Perspektiva

5. Přímá methoda (Volná perspektiva)

In: Emil Kraemer (author): Perspektiva. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1951. pp. 48–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402929

5. PŘÍMÁ METHODA (VOLNÁ PERSPEKTIVA)

Nevýhoda průsečné methody je v tom, že v perspektivním obraze sestrojeném touto methodou nemůžeme prováděti případné změny a doplňky. Musíme je nejdříve provést v půdoryse a náryse a teprve potom je přenést do perspektivy. Sestrojujeme-li perspektivní obraz přímo do daného půdorysu a nárysu (jak jsme to naznačili v minulém odstavci na str. 44), hromadí se v nákresně mnoho čar; přenášíme-li perspektivu do nového obrazu (jak jsme to prováděli v obr. 13), zvyšuje se opět nepřesnost konstrukcí. Kromě toho vyžaduje průsečná methoda při správné volbě distance hodně místa. Z těchto důvodů se obyčejně sestrojují perspektivní obrazy daných předmětů *přímo;* při tom nezáleží na tom, jak jsou tyto předměty určeny (zda sdruženými obrazy či jinak).

Perspektivy se nejčastěji užívá pro znázornění stavitelských objektů. Při konstrukci perspektiv postupujeme při tom tak, že *nejdříve sestrojíme perspektivní obraz půdorysu dané stavby a potom nad ním vyneseme příslušné výšky. Aby byla konstrukce co nejpřesnější, užíváme při ní všech dostupných úběžníků.* Jde zde tedy o řešení tří základních úloh:

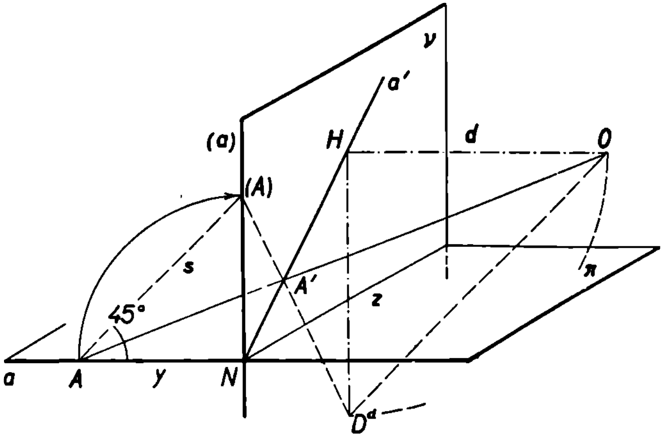
1. Sestrojit perspektivu obrazce ležícího ve vodorovné rovině.

2. Sestrojit úběžníky daných vodorovných přímek.

3. Sestrojit nad perspektivním půdorysem správně perspektivní obrazy výšek.

Konstrukci jednotlivých bodů perspektivního obrazu je možné vždy provést (i při velké distanci). Teprve při rýsování perspektivních obrazů přímek se objeví potíže, neboť jejich úběžníky, které jsou pro přesnou konstrukci velmi důležité, vycházejí často mimo nákresnu.

Všimněme si nejdříve, jak se sestrojí perspektiva bodu A, který leží v základní rovině. (Obr. 20.) Proložme bodem A



Obr. 20.

hloubkovou přímku $a \perp z$ a její stopník (ležící na základnici z) označme N. Podle věty 5 (odst. 1) a podle věty A (odst. 3) prochází její středový průmět a' stopníkem N a hlavním bodem H. Podle věty 5 leží průmět A' bodu A na přímce a'. Otočme základní rovinu π kolem základnice z do průmětny. Toto otočení (jemuž také říkáme sklápění) můžeme provésti dvojím způsobem: buď sklápíme tak, že body ležící za průmětnou přejdou do bodů ležících nad základnicí z anebo tak, že tyto body přejdou pod tuto základnici. V obr. 20 jsme provedli sklopení základní roviny prvním způsobem. Přímka

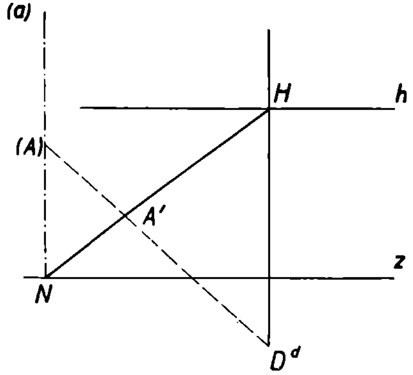
a se sklopí do přímky (a) procházející stopníkem N kolmo k základnici; bod A se sklopí do bodu (A), který leží na přímce (a). Protože trojúhelník $AN(A)$ je pravoúhlý při vrcholu N a protože $\overline{AN} = \overline{N(A)}$, jest úhel $NA(A)$ roven 45°. Dostaneme tedy také bod (A) jako stopník přímky s, která prochází bodem A, leží v rovině ϱ kolmé k základnici z a svírá s hloubkovou přímkou a úhel 45°. Podle věty E je úběžník této přímky v dolním distančníku D^d. Je tedy perspektivní průmět s' přímky s přímka spojující bod (A) s dolním distančníkem D^d; na této přímce s' leží průmět A' bodu A.

Každá přímka b, která leží v základní rovině a je rovnoběžná se základnicí, přejde po sklopení do přímky $(b) \parallel z$; podle věty 6 je průmětem přímky b přímka $b' \parallel z$. Každá přímka c ležící v základní rovině a protínající základnici z v bodě M, přejde sklopením do přímky (c), která opět prochází bodem M; podle věty 5 prochází bodem M (stopníkem) také průmět c' přímky c. — Sklopíme-li základní rovinu druhým způsobem, nastane změna jedině v tom, že přímka s' prochází horním distančníkem. Dokázali jsme tedy větu, která — jak je patrno z důkazu — platí pro každou vodorovnou rovinu:

Věta F. Otočíme-li základní rovinu kolem základnice z do průmětny tak, že body ležící za průmětnou přejdou do bodů nad (pod) základnicí z, potom perspektivní průmět A' libovolného bodu A základní roviny leží se sklopením (A) tohoto bodu na přímce, která prochází dolním (horním) distančníkem. — Je-li l libovolná přímka základní roviny, (l) její sklopení a l' její průmět, potom jest buď $l' \parallel (l) \parallel z$, anebo se přímky l', (l), protínají v jednom bodě (stopníku přímky l) na základnici z.

Podle této věty sestrojíme snadno perspektivní obraz A' bodu A ležícího v základní rovině (obr. 21). Sklopíme základní rovinu kolem základnice z do průmětny; při tom přejde hloubková přímka a bodu A do přímky $(a) \perp z$, jejíž stopník N je na základnici z. Potom obraz A' bodu A je v průsečíku přímky $a' \equiv NH$ s přímkou spojující bod (A) s dolním distančníkem D^d.

Poznámka. Věty F je možné také užíti k řešení obrácené úlohy, t. j. sestrojit z daného perspektivního půdorysu



Obr. 21.

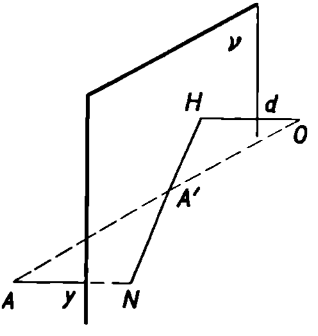
útvaru, který leží v základní rovině, skutečnou velikost tohoto půdorysu.

Konstrukce narýsovaná v obr. 21 se však nedá provést v případě, kdy bude značně velká distance; potom totiž padne dolní distančník D^d mimo nákresnu. Ukážeme si nyní, jak se sestrojuje perspektivní obraz bodu A ležícího kdekoliv v prostoru; při tom je možné provést tuto konstrukci i v případě, kdy je distance jakkoliv velká. Bodem A proložíme hloubkovou přímku a najdeme její stopník N; délka y úsečky NA je rovna vzdálenosti bodu A od průmětny (obr. 22). Při tom *pokládáme vzdálenost y bodu A od průmětny za kladnou, leží-li bod A před průmětnou; pokládáme ji za zápornou, leží-li bod A za průmětnou.* Průmět A' bodu A leží na průmětu NH hloubkové přímky AN. Z obr. 22 je vidět, že $\sphericalangle AA'N = \sphericalangle OA'H$ (vrcholové úhly) a že $\sphericalangle ANA' =$

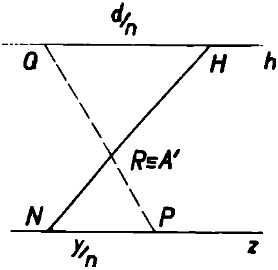
$= \sphericalangle OHA' = 90°$. Trojúhelníky ANA', OHA' mají dva stejné úhly a tedy jsou podobné; jak je známo z geometrie, jsou jejich přiřazené strany úměrné (přiřazené strany jsou ty, které leží proti stejným úhlům), t. j. platí také:

$$\overline{NA'} : \overline{HA'} = \overline{NA} : \overline{HO} = y : d.$$

Je-li bod A pevně zvolen, jest N pevný bod; rovněž bod hlavní H je pevný bod. Poměr $\overline{NA'} : \overline{HA'}$ se nazývá *dělicí*



Obr. 22.



Obr. 23.

poměr bodu A' vzhledem k základním bodům N (první základní bod), H (druhý základní bod). V geometrii se dokazuje, že ke každému číslu patří na přímce NH jediný bod A', jehož dělicí poměr je roven tomuto číslu; číslu 1 patří nevlastní bod přímky NH. Při tom k číslům kladným patří body ležící vně úsečky NH, číslům záporným body ležící uvnitř úsečky NH. Nule je přiřazen bod N. Platí tedy věta:

Věta G. Perspektivní obraz A' bodu A leží na přímce spojující hlavní bod H se stopníkem N hloubkové přímky procházející bodem A. Dělicí poměr bodu A' vzhledem k základním bodům N, H jest $\overline{NA'} : \overline{HA'} = y : d$. Při tom značí d distanci a y vzdálenost bodu A od průmětny.

Z této věty plyne jednoduchá konstrukce bodu A', která se dá provést pro každou distanci; konstrukce provedená v obr. 21 je jenom jejím zvláštním případem.

1. základní úloha. Sestrojte perspektivní obraz daného bodu A (nezáleží na tom, leží-li bod A v základní rovině či nikoliv).

Proložíme bodem A hloubkovou přímku a sestrojíme její stopník N (obr. 23). Perspektivní obraz A' bodu A leží na perspektivním obraze NH této hloubkové přímky a dělí úsečku NH v poměru $y : d$ (věta G). Proložíme body N, H dvě libovolné nesplývající rovnoběžky z, h ($z \parallel h$), na přímku h naneseme od bodu H délku d/n ($n = 1$ nebo 2 nebo 3 atd. podle toho, jak je velká distance) do bodu Q a na přímku z naneseme od bodu N délku y/n do bodu P. Při tom nanášíme tyto délky v témže smyslu (takže body P, Q leží v téže polorovině vyťaté přímkou NH) anebo v opačném (body P, Q leží v opačných polorovinách o hranici NH) podle toho, je-li y kladné nebo záporné. Je-li kladné y rovno d (bod A leží v distanční rovině), potom jsou přímky NH, PQ rovnoběžné, t. j. protínají se v úběžném bodě A', který je skutečně — jak víme — obrazem bodu A. V každém jiném případě se přímky NH, PQ protnou v bodě R (vlastním). Z podobnosti trojúhelníků NPR, HQR plyne:

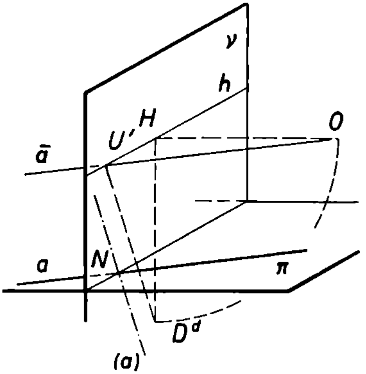
$$\overline{NR} : \overline{HR} = y/n : d/n = y : d.$$

Má tedy bod R na přímce NH dělicí poměr (vzhledem k bodům N, H) rovný číslu y/d; protože tentýž dělicí poměr má perspektivní obraz A' bodu A a protože na přímce NH je jenom jeden bod s daným dělicím poměrem (vzhledem k bodům N, H), splývá bod R s perspektivním obrazem A' bodu A.

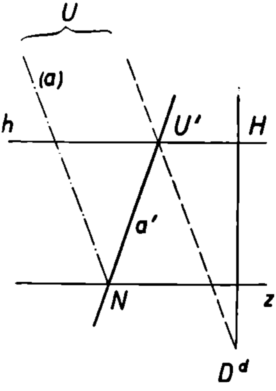
Poznámka. Protože vždy v perspektivním obraze rýsujeme horizontálu, volíme za pomocnou přímku proloženou bodem H obyčejně horizontálu h. Leží-li ještě bod A v základní rovině, splyne potom druhá pomocná rovnoběžka $z \parallel h$ se základnicí.

2. základní úloha. V základní rovině je dána přímka a protínající základnici z v bodě N; sestrojte úběžník U' této přímky.

Podle věty 5 (odst. 1) je úběžník U' přímky a stopníkem přímky $\bar{a} \parallel a$ proložené okem O (čili je to průmět jejího úběžného bodu U); podle věty B leží tento úběžník na hori-



Obr. 24.

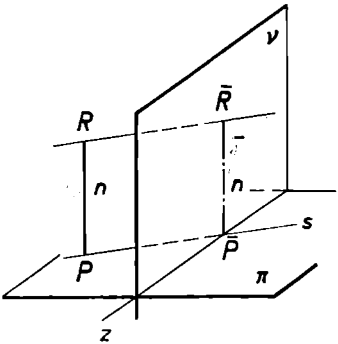


Obr. 25.

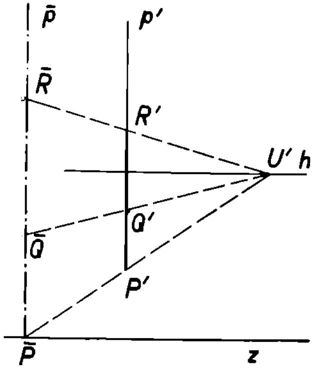
zontále h. (Obr. 24.) Otočíme-li základní rovinu π kolem základnice z tak, aby se body ležící za průmětnou ν sklopily do bodů ležících nad základnicí z, a otočíme-li současně rovinu $\sigma \parallel \pi$ kolem horizontály h tak, aby se oko O sklopilo do dolního distančníku D^d, je i ve sklopení přímka $\bar{a}$ rovnoběžná se sklopením (a) přímky a. Je tedy $D^dU' \parallel (a)$, takže úběžník U' sestrojíme jako průsečík horizontály h s přímkou $D^dU' \parallel (a)$.

Konstrukce je provedena v obr. 25; protože podle definice 1 z odst. 2 procházejí přímky (a), $D^dU' \parallel (a)$ společným úběžným bodem U, je přímka D^dU' spojnice distančníku D^d s úběžným bodem přímky (a). Tento úběžný bod je však sklopený úběžný bod přímky a. Z toho plyne, že konstrukce úběžníku U' se provádí docela stejně jako konstrukce perspektivního obrazu A' kteréhokoliv vlastního bodu A přímky a, t. j. podle věty F. Doplníme si tedy znění věty F touto poznámkou:

Doplněk věty F. Konstrukce úběžníku libovolné přímky a, která leží v základní rovině a protíná základnici, se provádí stejně jako konstrukce (popsaná ve větě F) průmětu jejího



Obr. 26.



Obr. 27.

libovolného vlastního bodu. To znamená: úběžník U' leží na přímce spojující dolní (horní) distančník se sklopeným úběžným bodem přímky a čili $D^dU' \parallel (a)$, respektive $D^hU' \parallel (a)$.

3. základní úloha: Na svislou přímku p, která protíná základní rovinu π v bodě P, naneste od tohoto bodu P danou délku n.

Všimněme si nejprve názorného obr. 26. Sestrojíme bodem P přímku s tak, aby ležela v základní rovině a protínala základnici z v bodě $\bar{P}$ (směr přímky s je jinak libovolný). Vztyčíme-li v průmětně ν v bodě $\bar{P}$ kolmici $\bar{p}$ k základnici z, je přímka $\bar{p}$ také svislá, t. j. $\bar{p} \parallel p$. Naneseme-li na rovnoběžky $\bar{p}$, p od bodu $\bar{P}$, respektive P v témže smyslu stejnou délku n, dostaneme rovnoběžník $\bar{P}\bar{R}RP$; je tedy $R\bar{R} \parallel s$.

Protože perspektivní obrazy svislých přímek jsou zase svislé přímky a protože obrazy vodorovných přímek $P\bar{P}$, $R\bar{R}$ procházejí společným úběžníkem U' ležícím na horizontále h, je obraz rovnoběžníka $\bar{P}\bar{R}RP$ lichoběžník $\bar{P}\bar{R}R'P'$, jehož základna $\bar{P}\bar{R}$ (ležící v průmětně) má délku n a jehož (prodloužená) ramena procházejí úběžníkem U' (obr. 27). Zvolíme-li tedy na horizontále libovolný úběžník U', bude průsečík $\bar{P}$ přímky $P'U'$ se základnicí z vrcholem uvedeného lichoběžníka, jehož základny $\bar{P}\bar{R}$, $P'R'$ leží na svislých přímkách $\bar{p}$, p'; při tom základna $\bar{P}\bar{R}$ má délku rovnou n. Dostaneme tedy bod R' jako průsečík přímek p', $U'\bar{R}$.

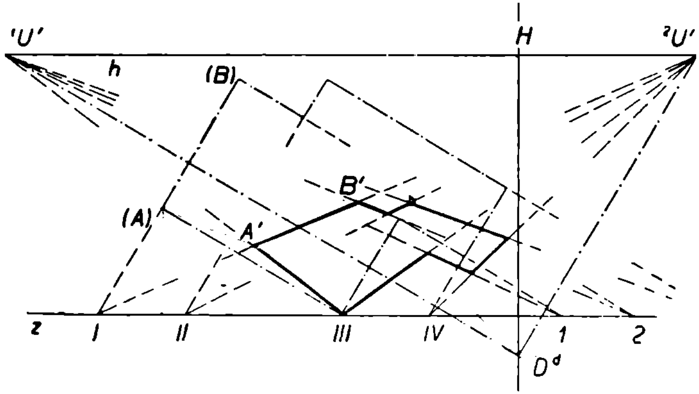
Poznámky. 1. Máme-li na svislou přímku p nanést danou délku od bodu Q, který neleží v základní rovině, postupujeme obdobně, t. j. sestrojíme nejdříve na základnici bod $\bar{P}$, pak přímku $\bar{p}$, na ní bod $\bar{Q}$ a dále postupujeme stejně jako dříve (obr. 27). — 2. Z obr. 27 také plyne, jak naopak sestrojíme skutečnou velikost svislé úsečky QR, známe-li její perspektivní obraz $Q'R'$ a perspektivní obraz P' jejího průsečíku P se základní rovinou.

Ukážeme si na dvou příkladech, jak užíváme právě vyložených základních konstrukcí při zobrazování nějakého tělesa.

Úloha. Sestrojte perspektivu půdorysu budovy, je-li dáno sklopení tohoto půdorysu do průmětny; jako obvykle předpokládáme, že budova stojí za průmětnou (obr. 28).

Na daném půdoryse jsou dvě osnovy rovnoběžek. Podle 2. základní úlohy sestrojíme jejich úběžníky ${}^1U'$, ${}^2U'$. Tak na příklad úběžník ${}^2U'$ je průsečík horizontály h s přímkou vedenou dolním distančníkem D^d rovnoběžně k přímce $(A)(B)$. Potom sestrojíme stopníky $I, II, III, IV, 1, 2, 3$ všech přímek, na kterých leží jednotlivé úsečky půdorysu.

Perspektivní obraz každé přímky půdorysu je potom spojnice jejího stopníku s jejím úběžníkem. Tak na příklad hrana AB má stopník v bodě I a úběžník v bodě ${}^2U'$; je tedy její perspektivní obraz $A'B'$ na přímce spojující body I, ${}^2U'$. Perspektivní obrazy přímek půdorysu se protínají v perspektivních obrazech vrcholů tohoto půdorysu.



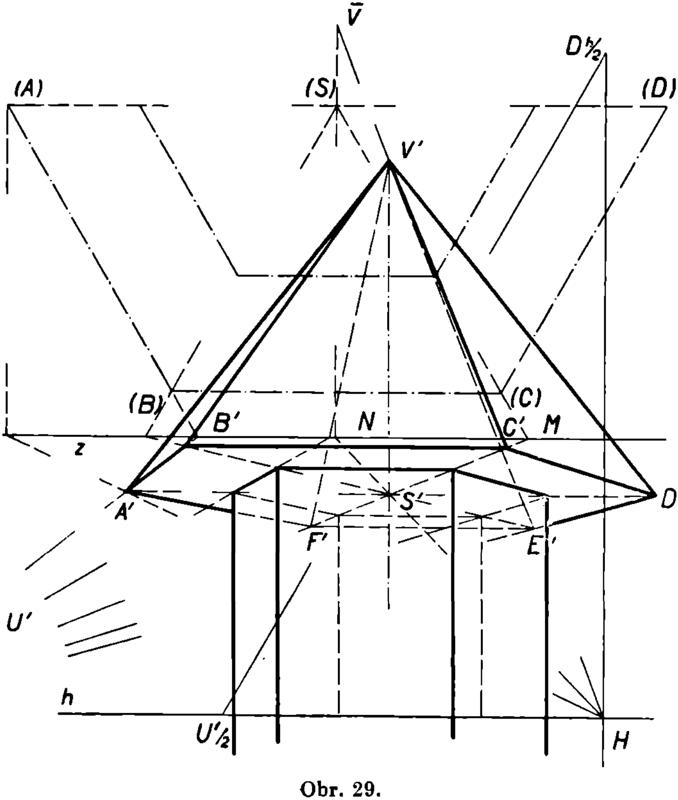
Obr. 28.

Poznámka. Přesnost konstrukce můžeme dobře kontrolovat podle věty F. Podle této věty procházejí přímky $(A)A'$, $(B)B'$ atd. dolním distančníkem D^d.

Úloha. Sestrojte perspektivu vrcholu věže, je-li dáno sklopení jejího půdorysu do průmětny (věž je za průmětnou). Věž má podobu pravidelného šestibokého hranolu a je zakončena střechou podoby pravidelného šestibokého jehlanu, jehož výška je udána.

Základní rovinu položíme do roviny, ve které končí zdivo věže; potom bude základní rovina podstavnou rovinou jehlanu, jenž tvoří střechu věže. Pozorovatel (t. j. oko) je pod touto základní rovinou, takže vidí vrchol věže zespodu. Proto je v obr. 29 základnice z nad horizontálou h; obraz tělesa, který dostaneme, se nazývá *podhled*. V obr. 29 je také vyznačen hlavní bod H; distance je rovina dvojnásobku úsečky $HD^h/2$. Bod $D^h/2$ nazýváme *redukovaným (na polovinu) horním distančníkem*.

Podstava jehlanu je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$; v obr. 29 je narýsována polovina sklopeného půdorysu tohoto obrazce. Menší šestiúhelník, jehož polovina je narýso-



Obr. 29.

vána v obrázku, je sklopeným půdorysem pravidelného šestibokého hranolu, tvořícího dolní část věže; aby se obrázek příliš nezaplnil písmeny, nejsou vrcholy menšího šestiúhelníka označeny.

Vysvětlíme konstrukci perspektivního obrazu šestiúhelníka $ABCDEF$; obdobně se sestrojí perspektiva menšího šestiúhelníka. — Protože přímky AD, BC, EF jsou rovnoběžné se základnicí z, jsou podle věty 6 (odst. 1) také jejich perspektivní obrazy s ní rovnoběžné. Sestrojíme si ještě úběžník $Ú$ přímek $AB \parallel CF \parallel DE$; podle věty B (odst. 3) leží bod $Ú$ na horizontále h a sestrojí se podle 2. základní úlohy. Protože však je dolní distančník D^d nepřístupný, užijeme horního distančníku D^h. Potom však musíme sklopit uvedené přímky pod základnici z (věta F); stačí to ovšem provést pro jedinou z těchto přímek, na příklad pro přímku AB. Sklopíme-li však základní rovinu pod základnici z, bude nové sklopení přímky AB souměrně položeno k přímce (A) (B) podle osy souměrnosti z čili bude rovnoběžné s přímkou $(C)(D)$ — jak plyne z toho, že $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník s jednou úhlopříčkou rovnoběžnou se základnicí z. Podle 2. základní úlohy je tedy úběžník $Ú$ v průsečíku horizontály h s přímkou $D^hÚ \parallel (C)(D)$. Protože je však i bod D^h nedostupný, použijeme redukovaného distančníku $D^h/2$, t. j. sestrojíme průsečík $Ú/2$ horizontály h s přímkou vedenou bodem $D^h/2$ rovnoběžně k přímce (C) (D). Sestrojíme-li potom na polopřímce $HÚ/2$ bod $Ú$ tak, aby $\overline{HÚ} = 2\overline{HU'/2}$, dostaneme hledaný úběžník $Ú$. (Použili jsme konstrukce úběžníku vyložené v odst. 3 v textu k obr. 15.) Protože by však v obr. 29 vyšel bod $Ú$ mimo rámec sazby, není v obrázku vyznačen. (Stejně bychom sestrojili úběžník přímek $CD \parallel BE \parallel FA$, který však vychází dost daleko vně nákresny.)

Nyní snadno sestrojíme perspektivní obrazy jednotlivých vrcholů šestiúhelníků. Chceme-li na příklad sestrojit obraz středu S obou obrazců, proložíme bodem (S) sklopenou hloubkovou přímku (kolmo k základnici z), určíme její stopník N a její obraz NH. Bod S' je v průsečíku přímky NH s perspektivním obrazem $M\acute{U}$ úhlopříčky SC šestiúhelníka; stopník M této úhlopříčky je v průsečíku přímky $(S)(C)$ se základnicí z. Při konstrukci pamatujeme na to, že jest $A'D' \parallel B'C' \parallel E'F' \parallel z$ (jak jsme dokázali hned na počátku výkladu).

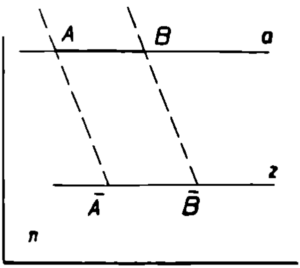
Perspektivní obraz V' vrcholu V jehlanu $VABCDEF$ sestrojíme podle 3. základní úlohy; přitom za úběžník $\acute{U}$ zvolíme na příklad hlavní bod H. Je tedy potom $N\overline{V} \perp z$ a délka úsečky $N\overline{V}$ je rovna výšce jehlanu; bod V' je průsečík přímky $H\overline{V}$ se svislým průmětem výšky, který prochází průmětem S' středu S podstavy jehlanu.

Poznámka. Často potřebujeme sestrojit v perspektivě půdorysu nějakého objektu obrazy úseček nanášených na některou vodorovnou přímku. Můžeme postupovat tak, že naneseme tyto úsečky na sklopenou polohu dané přímky a potom sestrojíme podle 1. základní úlohy perspektivní obrazy takto získaných bodů. Výhodnější je však řešit tuto úlohu přímo v perspektivním obraze (bez sklápění základní roviny). Řešení této úlohy provádíme dvojím způsobem podle toho, je-li daná vodorovná přímka *průčelná* (t. j. rovnoběžná se základnicí) anebo je-li *neprůčelná* (t. j. sice vodorovná, ale protínající základnici). Protože se v perspektivě tyto dvě úlohy často vyskytují, označíme je jako další dvě základní úlohy.

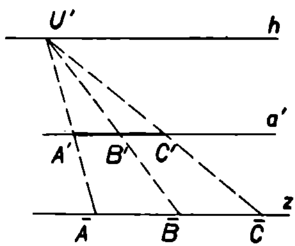
4. základní úloha. Na průčelnou vodorovnou přímku a naneste od daného bodu A dvakrát za sebou danou délku n.

Rovina π proložená přímkou a kolmo k průmětně ν je vodorovná a tedy ji můžeme zvolit za základní rovinu; její průsečnice s průmětnou je tedy základnice z. (Předpokládáme ovšem, že rovina π neprochází okem O; o tomto zvláštním případě se zmíníme až na konec.) Protože je $a \parallel \nu$, $a \parallel \pi$ (neboť leží v π), je podle poučky XII (odst. 1) také $a \parallel z$. Proložíme-li tedy dvěma body A, B přímky a libovolné dvě rovnoběžky ležící v základní rovině π a protínající základnici v bodech $\bar{A}$, $\bar{B}$, jest obrazec $A\bar{A}\bar{B}B$ rovnoběžník a tedy úsečky AB, $\bar{A}\bar{B}$ jsou stejně dlouhé (obr. 30).

Z toho plyne ihned řešení naší úlohy (obr. 31). Podle věty 6 (odst. 1) je $a' \parallel z$ a podle věty B (odst. 3) mají průměty rovnoběžek $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ společný úběžník $Ú$, ležící na horizon-



Obr. 30.



Obr. 31.

tále h. Protože směr těchto přímek můžeme volit libovolně a protože každý bod horizontály h je úběžníkem nějakého směru základní roviny, můžeme bod $Ú$ volit na horizontále libovolně. Zvolíme tedy na horizontále h úběžník $Ú$ a sestrojíme bod $\bar{A}$ jako průsečík přímky $U'A'$ se základnicí z. Protože základnice z leží v průmětně, jeví se na ní všechny délky ve skutečné velikosti; proto naneseme od bodu $\bar{A}$ na základnici z dvakrát danou délku n. Tím dostaneme body $\bar{B}$, $\bar{C}$; průsečíky B', C' přímky a' s přímkami $U'\bar{B}$, $Ú\bar{C}$ jsou průměty hledaných bodů B, C.

Poznámka. Podle věty o úměrnosti úseček vyťatých třemi různoběžkami na dvou rovnoběžkách (která se dokazuje v geometrii) je z obr. 31 patrno, že platí:

$$\overline{A'B'} : \overline{B'C'} = \overline{AB} : \overline{BC}.$$

Je-li tedy $\overline{AB} = \overline{BC}$, je také $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Platí tedy věta:

Věta H. Stejně dlouhé úsečky ležící na vodorovné průčelné přímce (t. j. přímce rovnoběžné se základnicí) mají za perspektivní obrazy úsečky, které jsou mezi sebou také stejně dlouhé.

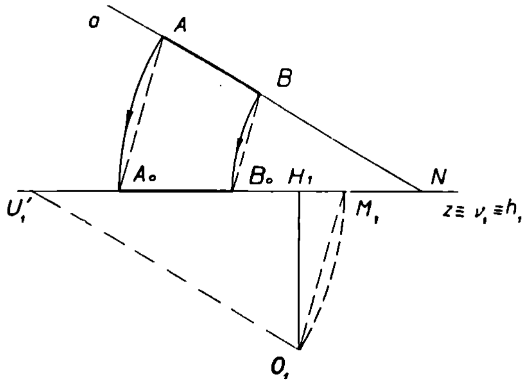
Důsledek. Máme-li tedy sestrojit perspektivní obrazy bodů, které dělí danou vodorovnou průčelnou úsečku AB na n stejných dílů, rozdělíme perspektivní obraz $A'B'$ této úsečky na n stejných dílů; tím dostaneme již obrazy dělících bodů úsečky AB. — Tak na příklad v obr. 29 je bod S' středem úsečky $A'D'$, neboť úsečka AD je rovnoběžná se základnicí.

Poznámky. 1. Z řešení 4. základní úlohy také plyne, jak sestrojíme naopak skutečnou velikost vodorovné průčelné úsečky AB, je-li dán její perspektivní obraz $A'B' \parallel z$. Popište a odůvodněte tuto konstrukci. — 2. Konstrukce provedená v obr. 31 ovšem selže, bude-li přímka $a \parallel z$ ležet v rovině procházející okem. V tom případě však ji provedeme pro půdorys a_1 této přímky a pak sestrojíme (na svislých přímkách) obrazy dělících bodů z jejich perspektivních půdorysů. V prostoru je totiž $a \parallel a_1$, takže $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.

5. základní úloha. Na neprůčelnou vodorovnou přímku a (t. j. přímku protínající průmětnu) naneste od daného bodu A danou délku n.

Rovina π proložená přímkou a kolmo k průmětně ν je vodorovná; prochází-li okem, zvolíme jinou základní rovinu $\pi' \parallel \pi$, sestrojíme v ní půdorys a_1 přímky a, pro který úlohu rozřešíme, a pak přeneseme na přímku a (viz minulou poznámku).

Předpokládejme tedy, že vodorovná rovina π proložená přímkou a neprochází okem O; zvolíme-li ji za základní rovinu, bude její stopa $z \parallel h$ základnicí. Sestrojme na této rovině π půdorys O_1 oka O a půdorys ν_1 průmětny ν. Protože perspektivní průmětna $\nu \perp \pi$, je ν_1 přímka splývající se základnicí z, která je také půdorysem horizontály h (obr. 32). Protože přímka a leží v π, splývá se svým půdorysem a_1, který proto označíme jen a. Na přímce a je dána úsečka AB



Obr. 32.

o délce n a je vyznačen její průsečík N s perspektivní průmětnou ν. Otočíme-li v základní rovině přímku a kolem jejího stopníku N do základnice z (to můžeme provést dvojím způsobem), otočí se úsečka AB do stejně dlouhé úsečky A_0B_0. Protože $\overline{NA_0} = \overline{NA}$, $\overline{NB_0} = \overline{NB}$, jsou trojúhelníky NA_0A, NB_0B rovnoramenné a mají společný úhel při vrcholu N; je tedy také $\sphericalangle AA_0N = \sphericalangle BB_0N$ čili přímky AA_0, BB_0 jsou rovnoběžné. Můžeme tedy body A_0, B_0 sestrojit také jako průsečíky základnice z s rovnoběžnými přímkami AA_0, BB_0. Určíme-li úběžník těchto rovnoběžek, budeme umět i v perspektivě sestrojit na základnici z úsečku A_0B_0 rovnou dané délce n a potom obraz B' hledaného bodu B.

Úběžník M^a přímek $AA_0 \parallel BB_0$ sestrojíme podle věty 5 (odst. 1) jako průsečík přímky $OM^a \parallel AA_0$ s průmětnou ν; jeho půdorys $M_1{}^a$ je v průsečíku uvedené rovnoběžky s půdorysem ν_1 průmětny ν. Sestrojíme ještě úběžník $\acute{U}$ přímky a ($O_1\acute{U}_1 \parallel a$). Protože přímky OM^a, $O\acute{U}$ jsou vodorovné, jeví se úsečky OM^a, $O\acute{U}$ v půdoryse ve skutečné velikosti. Protože trojúhelníky $OM^a\acute{U}$, AA_0N mají rovnoběžné strany, mají také stejné úhly a jsou tedy podobné. Protože přiřazené strany podobných trojúhelníků jsou úměrné, jest

$$\overline{\acute{U}M^a} : \overline{\acute{U}O} = \overline{NA_0} : \overline{NA}.$$

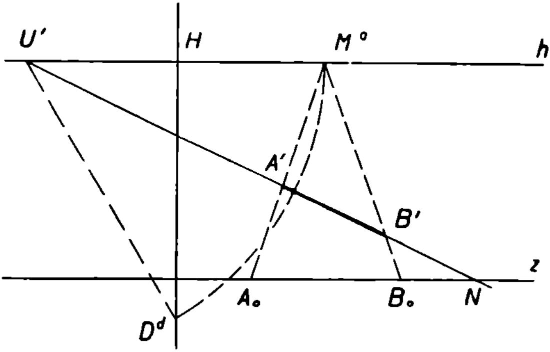
Protože však $\overline{NA_0} = \overline{NA}$, je také $\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}O}$ čili *vzdálenost bodu M^a od úběžníku $\acute{U}$ přímky a je rovna vzdálenosti tohoto úběžníku od oka.* Protože je možné otočit přímku a do základnice z ještě v opačném smyslu než v obr. 32, je možné sestrojit na horizontále h ještě jeden bod M^a, který má také od úběžníku $\acute{U}$ vzdálenost rovnou délce $\acute{U}O$.

Budiž nyní v obr. 33 dán hlavní bod H, horizontála h, dolní distančník D^d a perspektivní obraz a' neprůčelné vodorovné přímky a, která má úběžník $\acute{U}$ a stopník N. Potom přímka $z \parallel h$ proložená bodem N je stopou základní roviny π proloženou přímkou a. Na horizontále h sestrojíme bod M^a tak, aby $\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}O} = \overline{\acute{U}D^d}$, a promítneme z něho daný bod A' do bodu A_0 na základnici z. Na základnici sestrojíme úsečku A_0B_0 rovnou dané délce n a bod B_0 promítneme z bodu M^a na přímku a' do bodu B'. Potom — jak jsme dokázali — jest $A'B'$ obrazem úsečky AB rovné délce úsečky A_0B_0, t. j. rovné délce n.

Bod M^a, jehož jsme použili při řešení úlohy, se jmenuje *měřicí (nebo dělicí) bod přímky a.* Dělicí bod se mu říká proto, že se ho původně používalo ke konstrukci obrazů bodů, které dělí danou úsečku AB na stejné díly. Uvidíme však, že při řešení této úlohy (dělení úseček na stejné díly) bod M^a nepotřebujeme; za to ho potřebujeme pro určení skutečné délky úsečky AB dané perspektivním obrazem $A'B'$ na obraze a' přímky a. Proto je vhodnější říkat bod měřicí;

většinou se však užívá názvu dělicí bod. — Výsledek uvedených úvah vyslovíme větou:

Věta K. Je-li a vodorovná neprůčelná přímka se stopníkem N a úběžníkem Ú, potom na horizontále h jsou dva body M^a, $\overline{M}^a$ *(měřicí čili dělicí body přímky a), ze kterých se promítá*



Obr. 33.

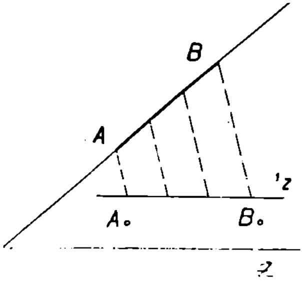
perspektivní obraz A'B' každé úsečky AB ležící na přímce a do úsečky A_0B_0 *na základnici z tak, že* $\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$. — *Každý měřicí bod má od úběžníku Ú přímky a vzdálenost rovnou vzdálenosti tohoto úběžníku od oka O, t. j.* $\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}\overline{M}^a} =$
$= \overline{\acute{U}O} = \overline{\acute{U}D^h} = \overline{\acute{U}D^d}$.

Poznámka. Protože rovnoběžné neprůčelné přímky mají společný úběžník, mají také společné měřicí body. — Z konstrukce také plyne, že měřicí body hloubkových přímek jsou pravý a levý distančník.

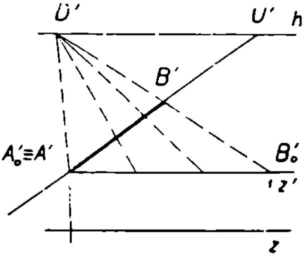
Ještě ukážeme, jak se sestrojují perspektivní obrazy bodů dělících danou vodorovnou neprůčelnou úsečku *AB* na stejné díly.

6. základní úloha. Sestrojte perspektivní obrazy bodů, které dělí danou vodorovnou neprůčelnou úsečku *AB* na *n* stejných dílů.

Proložíme-li přímkou a vodorovnou rovinu π, protne průmětnu v přímce $z \parallel h$. Promítneme-li v rovině π danou úsečku AB, ležící na přímce a a rozdělenou na n stejných dílů, i s dělícími body do libovolné přímky $^1z \parallel z$ (obr. 34), dostaneme úsečku A_0B_0 rozdělenou rovněž na n stejných dílů (jak víme z geometrie). Protože podle důsledku věty H se



Obr. 34.



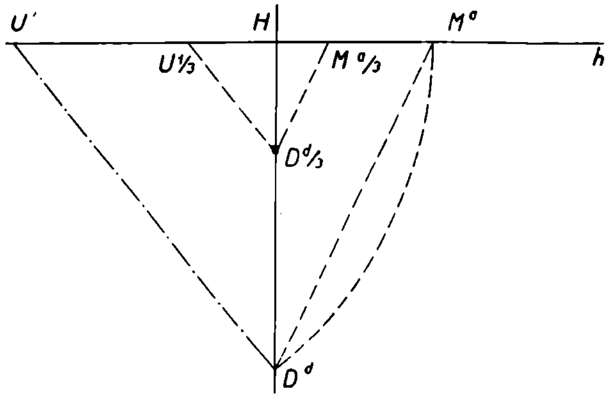
Obr. 35.

dělící body průčelné vodorovné úsečky A_0B_0 promítají v perspektivě do bodů dělících průmět $A_0'B_0'$ této úsečky rovněž na stejné díly, můžeme naši úlohu řešit takto (obr. 35): z libovolného bodu D' (úběžníku směru $AA_0 \parallel BB_0$) na horizontále h promítneme obraz $A'B'$ úsečky AB na přímku $^1z' \parallel z$ do úsečky $A_0'B_0'$, tu rozdělíme na žádaný počet stejných dílů a dělící body promítneme z bodu D' na úsečku $A'B'$. — Přímku $^1z'$ jsme v obr. 35 zvolili výhodně tak, aby procházela bodem A'.

Pomocné konstrukce. Zbývá ještě ukázat, jak sestrojíme měřicí bod M^a vodorovné neprůčelné přímky a, je-li její úběžník $\acute{U}$ nedostupný, respektive jak řešíme 5. základní úlohu v případě, kdy leží měřicí bod M^a mimo nákresnu.

1. Je-li úběžník $\acute{U}$ přímky a nedostupný, ale měřicí bod M^a leží v nákresně, můžeme jej sestrojit pomocí redukce distance. Předpokládejme, že v obr. 36 je dán dolní distančník D^d, úběžník $\acute{U}$ přímky a a její měřicí bod M^a ($\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}D^d}$).

Sestrojme redukovaným dolním distančníkem $D^d/3$ ($\overline{HD^d/3} = \frac{1}{3}\overline{HD^d}$) rovnoběžky s přímkami $D^d Ú$, $D^d M^a$ a jejich průsečíky s horizontálou h označme $Ú/3$, $M^a/3$. Z geometrie je známo, že potom je $\overline{HÚ/3} = \frac{1}{3}\overline{HÚ}$, $\overline{HM^a/3} = \frac{1}{3}\overline{HM^a}$.



Obr. 36.

Protože trojúhelníky $ÚD^dM^a$, $Ú/3D^d/3M^a/3$ jsou podobné, platí o jejich přiřazených stranách úměra:

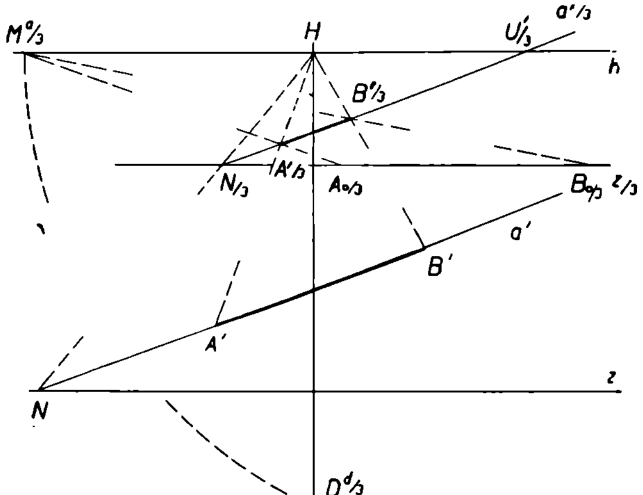
$$\overline{ÚD^d} : \overline{ÚM^a} = \overline{Ú/3D^d/3} : \overline{Ú/3M^a/3}.$$

Protože $\overline{ÚD^d} = \overline{ÚM^a}$, je také $\overline{Ú/3D^d/3} = \overline{Ú/3M^a/3}$. Tedy:

Je-li úběžník Ú přímky a nepřístupný, zredukujeme jej pomocí redukovaného dolního nebo horního distančníku (jak jsme to provedli na př. v obr. 29) t. j. sestrojíme bod Ú/n; potom sestrojíme redukovaný měřicí bod M^a/n ($\overline{Ú/nM^a/n} = \overline{Ú/nD^d/n}$ a konečně měřicí bod M^a ($\overline{HM^a} = n\overline{HM^a/3}$).

2. Neleží-li ani úběžník ani měřicí bod v nákresně, musíme celou konstrukci provést jinak. Obyčejně užíváme stejnolehlosti. Je-li H pevný bod (střed stejnolehlosti) a sestro-

jíme-li ke každému bodu A nějakého geometrického útvaru U na polopřímce HA bod $A/3$ na př. tak, že $\overline{HA/3} = \frac{1}{3}\overline{HA}$, potom každá přímka daného útvaru U přejde v přímku zmenšeného útvaru, která je rovnoběžná s danou přímkou; přitom každá úsečka AB útvaru U přejde v úsečku $A/3$ $B/3$ zmenšeného útvaru, jejíž délka je rovna jedné třetině úsečky AB. Říkáme, že jsme zmenšili daný útvar U v poměru 1 : 3 vzhledem ke středu stejnolehlosti H.



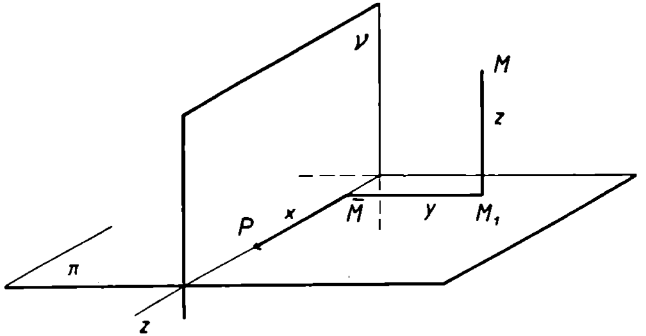
Obr. 37.

Vychází-li tedy dělicí bod M^a přímky a (a třeba i úběžník $Ú$) mimo nákresnu, zmenšíme celý perspektivní obraz v určitém poměru podle hlavního bodu H jako středu stejnolehlosti, provedeme příslušnou konstrukci ve zmenšeném obraze a pak její výsledek přeneseme do původního obrazu. V obr. 37 je tímto způsobem řešena 5. základní úloha; použili jsme přitom poměru stejnolehlosti 1 : 3. Postupujeme obvykle tak, že nejdříve sestrojíme přímku $z/3 \parallel z$ ležící od horizontály h ve vzdálenosti rovné jedné třetině vzdálenosti horizontály od základnice, potom přímku $a'/3 \parallel a'$, na ní bod $A'/3$, redukovaný úběžník $\acute{U}/3$ a pomocí redukovaného dolního distančníku $D^d/3$ redukovaný dělicí bod $M^a/3$. Ve zmenšeném obraze provedeme řešení úlohy a tak dostaneme bod $B'/3$. Hledaný bod B' je potom průsečík přímky a' s přímkou $HB'/3$.

Tato konstrukce je dost složitá a (zejména v malých obrazech) nepřesná. Užíváme jí hlavně, když pracujeme s velkou distancí a ve velké nákresně.

V perspektivě se užívá ještě jiných konstrukcí, jimiž si pomáháme při nepřístupných úběžnících a měřicích bodech. V této knížce, věnované jen základům perspektivy, je ovšem nemůžeme všechny uvádět. Čtenář je nalezne jednak ve jmenované již Perspektivě profesora Kadeřávka, jednak v I. díle učebnice deskriptivní geometrie profesorů Kadeřávka, Klímy a Kounovského; některé jsou též v nové učebnici deskriptivní geometrie pro IV. třídu gymnasií (vydané ve Státním nakladatelství učebnic v Praze r. 1951).

Poznámka. Ve cvičeních následujících za tímto odstavcem je vždy udána poloha předmětů, které se mají zobrazit, vzhledem k základní rovině π a průmětně ν. Každý bod je udán třemi čísly, jímž říkáme souřadnice tohoto bodu a označujeme je x (první souřadnice), y (druhá souřadnice), z (třetí souřadnice). Znak $M(x, y, z)$ znamená, že bod M má souřadnice x, y, z. První dvě souřadnice udávají polohu půdorysu M_1 bodu M v základní rovině, třetí značí vzdálenost bodu M od základní roviny π. Při znázornění bodu M určeného souřadnicemi x, y, z vycházíme od pevně zvoleného bodu P (jemuž se říká počátek) na základnici z (obr. 38). První souřadnici x nanášíme na základnici z od počátku P a to vpravo, je-li $x > 0$, vlevo, je-li $x < 0$. Tak dostaneme na základnici z bod $\overline{M}$; je-li $x = 0$, splyne bod $\overline{M}$ s počátkem P. V bodě $\overline{M}$ sestrojíme v základní rovině π kolmici k základnici z a na ní naneseme od bodu $\overline{M}$ úsečku, rovnou druhé souřadnici y, a to před průmětnu, je-li $y > 0$, za průmětnu, je-li $y < 0$. Tak dostaneme v základní rovině π půdorys M_1 bodu M; je-li $y = 0$, splyne bod M_1 s bodem $\overline{M}$. Třetí souřadnice z udává vzdálenost bodu M od základní roviny π, t. j. délku úsečky M_1M; je kladná pro body ležící nad základní rovinou, záporná pro body pod základní rovi-



Obr. 38.

nou a rovna nule pro body ležící v základní rovině π. Sklopíme-li základní rovinu kolem základnice z do průmětny ν, můžeme ze souřadnic x, y sestrojit sklopený půdorys daného útvaru; protože známe také výšky (t. j. souřadnice z) nad základní rovinou, můžeme sestrojit perspektivu celého útvaru. *Oko O udáváme také souřadnicemi; jeho druhá souřadnice je vždy kladná a udává zároveň distanci, třetí souřadnice znamená výšku oka nad základní rovinou čili udává vzdálenost horizontály od základnice.*

Ve všech cvičeních se má sestrojiti perspektiva daných předmětů; počátek P zvolte vždy na základnici z tak, aby byl stejně vzdálen od levého a pravého okraje papíru. Souřadnice i rozměry vynášejte vždy v centimetrech.

16. Pomník je složen ze tří na sobě položených kvádrů, které mají čtvercové podstavy ve vodorovných rovinách; na nejvýše položeném kvádru stojí pravidelný čtyrboký jehlan, jehož podstava splývá s horní podstavou tohoto kvádru. Všechny tři kvádry mají společnou svislou osu a jejich hrany jsou spolu rovnoběžné. (Pomník je za průmětnou.) Body A (2; 0; 0), B (—7,5; —5,5; 0) jsou vrcholy čtvercové podstavy $ABCD$ nejspodnějšího kvádru, jehož výška je 2. Druhý kvádr má podstavnou hranu 8 a výšku 1,5. Třetí kvádr má pobočnou hranu 5 a výšku 7,5; výška jehlanu je 2. — Oko O (2; 15; 8).
17. Věž má podobu pravidelného šestibokého hranolu a její střecha podobu pravidelného jehlanu (obdobně jako v obr. 29); obě tělesa mají společnou svislou osu, která protíná základní rovinu v bodě S (—4; —6; 0). Hranol má podstavnou hranu o délce 3,5, výšku 10 a stojí vzhledem k průmětně v poloze nárožní (t. j. jedna, středem S procházející úhlopříčka podstavy je kolmá k základnici z). Jehlan je v poloze průčelné (viz konec odst. 3), má hranu podstavy 6 a výšku 8. — Oko O (2; 24; 6).
18. Kříž stojí (za průmětnou) na desce, která má podobu kvádru se čtvercovou podstavou $ABCD$ a výšku rovnou 1. A (—12; —1,5; 0), B (—3,5; 0; 0). Kříž stojí uprostřed desky, má hrany rovnoběžné s hranami desky a skládá se ze dvou kvádrů (svislého a vodorovného); každý z nich má dvě čtvercové stěny o hraně rovné 2,4. Výška celého kříže je 14, výška vrcholu kříže nad vodorovným ramenem je 3,3; vodorovné rameno kříže má délku rovnou délce podstavné hrany desky. — Oko O (0; 24; 7).
19. Schodiště o dvanácti schodech vysokých 12 cm a hlubokých 24 cm. První schod spočívá na základní rovině a má dva přední dolní vrcholy A (—8; —33; 0), B (90; —90; 0). - Oko O (20; 160; 75). Proveďte v měřítku 1 : 10.
20. Podstava pomníku. Základ tvoří čtverec $ABCD$; nad tímto čtvercem je v každém rohu krychle o hraně 3,3. Mezi každé dvě krychle je vloženo čtyřdílné schodiště, každé o třech stejně velkých stupních; čtvrté stupně splývají ve společnou plošinu. Narýsujte jen dvoje přední schodiště. A (2,5; 0; 0), B (—9,5; —4,5; 0), oko O (2,5; 18; 11).