt{t_2}\,.\,\sqrt{t_3} = -q, \tag{8}$$

t. j. u dvou lze voliti znaménka libovolně, znaménko třetí jest pak vztahem (8) jednoznačně určeno. Dostáváme pak 4 kořeny, které lze psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} 2y_1 &= \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \\ 2y_2 &= \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \\ 2y_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \\ 2y_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ve všech čtyřech výrazech mají příslušné odmocniny týž pevný význam, stanovený ve shodě s (8). Kdybychom volili jinou trojici hodnot odmocnin, ale tak, aby (8) zůstalo zachováno, dostali bychom tytéž kořeny, ale v přeházeném pořadí.

b) Diskusi bikvadratické rovnice s reálnými koeficienty jen naznačíme (v případě, že t_1, t_2, t_3 jsou navzájem různé). Ježto ze (7) plyne $t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 = q^2$ (což je nezáporné), jsou možny jen tyto tři případy.

α) t_1, t_2, t_3 jsou reálná, nezáporná čísla; pak má (1) 4 reálné kořeny.

*) Nesmíme opět zapomenout, že jsme (4) umocnili.

β) t_1 reálné, nezáporné, t_2, t_3 reálné, záporné. Z (9) plyne, že všechny kořeny jsou pak komplexní, a to y_1 sdružené s y_2, y_3 sdružené s y_4.

γ) Resolventa má dva kořeny komplexní sdružené na př. t_2 a t_3, a reálný nezáporný kořen t_1. Hodnoty odmocnin volme tak, aby $\sqrt{t_2}$ a $\sqrt{t_3}$ byly komplexní sdružené. Pak kořeny x_1 a x_2 jsou reálné, x_3 a x_4 komplexní sdružené.

Který z uvedených případů nastane, závisí pouze na diskriminantu rovnice (1). Diskriminantem rovnice (1) nazýváme výraz

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)]^2.$$

Je to symetrická funkce kořenů rovnice (1) a lze ji tedy vyjádřiti pomocí veličin p, q, r. Po dlouhém výpočtu vyjde:

$$D = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144prq^2 + 256r^3 - 27q^4.$$

Výpočtem se přesvědčíme, že diskriminanty rovnice (1) a její resolventy (7) jsou stejné.

Odtud nalezneme ihned (užívajíce známých výsledků o kubické rovnici):

Je-li $D < 0$, má rovnice (1) 2 kořeny reálné a 2 komplexní sdružené.

Je-li $D > 0$ a platí $p < 0$, $p^2 - 4r > 0$, má (1) 4 kořeny reálné, jinak 2 páry kořenů komplexních sdružených.

Je-li $D = 0$, má (1) vícenásobný kořen.

c) Rovnici

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

lze řešiti mnoha dalšími způsoby. Matematicky jest opět nejcennější metoda analogická metodě Lagrangeově, o které jsme mluvili u kubické rovnice. Hledáme takovou funkci kořenů, která není sice symetrická, ale všemi permutacemi čtyř indexů přechází v méně než 4 jiné funkce. Na př. má žádanou vlastnost trojice

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1x_2 + x_3x_4, \\ t_2 &= x_1x_3 + x_2x_4, \\ t_3 &= x_1x_4 + x_2x_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Každý z těchto výrazů má tu vlastnost, že kteroukoliv ze $4! = 24$ permutací 4 indexů 1, 2, 3, 4 buď se vůbec nezmění, anebo přejde v některou z druhých dvou. To tedy znamená, že výrazy

$$t_1 + t_2 + t_3, \quad t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \quad t_1t_2t_3 \tag{11}$$

jsou symetrickými funkcemi kořenů x_1, x_2, x_3, x_4. Dovedeme je tedy (po jisté počtářské námaze ovšem) vyjádřiti pomocí veličin a_1, a_2, a_3, a_4. Pak ale dovedeme také napsati ihned kubickou rovnici (resolventu), která má čísla t_1, t_2, t_3 za kořeny. Podrobným výpočtem vyjde

$$t^3 - a_2t^2 + (a_1a_3 - 4a_4)\,t - (a_1{}^2a_4 - 4a_2a_4 + a_3{}^2) = 0.$$

Tuto rovnici řešíme, čímž nalezneme hodnoty t_1, t_2, t_3. Další postup je pak jednoduchý, neboť na př. z rovnic

$$x_1x_2 + x_3x_4 = t_1$$
$$x_1x_2 \,.\, x_3x_4 = a_4$$

lze určiti x_1x_2 a x_3x_4. Stejně x_1x_3, x_2x_4; x_1x_4, x_2x_3. Konec výpočtu jest pak zcela elementární. Nutno ovšem dáti pozor na vhodné kombinace znamének u odmocnin a pod.

Funkcí vlastností (10) existuje ovšem více. Užívajíce na př. systém

$$t_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$
$$t_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$t_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2,$$

dostali bychom v podstatě řešení odstavce a).

d) Uvedeme ještě jednu velmi přirozenou metodu. Pokusíme se totiž levou stranu bikvadratické rovnice — kterou píšeme s koeficienty poněkud upravenými v tvaru

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{12}$$

— rozložiti na součin dvou kvadratických trojčlenů

$$a_0\,(x^2 + 2px + q)\,.\,(x^2 + 2p_1x + q_1). \tag{13}$$

Podaří-li se nám nalézti p, q, p_1, q_1, lze rovnici považovati za řešenou. Srovnáním koeficientů u stejných mocnin x v (12) a (12) dostáváme

$$p + p_1 = 2\frac{a_1}{a_0}, \quad pq_1 + p_1q = 2\frac{a_3}{a_0},$$

$$q + q_1 + 4pp_1 = 6\frac{a_2}{a_0}, \quad qq_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Z třetí rovnice

$$\frac{a_2}{a_0} - pp_1 = \frac{1}{4}\left(q + q_1 - \frac{2a_2}{a_0}\right).$$

Zavedeme novou neznámou t

$$t = \frac{a_2}{a_0} - pp_1 = \frac{1}{4}\left(q + q_1 - 2\frac{a_2}{a_0}\right).$$

Ze čtyř původních rovnic chceme vyloučiti p, p_1, q, q_1 a zavésti tam t.

To se nám jednoduše podaří tímto umělým obratem: Vypočtěme si veličiny:

$$p^2 + p_1^2 = (p + p_1)^2 - 2pp_1 = 2t + 2 \cdot \frac{2a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2},$$

$$q^2 + q_1^2 = (q + q_1)^2 - 2qq_1 = \left(4t + \frac{2a_2}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_4}{a_0},$$

$$(pq_1 - p_1q)^2 = (pq_1 + p_1q)^2 - 4pp_1qq_1 = 4\frac{a_3^2}{a_0^2} + 4\left(t - \frac{a_2}{a_0}\right) \cdot \frac{a_4}{a_0},$$

$$(pq + p_1q_1)^2 = [(p + p_1)(q + q_1) - (pq_1 + p_1q)]^2 = \left(8\frac{a_1}{a_0}t + \right.$$
$$\left. + 2\frac{2a_1a_2 - a_0a_3}{a_0^2}\right)^2,$$

a dosaďme do identity

$$(p^2 + p_1^2)(q^2 + q_1^2) = (pq_1 - p_1q)^2 + (pq + p_1q_1)^2;$$

dostáváme po úpravě

$$4a_0^3t^3 - a_0(a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3)t +$$
$$+ (a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3) = 0.$$

Označme

$$I = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3,$$
$$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3.$$

Kubická resolventa jest potom

$$4a_0^3t^3 - a_0It + J = 0. \tag{14}$$

Nalezneme-li nějaký kořen t_1 této rovnice, jest

$$p + p_1 = 2\frac{a_1}{a_0}, \quad q + q_1 = 4t_1 + \frac{2a_3}{a_0},$$
$$pp_1 = \frac{a_2}{a_0} - t_1 \quad \text{a} \quad qq_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Odtud určíme tedy p, p_1, q, q_1, čímž úloha je řešena.

Jest jasné, že pro t musela vyjíti kubická rovnice. Myslíme-li si totiž rozklad (12) v kořenové činitele

$$a_0(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

jsou myslitelny tři kombinace, a to

$$(x - x_1)(x - x_2) \text{ a } (x - x_3)(x - x_4),$$
$$(x - x_1)(x - x_3) \text{ a } (x - x_2)(x - x_4),$$
$$(x - x_1)(x - x_4) \text{ a } (x - x_2)(x - x_3).$$

Cvičení. 1. Řešte rovnici $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5 = 0$, víte-li, že jeden kořen jest $(-i)$! $[i; \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{11}).]$

2. Víte-li, že kořeny rovnice

$$x^4 - 21\tfrac{1}{4}x^3 + 89\tfrac{1}{4}x^2 - 85x + 16 = 0$$

tvoří geometrickou řadu, nalezněte je! $[\frac{1}{4}; 1; 4; 16.]$

3. Řešte rovnici $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$, víte-li, že součet dvou kořenů jest 4.

[Návod: Ježto $x_2 = 4 - x_1$, dosadíme-li x_2 do původní rovnice, máme rovnici $x_1^4 - 9x_1^3 + 29x_1^2 - 39x_1 + 18 = 0$. Tato a původní rovnice mají společného dělitele $x_1 - 1$; tedy $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Další kořeny řešením kvadratické rovnice.]

4. Nalezněte podmínku, aby rovnice

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

měla dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale opačného znaménka. [Návod: viz př. 9, str. 49. Výsledek $a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4 = 0$.]

5. Je-li

$$16a_1^4 - 24a_0a_1^2a_2 + 8a_0^2a_1a_3 - a_0^3a_4 = 0,$$

má rovnice

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \qquad (**)$$

jeden kořen, který jest roven součtu všech zbývajících. Dokažte!

6. Je-li $3a_1^4 - 6a_0a_1^2a_2 + 4a_0^2a_1a_3 - a_0^3a_4 = 0$, má rovnice (**) jeden kořen, který jest roven aritmetickému průměru zbývajících tří. Dokažte!

7. Čtyři kořeny rovnice (**) tvoří harmonickou čtveřinu, když

$$a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3 = 0.$$

Dokažte!

[Návod: Čtyři čísla x_1, x_2, x_3, x_4 tvoří harmonickou čtveřinu (v tomto pořadí), je-li $\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -1$. Tato podmínka kombinována s podmínkami (1) na str. 30 3. kapitoly, po vyloučení x_1, x_2, x_3, x_4, dá hledaný vztah. Jinak lze získati týž výsledek, vyjádříme-li součin $H_{23 \cdot 14} \cdot H_{31 \cdot 24} \cdot H_{12 \cdot 34}$, kde na př.

$$H_{23 \cdot 14} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4),$$

pomocí koeficientů dané rovnice.]

8. Dokažte: Má-li rovnice $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kořeny tvořící aritmetickou řadu, jest nutně

$$a^3 - 4ab + 8c = 0,$$
$$11a^4 - 8a^2b - 144b^2 + 1600d = 0.$$

9. Výrazy I a J zavedené v textu jsou invarianty (viz př. 5 u kvadratické rovnice) polynomu (11). Dokažte to, alespoň pro I!

10. Užívajíce vztahu mezi diskriminantem rovnice a její resolventy, dokažte z (14), že diskriminant polynomu (12), D a invarianty I, J jsou vázány relací

$$D = 16a_0^6 (27J^2 - I^3).$$

11. Má-li bikvadratická rovnice (12) tři kořeny stejné, jest

$I = 0$ a $J = 0$. Dokažte!

12. Rovnici $x^4 + 6c_2x^2 + 4c_3x + c_4 = 0$ lze řešiti také tak, že zavedeme novou neznámou $x = \mu y + \lambda$, při čemž volíme μ a λ tak, aby rovnice přešla v reciprokou.

Pro μ a λ dostáváme pak rovnice

$$\mu^2 = \frac{1}{\lambda}(\lambda^3 + 3c_2\lambda + c_3),$$

$$-2c_3\lambda^3 + (9c_2^2 - c_4)\lambda^2 + 6c_2c_3\lambda + c_3^2 = 0,$$

takže jest řešení převedeno na řešení rovnic nižšího stupně. Dokažte!