3. Vlastnosti kořenů algebraické rovnice.

Fundamentální věta algebry. V dosavadních úvahách, kdykoli jsme mluvili o kořenech algebraické rovnice, předem jsme předpokládali, že daná rovnice kořen skutečně má. Není zatím vůbec jasné, že by libovolně napsaná rovnice musela opravdu kořeny míti.

Víme, že u lineární a kvadratické rovnice tomu tak jest. Dovedeme také napsat libovolný počet rovnic majících kořeny: na př. $(x - 3)(x - i)(x - 2 + 3i) = 0$ atd., ale to je zatím vše.

Jest otázkou, zda rovnice

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

kde a_i jsou libovolná komplexní čísla, má vždy kořen. Odpověď zní kladně. Platí tato t. zv. fundamentální věta algebry:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně ($n \geq 1$) má alespoň jeden kořen.

Tato věta jest nejdůležitější větou, kterou v této knížce naleznete. První ji dokázal Gauss. Za svého života (v údobí 50 let) nalezl celkem 4 důkazy. Od té doby podali četní matematikové veliké množství nejrůznějších důkazů.

Důkaz jest dost složitý a přesahuje svou povahou rámec této knihy. Ukážeme však alespoň, jak lze problém značně omeziti.

Především lze se omeziti při důkaze na rovnice s reálnými koeficienty.

Abychom to uznali, dokažme si nejdříve tuto jednoduchou větu:

Má-li rovnice $f(x) = 0$ s reálnými koeficienty kořen $\alpha + \beta i$, má též kořen $\alpha - \beta i$.

Důkaz. Ježto $\alpha + \beta i$ jest kořenem, platí $f(\alpha + \beta i) = 0$, t. j. $A(\alpha, \beta) + i\,B(\alpha, \beta) = 0$, tedy $A(\alpha, \beta) = 0$, $B(\alpha, \beta) = 0$. Pak je ale též $A(\alpha, \beta) - i\,B(\alpha, \beta) = 0$. Z tvaru polynomu plyne však, že to není nic jiného než $f(\alpha - \beta i) = 0$. Dosadíme-li totiž do levé strany rovnice $\alpha - \beta i$, nezmění se nic na sudých mocninách i, ježto $(-i)^{2k} = (+i)^{2k}$. Nezmění se tedy A. Liché mocniny změní však znaménko, ježto $(-i)^{2k+1} = -(+i)^{2k+1}$. Změní tedy jen B znaménko.

Tvrdíme nyní:

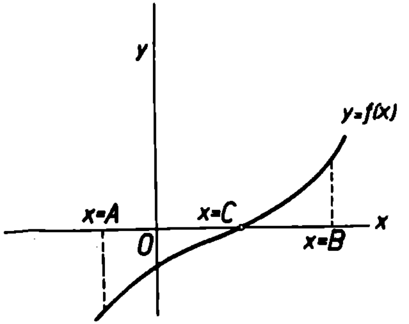
Dokážeme-li, že každá rovnice s reálnými koeficienty má alespoň jeden kořen, plyne z toho, že i každá rovnice s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen.

Důkaz. Jsou-li $f_1(x)$, $f_2(x)$ dva polynomy s koeficienty komplexními sdruženými, má jejich součin $f(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$ reálné koeficienty. Tato rovnice má dle předpokladu alespoň jeden kořen α, t. j. je $f(\alpha) = 0$; tedy též $f_1(\alpha) \,.\, f_2(\alpha) = 0$ a tedy buď $f_1(\alpha) = 0$, nebo $f_2(\alpha) = 0$. Nechť $f_1(\alpha) = 0$; pak rovnice s komplexními koeficienty $f_1(x) = 0$ má kořen α. Pak ale zároveň — je-li $\bar{\alpha}$ číslo komplexní sdružené k α — je $f_2(\bar{\alpha}) = 0$. Obě rovnice s komplexními koeficienty mají tedy kořeny. Obdobně, je-li $f_2(\alpha) = 0$.

Stačí tedy dokázati: Každá rovnice s reálnými koeficienty má alespoň jeden (reálný nebo komplexní) kořen.

Pro rovnice lichého stupně plyne věta okamžitě z geometrického názoru, resp. grafického znázornění funkce $y = f(x)$.

Máme-li totiž polynom $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ a dosazujeme za x velmi veliké hodnoty (t. j. veliké vzhledem k a_i), jest jasné, že první člen převyšuje všechny další členy, a že tedy znaménko výrazu bude takové, jaké má první člen. Nechť jest nyní n liché; dosadíme-li za x velmi veliké číslo kladné, bude hodnota polynomu takového znaménka, jaké má a_0; dosadíme-li za x velmi veliké číslo záporné, bude hodnota polynomu znaménka opačného, než je znaménko u a_0.*) Nabývá tedy polynom pro jisté $x = A$ hodnoty záporné (kladné), pro jiné $x = B$ hodnoty kladné (záporné). Pak jest ale z grafického znázornění jasné, že křivka $y = f(x)$ musí alespoň v jednom bodě $x = C$ protnouti osu x, t. j. je $f(C) = 0$ a tedy daná rovnice má kořen [dokonce — jak vidíme — reálný].



Obr. 3.

Užíváme při tom mlčky důležité vlastnosti polynomu — totiž, že polynom jest spojitou funkcí proměnné x. Tento pojem, který při vyšetřování funkcí v matematické analyse jest velmi důležitý, shoduje se zhruba s pojmem „spojitý" užívaným v běžné řeči. Užíváme dále věty: Nabývá-li spojitá funkce dvou různých hodnot, nabývá též všech hodnot mezi nimi ležících.

Abychom nyní dokončili důkaz fundamentální věty, stačí omeziti se na rovnice s reálnými koeficienty, a to sudého stupně. To je právě ten nejtěžší krok. Gauss a po něm Jordan postupovali tak, že postupnou transformací uvedli vyšetřování rovnic sudého stupně v souvislost s rovnicemi lichého stupně, u kterých, jak již víme, věta platí.

Jiné důkazy fundamentální věty nečiní rozdílu mezi rovnicemi lichého a sudého stupně. Jsou vedeny pomůckami diferenciálního a integrálního počtu nebo metodami t. zv. funkční

*) Ještě lépe je to viděti, píšeme-li

$$f(x) = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n}\right);$$

když x je v absolutní hodnotě velmi veliké, blíží se členy v závorce (kromě prvního) k nule a lze je zanedbati.

teorie atd. Poměrně jednoduchý jest první důkaz Gaussův, založený v podstatě na geometrickém znázornění komplexních čísel.*)

V dalším budeme fundamentální větu předpokládati v plném rozsahu za dokázanou. Nyní lehce dokážeme:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně má právě n-kořenů. [Při tom počítáme mnohonásobný kořen s příslušnou násobností.]

Důkaz. Dle fundamentální věty má $f(x)$ alespoň jeden kořen x_1, t. j. $f(x_1) = 0$. Pišme:

$$f(x) = f(x) - f(x_1) =$$

$$= a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1) = 0$$

$$f(x) = (x - x_1)[a_0(x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1}) +$$

$$+ a_1(x^{n-2} + x^{n-3}x_1 + \ldots + x_1^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}] = 0.$$

Výraz v lomené závorce jest stupně $n - 1$. Dle fundamentální věty má alespoň jeden kořen x_2. Lze tedy z lomené závorky vytknouti $x - x_2$ atd. Nalezneme konečně rozklad

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad (1)$$

Odtud pak ihned plyne výše uvedené tvrzení.

Výrazům $x - x_1$, $x - x_2$, ... říkáme kořenoví činitelé. (1) představuje pak rozklad polynomu $f(x)$ v kořenové činitele.**)

---

*) V české, resp. slovenské literatuře naleznete důkaz fundamentální věty v knihách: K. Petr: Počet diferenciální, Praha 1923, str. 405 (nákl. JČMF). — K. Petr: Počet integrální, Praha 1931, str. 418 (nákl. JČMF). — J. Hronec: Algebraické rovnice a ich použitie na analytickú geometriu, Brno 1932, str. 47.

**) Čísla $x_1, x_2, \ldots$ nemusí býti vesměs různá. Je-li jich několik stejných, musíme — aby úhrnný počet všech kořenů byl n — počítati je s příslušnou násobností. To je ten důvod, o němž jsme mluvili ve zvláštním odstavci předešlé kapitoly (str. 18 a další).

Dodatek: Máme-li rovnici s reálnými koeficienty, jsou čísla $x_1, x_2, \ldots$ částečně reálná, částečně po dvou komplexní sdružená. Součin dvou faktorů komplexních sdružených jest reálný, proto:

Každý reálný polynom lze rozložiti v součin reálných činitelů prvního nebo druhého stupně.

Poznámka (pro hloubavého čtenáře). Poznamenejme výslovně, v čem záleží důležitost fundamentální věty. Když jsme chtěli, aby každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty měla řešení, musili jsme zavésti čísla obecnější než reálná — totiž komplexní. Analogicky dalo by se čekati, že chceme-li rozřešiti na př. kteroukoli rovnici 3. stupně, budeme musit zavésti nějaký nový symbol obdobný číslu i a uvažovati čísla ještě obecnější než komplexní. Fundamentální věta říká, že tomu tak není; že tedy s čísly komplexními vystačíme již pro všechny rovnice (s komplexními koeficienty), všech stupňů. To je hlavní jádro věty. To, že kořenů jest právě n — to jest jen výsledek vedlejší.

Čtenáři nebude jistě proti mysli, že existují i čísla obecnější než čísla komplexní — na př. t. zv. kvaterniony. Ovšem i zde jde pouze o výplod lidského myšlení — bez reálné interpretace ve všedním životě.

Symetrické funkce. a) V dalších úvahách budeme bez újmy obecnosti psáti $a_0 = 1$. Má-li pak $f(x)$ kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jest

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Vynásobíme-li pravou stranu a přirovnáme koeficienty u stejných mocnin x, máme

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ -a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n a_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Budeme psáti krátce

$$-a_1 = \Sigma\, x_1,\ a_2 = \Sigma\, x_1x_2,\ -a_3 = \Sigma\, x_1x_2x_3, \ldots \tag{2}$$

Při tom znaménko Σ znamená, že sčítáme přes všechny kombinace veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a to vždy kombinace toho typu, jaký stojí za součtovým znaménkem.

b) Výrazy (2) mají zvláštní stavbu. Kdybychom zaměnili v nich nějaké x_i za x_k a x_k za x_i, jejich hodnota se nezmění.

Říkáme jim proto symetrické funkce.

Obecně nazýváme symetrickou funkcí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takovou celistvou, racionální funkci (polynom) proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která se nemění žádnou permutací indexů.

Jiné příklady: Nechť na př. $n = 3$. Pak $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$, nebo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jsou také symetrickými funkcemi. Naproti tomu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ není symetrickou funkcí, neboť zaměníme-li x_1 za x_3, dostáváme $x_3^2 + x_2^2 - x_1^2$, což jest jiný výraz.

Funkce (2) jsou zvláště jednoduché symetrické funkce, nazýváme je elementárními symetrickými funkcemi. Platí nyní tato základní věta o symetrických funkcích:

Každá symetrická funkce tvaru $\Sigma x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$ se dá vyjádřiti jako racionální celistvá funkce elementárních symetrických funkcí s celočíselnými koeficienty.

To tedy znamená pro rovnice: Bez řešení rovnice dovedeme udati hodnoty jistých výrazů, které závisí na kořenech — a to z pouhé znalosti koeficientů dané rovnice.

Ověříme si nejdříve tuto větu na dvou příkladech.

1) Zvolme funkci $\Sigma x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Abychom ji vyjádřili v žádaném tvaru, uvažujme součin

$$\Sigma x_1 . \Sigma x_1 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) . (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2) + 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}\,x_n),$$

t. j. $(-a_1) . (-a_1) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2 . a_2$

$$\Sigma x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2.$$

2. Abychom vypočetli $\Sigma\, x_1^2 x_2$, pišme:

$$\Sigma\, x_1 x_2 \,.\, \Sigma\, x_1 = (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots) \,.\, (x_1 + x_2 + \ldots) =$$
$$= (x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \ldots) + 3\,(x_1x_2x_3 + \ldots)$$
$$= \Sigma\, x_1^2x_2 + 3\,\Sigma\, x_1x_2x_3,$$

tedy
$$a_2 \,.\, (-a_1) = \Sigma\, x_1^2x_2 - 3a_3$$
$$\Sigma\, x_1^2x_2 = 3a_3 - a_1a_2.$$

Máme-li komplikovanější příklad, postupujeme vždy tak, že uvažujeme součin jednodušších funkcí takových, abychom po vynásobení dostali — mimo jiné — i hledanou funkci.

Zároveň jsme tak vedeni k jednoduchému obecnému důkazu vyslovené věty.

Definujme si pojem „výšky". Každé symetrické funkci $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$, $(\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots)$ přiřadíme systém čísel $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_k)$, dle kterého budeme posuzovati její výšku. Budeme říkati, že ze dvou symetrických funkcí $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots)$, $\Sigma x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2} \ldots x_k^{\beta_k}$, $(\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots)$ jest ta vyšší, u které v obou systémech $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots)$, $(\beta_1; \beta_2; \beta_3; \ldots)$ první lišící se člen jest větší.

Nahoře uvedenou větu dokážeme nyní lehce t. zv. úplnou indukcí.

Jak jsme viděli, jest $\Sigma x_1 = -a_1$, $\Sigma x_1x_2 = a_2, \ldots$ Jest tedy věta správná pro symetrické funkce nejmenších výšek, totiž $(1; 0; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 1; 0; \ldots; 0)$ atd. Předpokládejme nyní, že platí pro všechny symetrické funkce nižší než $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$; dokážeme, že platí i pro $\Sigma x_1^{\alpha_1} \,.\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$. Tím bude věta dokázána. Neboť, ježto platí pro výšky $(1; 0; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 0; 0; \ldots)$, ..., platí pak i pro symetrické funkce nejbližších dalších výšek, t. j. $(2; 0; 0; \ldots; 0)$, $(2; 1; 0; \ldots; 0)$, $(2; 1; 1; 0; \ldots; 0)$ atd., postupně platí pak pro všechny symetrické funkce.

Uvažujme za tím účelem součin

$$\sum x_1^{\alpha_1 - 1} \,.\, x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_k^{\alpha_k - 1} \sum x_1x_2 \ldots x_k.$$

Po vynásobení dostaneme především členy tvaru $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ a to s koeficientem 1, pak ještě řadu dalších členů (na př. $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_{k-1}^{\alpha_{k}-1}\, x_k^{\alpha_k - 1}\, x_{k+1}$) opatřených celočíselnými koeficienty, ale vždy tedy členy nižších výšek. Tedy:

$$\sum x_1^{\alpha_1-1}\dots x_k^{\alpha_k-1}\,.\underbrace{\sum x_1x_2\dots x_k}_{(-1)^k\,.\,a_k} = 1\,.\sum x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} + \text{(členy „nižší“)}; \quad (3)$$

odtud

$$\sum x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} = (-1)^k a_k\,.\sum x_1^{\alpha_1-1}\dots x_k^{\alpha_k-1} - \text{(členy „nižší“)}.$$

Ježto na pravé straně jsou všecky funkce výšky menší než $\Sigma x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k}$ a pro ně větu předpokládáme za platnou, lze psáti i levou stranu jako racionální celistvou funkci elementárních symetrických funkcí s celočíselnými koeficienty; tím je věta dokázána. [Všimněte si důležitosti čísla 1 v (3)!]

c) Potenční součty. Obzvláště zajímavé a důležité jsou speciální symetrické funkce typu

$$\begin{aligned} s_2 &= \Sigma x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ s_3 &= \Sigma x_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_k &= \Sigma x_1^k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k. \end{aligned}$$

Odvodíme si t. zv. rekurentní vztah, který nám umožní určiti je jako funkce elementárních symetrických funkcí. Budeme postupovati zrovna tak, jako nahoře. Počítejme na př. $+\Sigma x^5{}_1 = s_5$.

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^4\,.\,\Sigma x_1 &= (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4)\,.\,(x_1 + \dots + x_n) = \\ &= (x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5) + (x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + \dots) = \\ &= \Sigma x_1^5 + \Sigma x_1^4x_2. \end{aligned}$$

Tedy $\Sigma x_1^5 = \Sigma x_1^4\,.\,(-a_1) - \Sigma x_1^4x_2$.

Stejně

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^4x_2 &= \Sigma x_1^3\,.\,(+a_2) - \Sigma x_1^3x_2x_3 \\ \Sigma x_1^3x_2x_3 &= \Sigma x_1^2\,.\,(-a_3) - \Sigma x_1^2x_2x_3x_4 \qquad (4) \\ \Sigma x_1^2x_2x_3x_4 &= \Sigma x_1\,.\,(+a_4) - 5\,\Sigma x_1x_2x_3x_4x_5. \end{aligned}$$

Při tom: na př. druhý řádek plyne takto:

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^3\Sigma x_1x_2 &= (x_1^3 + x_2^3 + \dots)(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots) = \\ &= (x_1^4x_2 + \dots) + (x_1^3x_2x_3 + \dots) = \Sigma x_1^4x_2 + \Sigma x_1^3x_2x_3. \end{aligned}$$

Snadno také nahlédneme, že v poslední řádce jest součinitel 5, neboť když uvažujeme součin $\Sigma x_1\,.\,\Sigma x_1x_2x_3x_4 = (x_1 + x_2 + \dots)\,.\,(x_1x_2x_3x_4 + \dots)$, vzniknou kromě členů tvaru $x_1^2x_2x_3x_4$ též členy tvaru $x_1x_2x_3x_4x_5$, a to každý pětkráte. Na př. člen $x_1x_2x_3x_4x_5$ sám vznikne, když

z první závorky vezmeme x_1, z druhé $x_2x_3x_4x_5$
„ „ „ x_2, „ $x_1x_3x_4x_5$
„ „ „ x_3, „ $x_1x_2x_4x_5$
„ „ „ x_4, „ $x_1x_2x_3x_5$
„ „ „ x_5, „ $x_1x_2x_3x_4$.

Násobme nyní v (4) řádky postupně 1, — 1, 1, — 1 a sečtěme; vyjde

$$\Sigma x_1^5 = -a_1 \Sigma x_1^4 - a_2 \Sigma x_1^3 - a_3 \Sigma x_1^2 - a_4 \Sigma x_1 - 5a_5,$$

t. j.

$$s_5 + a_1s_4 + a_2s_3 + a_3s_2 + a_4s_1 + 5a_5 = 0.$$

Obecně — pokud jest $k < n$ — dostáváme

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \ldots + a_{k-1}s_1 + ka_k = 0. \quad (5)$$

Stejný vztah lze odvoditi i pro $k = n$, $k > n$.

Vztah (5) se nazývá Newtonovou*) rekurentní relací.

Lze z něj vypočítati $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Dosadíme-li totiž do (5) po řadě $k = 1; 2; 3; 4; \ldots$ dostaneme

$$\begin{aligned} &s_1 + a_1 = 0 \\ &s_2 + a_1s_1 + 2a_2 = 0 \\ &s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 + 3a_3 = 0 \\ &s_4 + a_1s_3 + a_2s_2 + a_3s_1 + 4a_4 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*) Isaac Newton (nar. 5. ledna 1643, zemř. 20. března 1727, pochován v opatství westminsterském) jest zakladatelem matematické fysiky. Jeho práce týkají se gravitačního zákona, teorie šíření se světla, teorie měsíce atd. Jako spoluzakladatel diferenciálního počtu zabýval se i mnohými čistě matematickými otázkami. Těžko zhodnotiti jeho ohromné zásluhy o rozvoj přírodních věd na několika řádcích. Jeho hlavní práce „Philosophiae naturalis principia mathematica“ byla první knihou toho směru, který jest dnes ideálem každé vědy — totiž možnosti, uměti matematicky formulovat přírodní zákony.

$$s_1 = -a_1$$
$$s_2 = a_1^2 - 2a_2$$
$$s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 + 3a_3$$
$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cvičení. 1. Má-li rovnice s celočíselnými koeficienty

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

celočíselné kořeny, musí tyto děliti a_n. Ježto a_n má jen konečný počet dělitelů, lze nalézti celočíselné kořeny po konečném počtu zkoušek.

Učiňte tak pro rovnice

α) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \quad (x = 2; -3; 4)$,

β) $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0$

$$(x = -7; 11; -13; -19),$$

γ) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0 \quad$ (jen $x = -5$).

2. Rovnice s celistvými koeficienty uvažovaná v příkl. 1 nemůže míti kořenů lomených; má-li kořeny racionální, mohou býti jen celé. Dokažte! (Návod: Dosaďte do rovnice $\frac{p}{q}$ za x a učiňte závěry!) Užijte tohoto výsledku k řešení rovnice

$$x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0.$$

($x_1 = -2$ dvojnásobný, $x_2 = 1$ dvojnásobný.)

3. Nalezněte racionální kořeny rovnice

$$6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0!$$

$\left(\text{Uvažte, že musí } x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}; \ x_1 = -\frac{2}{3}; \right.$ $\left. x_2 = 2.\right)$

4. Sestrojte rovnici, která má za kořeny trojnásobky kořenů rovnice $x^3 + 3x + 2 = 0$! [Návod: Jsou-li kořeny dané rovnice x_1, x_2, x_3 a hledané y_1, y_2, y_3, jest $y_1 = 3x_1$, $y_2 = 3x_2$, $y_3 = 3x_3$, tedy: $y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 9(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 27$, $y_1y_2y_3 = 27x_1x_2x_3 = -54$. Hledaná rovnice jest $y^3 + 27y + 54 = 0$.]

5. Napište rovnici, která má kořeny o b menší než kořeny rovnice $x^2 + a_1x + a = 0$! [Návod: Kořeny hledané rovnice jsou $y_1 = x_1 - b$, $y_2 = x_2 - b$; tedy $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 - 2b = - a_1 - 2b$, $y_1y_2 = (x_1 - b) \cdot (x_2 - b) = x_1x_2 - (x_1 + x_2)b + b^2 = a_2 + a_1b + b^2$. Hledaná rovnice jest tedy $y^2 + (a_1 + 2b)\, y + a_2 + a_1b + b^2 = 0$.]

6. Napište rovnici, která má kořeny o 1 menší než kořeny rovnice $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$. [Návod: Úlohu lze řešiti buď pomocí symetrických funkcí jako v předešlém příkladě anebo pomocí Taylorova rozvoje. Rozvineme danou rovnici v Taylorův rozvoj dle $(x - 1)$ a pak dosadíme neznámou $x - 1 = y$. Měla-li původní rovnice kořen x_1, má nová kořen $y_1 = x_1 - 1$ atd. Výsledek: $y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y - 5 = 0$.]

7. Jak nutno voliti veličinu a, aby transformací $x = y + a$ přešla rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

v rovnici neobsahující člen s y^{n-1}? $\left[x = y - \dfrac{a_1}{na_0}\right]$.

8. Jak nutno voliti a, aby transformací $x = y + a$ v rovnici $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$ vypadl člen s y?

9. Sestrojte rovnici, která má za kořeny čtverce kořenů dané rovnice:

α) pro rovnici $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$,

β) pro rovnici $f(x) = 0$.

[α) Kořeny nové rovnice jsou x_1^2, x_2^2, x_3^2; vypočtěte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$, $x_1^2x_2^2x_3^2$ a užijte vlastností vztahů (1); vyjde $y^3 + 3y^2 + 2y - 1 = 0$. β) Sestrojte polynom $f(x) \cdot f(-x)$ a dosaďte $x^2 = y$!]

10. Sestrojte rovnici, která má za kořeny všechny možné součty dvou kořenů rovnice

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0!$$

[Kořeny hledané rovnice jsou $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$; vypočtěte výrazy $y_1 + y_2 + y_3$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$, $y_1y_2y_3$ jako funkci koeficientů a_i a užijte vztahů (1)! Vyjde: $y^3 + 2a_1y^2 + (a_1^2 + a_2)\, y + (a_1a_2 - a_3) = 0$.]