III. g-adické zlomky

In: Karel Rychlík (author): Úvod do elementární teorie číselné. (Czech). Praha: Jednota čs. matematiků a fysiků, 1931. pp. 30–55.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402940

III. g-adické zlomky.

§ 36. Budiž g číslo celé > 1. Zlomkem g-adickým (zlomkem systematickým o základu g) nazývá se řada

$$a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots + \frac{a_n}{g^n} + \ldots, \tag{1}$$

kdež $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jsou čísla celá, a_0 libovolné, $0 \leqq a_n < g$ pro $n \geqq 1$; a_n je pro $n \geqq 1$ „g-adická číslice".

Zlomek (1) bude konečný, budou-li všechna $a_n = 0$ jistým n počínajíc, nekonečný, bude-li pro nekonečně mnoho ν platiti $a_\nu \neq 0$. Zlomek g-adický budeme též psáti $a_0 + 0, a_1a_2a_3, \ldots$, neb, je-li $a_0 > 0$, $a_0, a_1a_2a_3 \ldots$ a g-adický zlomek konečný

$$a_0 + 0,\ a_1a_2a_3 \ldots a_h \text{ resp. } a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_h.$$

Zlomek g-adický

$$a_0 + 0, a_1a_2 \ldots a_ha_{h+1} \ldots a_{h+f}a_{h+1} \ldots a_{h+f} \ldots a_{h+1} \ldots a_{h+f} \ldots,$$

v němž tedy od jistého místa počínajíc se stále opakuje skupina číslic

$$a_{h+1}\, a_{h+2} \ldots a_{h+f},$$

nazývá se periodický. Platí tedy pro číslice zlomku periodického $a_l = a_k$ pro $l \equiv k \pmod f$; k, l, f jsou čísla celá kladná, pro něž platí $k, l > h$. Skupina číslic, které se opakují, $a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots, a_{h+f}$, nazývá se perioda. Při $h = 0$ zlomek

$$a_0 + 0,\ a_1a_2 \ldots a_fa_1a_2 \ldots a_f \ldots a_1a_2 \ldots a_f \ldots$$

nazývá se ryze periodický, při $h > 0$ neryze periodický. Zlomek konečný můžeme považovati za nekonečný zlomek o periodě 0.

Zlomek g-adický periodický $a_0 + 0,\ a_1a_2 \ldots a_ha_{h+1} \ldots a_{h+f}a_{h+1} \ldots a_{h+f} \ldots$ se také kratčeji psává ve tvaru $a_0 + 0, a_1a_2 \ldots a_h \dot{a}_{h+1} \ldots \dot{a}_{h+f}$.

Řada (1) konverguje a její součet α nazývá se hodnotou zlomku g-adického (1). Konvergence ta je jednoduchým důsledkem té okolnosti, že lze určiti dvě posloupnosti, jednu neklesající, druhou nestoupající, které mají α za společnou limitu. Položme totiž

$$A_n = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots + \frac{a_n}{g^n}, \; \bar{A}_n = A_n + \frac{1}{g^n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots;$$

i bude
$$A_{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1}}{g^{n+1}}, \; \bar{A}_{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1}+1}{g^{n+1}} =$$

$$= \bar{A}_n - \frac{g-(a_{n+1}+1)}{g^{n+1}}$$

a z toho plyne

$$A_n \leqq A_{n+1} < \bar{A}_{n+1} \leqq \bar{A}_n \tag{2}$$

$$\bar{A}_n - A_n = \frac{1}{g^n}. \tag{3}$$

Čísla $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tvoří podle (2) posloupnost neklesající ohraničenou; tato má tedy limitu, a ta je právě α. $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots$ tvoří posloupnost nestoupající ohraničenou, která na základě (3) má opět limitu α. Bude pak platiti

$$A_n \leqq \alpha \leqq \bar{A}_n.$$

A_n jsou přibližné hodnoty dolní, $\bar{A}_n$ přibližné hodnoty horní pro α. Pro $n = 0$ bude

$$a_0 \leqq \alpha \leqq a_0 + 1. \tag{4}$$

§ 37. Budiž α libovolné číslo reální; položme $\alpha = a_0 + \alpha_0$, kdež $a_0 = [\alpha]$, takže $0 \leqq \alpha_0 < 1$. Klaďme dále $g\alpha_0 = a_1 + \alpha_1$, kdež $a_1 = [g\alpha_0]$, takže bude $0 \leqq \alpha_1 < 1$, $g\alpha_1 = a_2 + \alpha_2$, kdež $a_2 = [g\alpha_1]$, takže $0 \leqq \alpha_2 < 1$. Takovým způsobem můžeme dále pokračovati a dostaneme obecně, klademe-li

$$g\alpha_{n-1} = a_n + \alpha_n, \tag{1}$$

kdež $a_n = [g\alpha_{n-1}]$, že o α_n platí

$$0 \leqq \alpha_n < 1. \tag{2}$$

Tento postup nazveme g-adickým algoritmem prvního druhu. Postup ten přiřaďuje číslu reálnímu α posloupnost čísel celých $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Při tom $a_1, a_2, \ldots$ jsou g-adické číslice. Z $0 \leqq \alpha_n < 1$ plyne totiž $0 \leqq g\alpha_n < g$, tedy $0 \leqq [g\alpha_n] < g$, t. j. $0 \leqq a_{n+1} < g$ pro $n \geqq 0$. O a_0 to ovšem platiti nemusí; je to libovolné číslo celé.

g-adický algoritmus prvního druhu přiřaďuje číslu reálnímu α zlomek g-adický $a_0 + a_1/g + a_2/g^2 + \ldots$ Lze snadno dokázati, že jeho hodnota je α. Je totiž $\alpha = a_0 + a_1/g + a_2/g^2 + \ldots + a_n/g^n +$

$+\alpha_n/g^n$; necháme-li pak n růsti do nekonečna, bude $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/g^\nu = 0$ na základě (2), z čehož tvrzení ihned plyne.

Lze snadno nahlédnouti, že pomocí g-adického algoritmu prvního druhu nelze z žádného čísla reálního obdržeti zlomek o periodě $g - 1$, t. j. zlomek, u něhož od jistého n počínajíc je stále $a_n = g - 1$. Dejme tomu, že by pro $n > h$ bylo stále $a_n = g - 1$. Z (1) by plynulo $g\alpha_n = g - 1 + \alpha_{n+1}$, t. j.

$$1 - \alpha_n = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{g} = \frac{1 - \alpha_{n+2}}{g^2} = \ldots = \frac{1 - \alpha_{n+\nu}}{g^\nu}$$

$$\text{pro } n > h, \ \nu > 0.$$

Bylo by tedy $1 - \alpha_n \leq 1/g^\nu$, a necháme-li ν růsti do nekonečna, $1 - \alpha_n \leq 0$, t. j. $\alpha_n \geq 1$ pro $n > h$, což odporuje podmínce (2).

Dalšího omezení není třeba. Platí totiž věta:

Každé číslo reální α lze jediným způsobem znázorniti g-adickým zlomkem

$$a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \ldots, \tag{3}$$

pro který platí

$$a_\nu < g - 1 \tag{4}$$

pro nekonečně mnoho ν, takže zlomek ten nemá periodu $g - 1$; a_n lze nalézti z α pomocí g-adického algoritmu prvního druhu.

Že jedno takové znázornění existuje, právě jsme dokázali: je to zlomek g-adický vzniklý z α pomocí g-adického algoritmu prvního druhu. Bude tedy věta zcela dokázána, ukážeme-li, že každý zlomek g-adický (3), o němž platí (4), má za hodnotu číslo reální α, z něhož užitím g-adického algoritmu prvního druhu dostaneme právě čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Položme

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{g} + \frac{a_{n+2}}{g^2} + \ldots \tag{5}$$

I bude podle (4) § 36 $0 \leq \alpha_n \leq 1$ pro $n \geq 0$. Dokážeme, že není možno, aby $\alpha_n = 1$. Ať je n jakkoliv veliké, bude aspoň pro jedno $\nu > n$ platiti $a_\nu \leq g - 2$. Číslo $\alpha_n + 1/g^\nu$ bude vyjádřeno zlomkem g-adickým, který vznikne z α_n, dáme-li místo a_ν číslici $a_\nu + 1$. I bude zase $\alpha_n + 1/g^\nu \leq 1$, t. j. $\alpha_n \leq 1 - 1/g^\nu < 1$ pro každé n. Platí tedy $0 \leq \alpha_n < 1$ pro $n \geq 0$. Je však podle (5) $g\alpha_{n-1} = a_n + \alpha_n$, takže $a_n = [g\alpha_{n-1}]$.

§ 38. Můžeme však k rozvoji čísla reálního α ve zlomek g-adický dojíti též, užíváme-li operace $[\ ]'$. (Viz § 2 str. 8.)

$$\begin{aligned}
\text{Položme}\quad \alpha &= a_0 + \alpha_0, & \text{kdež } a_0 &= [\alpha]', & \text{t. j. } 0 < \alpha_0 \leqq 1,\\
g\alpha_0 &= a_1 + \alpha_1, & \text{kdež } a_1 &= [g\alpha_0]', & \text{t. j. } 0 < \alpha_1 \leqq 1,\\
g\alpha_1 &= a_2 + \alpha_2, & \text{kdež } a_2 &= [g\alpha_1]', & \text{t. j. } 0 < \alpha_2 \leqq 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}$$

$$g\alpha_{n-1} = a_n + \alpha_n, \quad \text{kdež } a_n = [g\alpha_{n-1}]', \tag{1}$$

$$\text{t. j. } 0 < \alpha_n \leqq 1. \tag{2}$$

Tento postup nazveme g-adickým algoritmem druhého druhu. Z $0 < \alpha_n \leqq 1$ plyne $0 < g\alpha_n \leqq g$ a tedy zase $0 \leqq a_{n+1} < g$ pro $n \geqq 0$. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jsou g-adické číslice. g-adický algoritmus druhého druhu přiřaďuje zase číslu reálnímu α zlomek g-adický $a_0 + a_1/g + a_2/g^2 + \ldots$, jehož hodnota je opět α.

Lze snadno nahlédnouti, že existují zlomky g-adické, které nemohou vzniknouti z čísla reálného g-adickým algoritmem druhého druhu. Jsou to g-adické zlomky konečné. Je-li totiž $a_n = 0$ pro $n > h$, pak $g\alpha_n = \alpha_{n+1}$ pro $n > h$, tedy $\alpha_n = \alpha_{n+1}/g = \alpha_{n+2}/g^2 = \ldots = \alpha_{n+r}/g^r$ pro $n > h$, $r \geqq 1$. Nechme r růsti do nekonečna. I bude $\alpha_n = 0$ pro $n > h$, takže nemůže býti $\alpha_n > 0$.

Nyní platí věta:

Každé číslo reální α lze jediným způsobem znázorniti nekonečným zlomkem g-adickým

$$a_0 + a_1/g + a_2/g^2 + \ldots, \tag{3}$$

při čemž a_n lze ustanoviti z α pomocí g-adického algoritmu druhého druhu.

Právě jsme dokázali, že existuje aspoň jedno takové znázornění. Věta pak bude úplně dokázána, dokážeme-li, že každý zlomek g-adický nekonečný (3) má za hodnotu číslo reální α, z něhož pomocí g-adického algoritmu druhého druhu dostaneme právě čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Položme $\alpha_n = a_{n+1}/g + a_{n+2}/g^2 + \ldots$ I bude podle (4) z § 36, ježto (3) je zlomek nekonečný, $0 < \alpha_n \leqq 1$ pro $n \geqq 0$. Ježto $g\alpha_{n-1} = a_n + \alpha_n$, bude $a_n = [g\alpha_{n-1}]'$.

Není-li x číslo celé, je $[x] = [x]'$. Nebude-li tedy žádné z čísel $\alpha, g\alpha_0, g\alpha_1, \ldots$ celé, budou se oba algoritmy g-adické ztotožňovati a bude stále $0 < \alpha_n < 1$.

Nechť je $g\alpha_{h-1}$ první celé číslo v řadě $g\alpha_0, g\alpha_1, \ldots$ I bude podle algoritmu prvního druhu $a_h = g\alpha_{h-1}$, $\alpha_h = 0$, a dále $a_n = 0$ pro $n > h$, $\alpha_n = 0$ pro $n \geqq h$. Algoritm prvního druhu poskytne konečný zlomek g-adický

$$\alpha = a_0 + 0,\ a_1 a_2 \ldots a_h.$$

Podle algoritmu druhého druhu bude $a'_h = ga_{h-1} - 1 = a_h - 1$, $a'_h = 1$, a dále $a'_n = g - 1$ pro $n > h$, $a'_n = 1$ pro $n \geqq h$.

Algoritm druhého druhu dává zlomek g-adický o periodě $g - 1$

$$\alpha = a_0 + 0,\ a_1 a_2 \ldots \overline{a_h - 1}\ \overline{g - 1}\ \overline{g - 1} \ldots$$

(Pro případ, že by α bylo číslo celé, dostaneme tak

$$\alpha = \alpha - 1,\ \overline{g - 1}\ \overline{g - 1}\ \overline{g - 1} \ldots).$$

§ 39. Je-li α číslo racionální vyjadřitelné redukovaným zlomkem $\alpha = r/m$, $m > 0$, klaďme $\alpha_n = r_n/m$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Budeme uvažovati pouze algoritm prvního druhu, ježto v případě, kde oba algoritmy poskytují různé výsledky, lze k algoritmu druhého druhu snadno přejíti.

I dostaneme:

$$\begin{array}{lll}
r = a_0 m + r_0, & a_0 = \left[\dfrac{r}{m}\right], & 0 \leqq r_0 < m \\
g r_0 = a_1 m + r_1, & a_1 = \left[\dfrac{g r_0}{m}\right], & 0 \leqq r_1 < m \\
g r_1 = a_2 m + r_2, & a_2 = \left[\dfrac{g r_1}{m}\right], & 0 \leqq r_2 < m \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
g r_{n-1} = a_n m + r_n, & a_n = \left[\dfrac{g r_{n-1}}{m}\right], & 0 \leqq r_n < m.
\end{array}$$

Čísla $r_0, r_1, r_2, \ldots$ jsou vesměs celá, r_0 nesoudělné s m. I bude $r/m = a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots$ a tento zlomek g-adický nebude míti periodu $g - 1$.

Pro r_n/m platí $r_n/m = 0, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$ Zlomky ty jsou vesměs ryzí. Takových zlomků je však na počet m, musí se tedy opakovati. Nechť jsou r_h/m a r_{h+f}/m první z řady těchto ryzích zlomků, které se sobě rovnají,

$$r_h/m = r_{h+f}/m. \tag{1}$$

Pak jest

$$0,\ a_{h+1}\ a_{h+2} \ldots = 0,\ a_{h+f+1}\ a_{h+f+2} \ldots$$

Z jednoznačnosti znázornění g-adickými zlomky uvedeného tvaru bude nutně plynouti $a_{h+1} = a_{h+f+1}$, $a_{h+2} = a_{h+f+2} \ldots$, t. j. pro $n > h$ bude

$$a_n = a_{n+f}. \tag{2}$$

h, f jsou nejmenší celá čísla $h \geqq 0$, $f \geqq 1$ té vlastnosti, že pro každé číslo celé $n > h$ platí (2). Kdyby analogické relace platily již pro $\bar{h}<h, \bar{f}<f$, bylo by již $r_{\bar{h}}/m = r_{\bar{h}+\bar{f}}/m$, takže by zlomky (1) nebyly první, které v řadě r_n/m $(n \geqq 0)$ jsou si rovny.

I platí věta:

Každé racionální číslo lze rozvinouti v g-adický zlomek periodický.

Počet číslic před periodou h a délku periody lze snadno u zlomku r/m ustanoviti. Zjistíme, že závisí jen na m a g, nikoliv však na r. Je-li $r/m = a_0 + 0, a_1a_2 \ldots a_h\dot{a}_{h+1} \ldots, \dot{a}_{h+f}$, budou zlomky $g^h \frac{r}{m}$ a $g^{h+f} \frac{r}{m}$ první z řady $g^n \frac{r}{m}$, $n \geqq 0$, jejichž rozdíl bude číslo celé, t. j. kdy $g^h(g^f - 1)\frac{r}{m}$ bude číslo celé. Ježto je r nesoudělné s m, bude odtud plynouti, že h, f jsou nejmenší čísla celá, $h \geqq 0$, $f \geqq 1$, pro něž platí

$$g^h(g^f - 1) \equiv 0 \pmod{m}. \qquad (3)$$

Těmito podmínkami jsou h a f jednoznačně určeny.

Obsahuje-li nejprve m tytéž prvočinitele jako g, je $g^f - 1$ pro $f \geqq 1$ nesoudělné s m. Je tedy $f = 1$ a h je nejmenší celý mocnitel $\geqq 0$, pro který je

$$g^h \equiv 0 \pmod{m}. \qquad (4)$$

Nechť je rozklad čísel g a m v prvočinitele

$$g = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}, \quad m = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \ldots p_\mu^{\beta_\mu},$$

kdež α_i i β_i jsou čísla celá, $\alpha_i > 0$, $\beta_i \geqq 0$. g^h bude nejnižší mocnina g dělitelná m, je-li h nejmenší číslo celé kladné, pro něž $h\alpha_i \geqq \beta_i$, t. j. $h \geqq \beta_i/\alpha_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots \mu$.

Zde $r_0/m = 0, a_1a_2 \ldots a_ha_{h+1}a_{h+2} \ldots$, $g^hr_0/m = a_1a_2 \ldots a_h, a_{h+1}a_{h+2} \ldots$, kdež $a_1a_2 \ldots a_h$ je číslo celé $\geqq 0$ psané v soustavě g-adické (§ 2 str. 9). Toto číslo má býti vzhledem ke kongruenci (4) číslo celé. Musí tedy býti $a_{h+1} = a_{h+2} = \ldots = 0$. V tomto případě je zlomek g-adický pro r/m konečný. Počet jeho číslic za čárkou, h, je nejmenší číslo celé $\geqq 0$ hovící kongruenci (4). Tento konečný zlomek g-adický dostaneme pomocí algoritmu prvního druhu. Algoritm druhého druhu poskytl by zlomek g-adický o h číslicích před jednočlennou periodou $g - 1$.

Je-li na druhé straně m nesoudělné s g, platí kongruence (3) tehdy a jen tehdy, je-li

$$g^f \equiv 1 \pmod{m}. \qquad (5)$$

I je $h = 0$ a f je nejmenší mocnitel, pro který platí (5), t. j. mocnitel, ke kterému patří g (mod m). (Viz § 35).

Zlomky r/m, jejichž čitatel je nesoudělný s g, dávají zlomky g-adické ryze periodické a počet číslic v periodě je roven mocniteli f, ke kterému patří g (mod m).

Jsou-li konečně m a g libovolná, lze rozložiti m na dva činitele $m = m_1 m_2$, takže m_1 obsahuje všechny prvočinitele z m, které se vyskytují také v g, a m_2 je nesoudělné s g. Z kongruence (3) plyne podle věty na konci § 19., že h, f jsou nejmenší čísla celá $h \geqq 0$, $f \geqq 1$, pro něž platí kongruence

$$g^h \equiv 0 \pmod{m_1} \tag{6}$$
$$g^f \equiv 1 \pmod{m_2}. \tag{7}$$

V tomto případě je zlomek neryze periodický, počet číslic před periodou h dán je kongruencí (6) a počet číslic v periodě f kongruencí (7).

Ukážeme nyní, že periodický zlomek g-adický je roven číslu racionálnímu. Důkaz stačí provésti pro zlomek

$$\alpha_0 = 0,\ a_1 a_2 \dots a_h \dot{a}_{h+1} \dots \dot{a}_{h+f}.$$

I bude

$$g^h \alpha_0 = a_1 a_2 \dots a_h,\ \dot{a}_{h+1} \dots \dot{a}_{h+f},$$
$$g^{h+f} \alpha_0 = a_1 a_2 \dots a_h\, a_{h+1} \dots a_{h+f},\ \dot{a}_{h+1} \dots \dot{a}_{h+f},$$

tedy rozdíl

$$g^h (g^f - 1)\, \alpha_0 = a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1} \dots a_{h+f} - a_1 a_2 \dots a_h,$$

t. j.

$$\alpha_0 = \frac{a_1 a_2 \dots a_h\, a_{h+1} \dots a_{h+f} - a_1 a_2 \dots a_h}{g^h (g^f - 1)}.$$

Nechť je nyní m nesoudělné s g a nechť g patří k exponentu f (mod m). Zlomek g-adický pro r/m je ryze periodický. Označme jeho periodu $P(r/m)$. I bude

$$P\left(\frac{r}{m}\right) = a_1 a_2 \dots a_f$$
$$P\left(g\frac{r}{m}\right) = a_2 a_3 \dots a_f a_1$$
$$P\left(g^2\frac{r}{m}\right) = a_3 a_4 \dots a_f a_1 a_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P\left(g^{f-1}\frac{r}{m}\right) = a_f\, a_1 a_2 \dots a_{f-1}.$$

$P\left(g^f \dfrac{r}{m}\right)$ by bylo zase $= P\,(r/m)$. $P\left(g^{i+1}\dfrac{r}{m}\right)$ vznikne z $P\left(g^i \dfrac{r}{m}\right)$ (i číslo celé $\geqq 0$) cyklickou záměnou. Uvedené periody tvoří tak zvaný cykl period. Ježto $g^f \equiv 1 \pmod{m}$, je f dělitelem $\varphi(m)$. Je-li tedy $\varphi(m) = ef$, $e > 1$, dlužno utvořiti tyto periody pro e různých hodnot r, abychom dostali periody všech zlomků o jmenovateli m. Je e cyklů period. Je-li $e = 1$, $f = \varphi(m)$, tedy g primitivní kořen (mod m), existuje jen jeden cykl: stačí vzíti za r číslo celé nesoudělné s m (třeba $r = 1$) a dostaneme periody všech zlomků o jmenovateli m z této cyklickou záměnou.

§ 40. Užijeme těchto výsledků k rozvinutí čísla racionálního ve zlomek desetinný, uvažujme tedy případ $g = 10 = 2 \,.\, 5$. Redukovaný zlomek, jehož jmenovatel je tvaru $m = 2^{\beta_1}5^{\beta_2}$ (β_1, β_2 čísla celá $\geqq 0$), dává konečný zlomek desetinný; počet číslic h napravo od desetinné čárky je roven většímu z čísel β_1, β_2.

Redukovaný zlomek lze tehdy a jen tehdy proměniti na desetinný zlomek ryze periodický, není-li jeho jmenovatel dělitelný ani 2 ani 5. Délka periody je rovna exponentu, k němuž patří 10 vzhledem ke jmenovateli jako modulu.

Zlomek $r/2^{\beta_1}5^{\beta_2}m_2$ je roven neryze periodickému zlomku desetinnému, který má tolik číslic před periodou, kolik udává větší z mocnitelů β_1, β_2 a jenž má délku periody rovnou exponentu, k němuž patří 10 (mod m_2).

Osvětleme věty dříve vyslovené příklady pro zlomky desetinné. Rozveďme $\frac{1}{7}$ v zlomek desetinný. Dělme obyčejným způsobem:

$$
\begin{array}{l}
1_0 : 7 = 0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7} \\
\;\;3_0 \\
\;\;\;\;2_0 \\
\;\;\;\;\;\;6_0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;4_0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5_0 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1.
\end{array}
$$

Perioda je zde 142857, čísla 1, 3, 2, 6, 4, 5 jsou zbytky mocnin 10 (mod 7). Číslo 10 je (mod 7) primitivní kořen, periody zlomků o jmenovateli 7 tvoří jediný cykl. Je pak

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{7} = 0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7} \qquad & \frac{6}{7} = 0{\cdot}\dot{8}5714\dot{2} \\
\frac{3}{7} = 0{\cdot}\dot{4}2857\dot{1} & \frac{4}{7} = 0{\cdot}\dot{5}7142\dot{8} \\
\frac{2}{7} = 0{\cdot}\dot{2}8571\dot{4} & \frac{5}{7} = 0{\cdot}\dot{7}1428\dot{5}.
\end{array}
$$

Rozveďme nyní $\frac{1}{13}$ ve zlomek desetinný:

$$
\begin{array}{l}
1_0 : 13 = 0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3} \\
10_0 \\
\;\;9_0 \\
\;12_0 \\
\;\;\;3_0 \\
\;\;\;\;4_0 \\
\;\;\;\;\;1.
\end{array}
$$

I dostaneme cykl

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{13} = 0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3} & \frac{12}{13} = 0{\cdot}\dot{9}2307\dot{6} \\
\frac{10}{13} = 0{\cdot}\dot{7}6923\dot{0} & \frac{3}{13} = 0{\cdot}\dot{2}3076\dot{9} \\
\frac{9}{13} = 0{\cdot}\dot{6}9230\dot{7} & \frac{4}{13} = 0{\cdot}\dot{3}0769\dot{2}.
\end{array}
$$

Abychom dostali periody všech zlomků o jmenovateli 13, je třeba rozvésti ve zlomek desetinný ryzí zlomek o jmenovateli 13, který mezi uvedenými není, třeba $\frac{2}{13}$. I dostaneme

$$
\begin{array}{l}
2_0 : 13 = 0{\cdot}\dot{1}5384\dot{6} \\
\;7_0 \\
\;\;5_0 \\
\;\;11_0 \\
\;\;\;\;6_0 \\
\;\;\;\;\;8_0 \\
\;\;\;\;\;\;2.
\end{array}
$$

Tak dostaneme druhý cykl

$$
\begin{array}{ll}
\frac{2}{13} = 0{\cdot}\dot{1}5384\dot{6} & \frac{11}{13} = 0{\cdot}\dot{8}4615\dot{3} \\
\frac{7}{13} = 0{\cdot}\dot{5}3846\dot{1} & \frac{6}{13} = 0{\cdot}\dot{4}6153\dot{8} \\
\frac{5}{13} = 0{\cdot}\dot{3}8461\dot{5} & \frac{8}{13} = 0{\cdot}\dot{6}1538\dot{4}.
\end{array}
$$

Tím vyčerpány jsou rozvoje všech ryzích zlomků o jmenovateli 13 v zlomky desetinné.

V obou případech, i pro zlomky o jmenovateli 7 i pro zlomky o jmenovateli 13 skládá se perioda ze dvou polovic a číslice jedné poloviny doplňují se s číslicemi druhé poloviny na 9. Říká se, že jedna polovina je desítkovým doplňkem druhé. To nastane, když periody zlomků r/m a $1 - r/m = (m - r)/m$ patří k témuž cyklu. Pak musí býti

$$m - r \equiv r\,10^a \pmod{m},$$

t. j.

$$-1 \equiv 10^a \pmod{m}.$$

Perioda zlomku desetinného pro zlomek o jmenovateli m skládá se ze dvou polovin, které se desítkově doplňují, je-li mezi zbytky mocnin čísla 10 mod m zbytek -1.

Je-li f délka periody pro jmenovatele m, je $10^f - 1$ dělitelno m. Jsou tedy jmenovatelé m poskytující délku periody f děliteli čísla $10^f - 1$. Naopak je délka periody zlomku, jehož jmenovatel je dělitel $10^f - 1$, buď f neb dělitel f. Zlomků, jejichž rozvoj v desetinný zlomek má danou délku periody f, je konečný počet. Jednočlenné periody dávají zlomky o jmenovatelích 3, 9, dělitelích 9:

$$\tfrac{1}{3} = 0{\cdot}333\ldots, \quad \tfrac{1}{9} = 0{\cdot}111\ldots$$

Dále je $10^2 - 1 = 99 = 9 \,.\, 11$.

Dvojčlenné periody dají zlomky o jmenovatelích 11, 33, 99.