Kružnice

Části 1-10

In: Ota Setzer (author): Kružnice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 4–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402912

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

I. ZÁKLADNÍ MĚŘICKÉ POUČKY.

K dalším výkladům si nejprve zopakujeme některé základní geometrické poučky, které bývají dokazovány již na škole 2. stupně. Omezíme se jen na nejnutnější z nich (u některých uvádím v závorce návod k příslušnému důkazu):

Úhly s rameny rovnoběžnými: **1,1.** Dva úhly, jejichž odpovídající si ramena jsou navzájem rovnoběžná ($a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$) a mají týž smysl, jsou stejně velké. (Rovnoběžným posunutím lze je ztotožniti.)

1,2. Dva úhly s rameny rovnoběžnými, ale opačných smyslů, jsou stejně velké. (Posunutím se převedou na stejně velké vrcholové.)

1,3. Dva úhly s rameny rovnoběžnými, v nichž jedna dvojice ramen má týž smysl a druhá smysl opačný, jsou výplňkové, t. j. jejich součet činí 180°. (Rovnoběžným posunutím přejdou ve výplňkové úhly vedlejší.)

Úhly s rameny kolmými: **1,4.** Dva ostré úhly s rameny navzájem kolmými jsou stejně velké. (Otočením jednoho z nich o 90° kolem jeho vrcholu a pak rovnoběžným posunutím lze oba úhly ztotožniti.)

Úhly v trojúhelníku: **1,5.** Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku měří 180°. (Jedním vrcholem veďte rovnoběžku s protilehlou stranou a užijte věty 1,2!)

1,6. Součet vnějších úhlů v trojúhelníku jest 360°. (Jedním vrcholem veďte rovnoběžku s třetí stranou a užijte opět věty 1,2!)

1,7. Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protilehlých úhlů vnitřních. (Vrcholem vnějšího úhlu se vede rovnoběžka s protilehlou stranou a užije se vět 1,1 a 1,2.)

1,8. Součet dvou stran trojúhelníka je vždy větší než strana třetí.

1,9. V trojúhelníku leží proti většímu úhlu delší strana a naopak proti delší straně větší úhel.

2. JAK VZNIKÁ KRUŽNICE. MEZIKRUŽÍ.

Chce-li zahradník vytvořiti na vodorovné rovině kruhový záhon, zarazí do země ve středu S plánovaného kruhu kolík, upevní na něj motouz délky r, na jehož druhém konci je hrot, jímž může již opisovati obrys svého záhonu – kružnici. Musí však dbáti, aby po celou dobu pohybu byl motouz napjat.

Vzdálenost kteréhokoli bodu na kružnici od jejího středu je tedy stále táž, říkáme jí poloměr a značíme r (od lat. slova radius). Po určité době se vrátí píšící hrot do původní polohy, kružnice jest křivka uzavřená. Plocha, již ohraničuje, je kruh.

Právě tak jako v přírodě, rýsujeme kružnice na papíře kružítkem. Jeden hrot kružítka zůstává stále zabodnut ve středu rýsované kružnice a druhý hrot (s tuhou) opisuje kružnici při neměnné vzdálenosti hrotů.

Z vytvoření kružnice vidíme, že body uvnitř kružnice mají vzdálenost v od jejího středu menší než r (píšeme $v < r$), body vně kružnice jsou od středu vzdáleny více než poloměr ($v > r$) a jenom pro body na kružnici je tato vzdálenost rovna délce poloměru ($v = r$). Uvedenou vlastnost vyjadřujeme pak větou:

2,1. Kružnice jest geometrickým místem bodů,*) které mají od pevného bodu (středu) stálou vzdálenost ($= r$).

Jestliže náš zahradník chce vytvořiti kolem svého záhonu stejně širokou pěšinku šířky δ, prodlouží motouz o úsečku δ na novou délku $R = r + \delta$ a tímto poloměrem opíše kolem téhož středu novou kružnici. Plocha vzniklá mezi oběma kružnicemi je mezikruží. Rozdíl poloměrů je šířka mezikruží: $\delta = R - r$.

Kružnice o témž středu nazýváme soustředné.

Buďtež k_1, k_2 soustředné kružnice o společném středu S a poloměrech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)! Podle definice 2,1 obsahuje kružnice k_1 jen body, které mají od bodu S neměnnou vzdálenost r_1, neleží však na ní žádný bod, který má od S vzdálenost jinou, na př. r_2 a který by proto byl bodem kružnice k_2. Právě tak na kružnici k_2 leží jen body, jejichž

*) Geom. místo bodů jest souhrn všech bodů, které vyhovují určité podmínce a mimo ně žádný jiný bod tuto podmínku nesplňuje.

vzdálenost od bodu S jest r_2. Žádný z bodů kružnice k_2 nemůže proto míti od S vzdálenost r_1. Neexistuje tedy bod, který by ležel současně na obou soustředných kružnicích.

2,2. Dvě soustředné kružnice se neprotínají.

Cvičení:

1. Je dán bod A. a) Narýsujte kružnici, která prochází bodem A a má poloměr 3 cm! b) Kolik je takových kružnic? c) Kde leží středy všech těchto kružnic? d) Narýsujte geom. místo těchto středů!

2. Jsou dány body A, B ve vzdálenosti 5 cm od sebe ($\overline{AB} = 5$ cm). a) Vyhledejte bod C, který má od obou bodů A i B vzdálenost 4 cm ($\overline{AC} = \overline{BC} = 4$ cm)! b) Kolik je takových bodů C, jež vyhovují úloze? c) Jakou polohu mají vzhledem k spojnici AB? d) Jaký obrazec tvoří body A, B, C? e) Sestrojte kružnici, která má střed v C a prochází body A a B!

3. Tutéž úlohu řešte pro bod D, aby $\overline{AD} = \overline{BD} = 3$ cm! a) Můžeme žádati, aby vzdálenost hledaného bodu D od daných bodů byla libovolně velká? b) Jaká je nejmenší možná vzdálenost $\overline{AD}$? c) V jaký obrazec přejde v tomto krajním případě $\triangle ABD$?

4. Podle předchozí úlohy narýsujte několik kružnic (různých poloměrů) svazku kružnic, t. j. kružnic, které jdou dvěma pevnými body A a B! Narýsujte z nich také tu, jež má nejmenší možný poloměr!

5. Narýsujte mezikruží, jehož šířka $š = 2$ cm, víte-li, že má střed v daném bodě S a že jeho vnitřní kružnice jde daným bodem L!

6. Dokažte, že body ležící uvnitř menší kružnice mezikruží leží všechny také uvnitř vnější kružnice! Co platí o bodech, které leží vně větší kružnice mezikruží? Můžeme tvrditi, že body ležící vně menší kružnice leží též vně větší kružnice? O kterých bodech to neplatí?

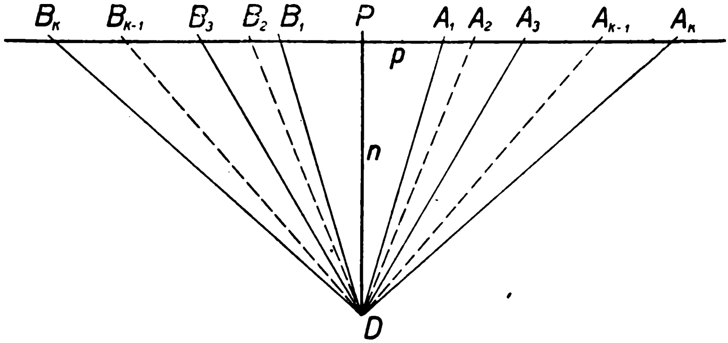
3. KRUŽNICE A PŘÍMKA.

Z daného bodu D spusťme kolmici n na danou přímku p! (Obr. 1.) Patu této jediné kolmice označme P! Na přímku p naneseme oběma směry úsečky: $\overline{PA_1} = \overline{PB_1}$, $\overline{PA_2} = \overline{PB_2}$, $\overline{PA_3} = \overline{PB_3}$, ... $\overline{PA_k} = \overline{PB_k}$ tak, že body A a B s větším indexem mají od P větší vzdálenost:

$$\overline{PA_1} < \overline{PA_2} < \overline{PA_3} < \ldots < \overline{PA_k},\ \overline{PB_1} < \overline{PB_2} < \overline{PB_3} < \ldots < \overline{PB_k}.$$

Ve vzniklých trojúhelnících DA_1A_2, DA_2A_3, DA_3A_4, ... $DA_{k-1}A_k$ jsou $A_2\widehat{A_1}D$, $A_3\widehat{A_2}D$, $A_4\widehat{A_3}D$, ... $A_k\widehat{A}_{k-1}D$ vnějšími úhly pravoúhlých trojúhelníků $A_1PD, A_2PD, \dots A_{k-1}PD$, a proto podle poučky 1,7 tupé. V tupoúhlých trojúhelnících jsou zbývající dva úhly vždy ostré (1,5). V našem případě jsou úhly $A_1\widehat{A_2}D, A_2\widehat{A_3}D, \dots A_{k-1}\widehat{A_k}D$ úhly ostré. Odtud plyne:

$$A_1\widehat{A_2}D < A_2\widehat{A_1}D,\ A_2\widehat{A_3}D < A_3\widehat{A_2}D\ \dots\ A_{k-1}\widehat{A_k}D < A_k\widehat{A_{k-1}}D$$



Obr. 1.

Přihlédneme-li k větě 1,9, odvodíme snadno:

$$\overline{DA}_1 < \overline{DA}_2 < \overline{DA}_3 < \dots < \overline{DA}_{k-1} < \overline{DA}_k.$$

Obdobnou úvahou pro body $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dokážeme:

$$\overline{DB}_1 < \overline{DB}_2 < \overline{DB}_3 < \dots < \overline{DB}_{k-1} < \overline{DB}_k.$$

Ze souměrnosti podle kolmice n kromě toho vyplývá, že kterékoli úsečky $\overline{DA}_i$, $\overline{DB}_i$ jsou pro stejné indexy i stejné: $\overline{DA}_i = \overline{DB}_i$.

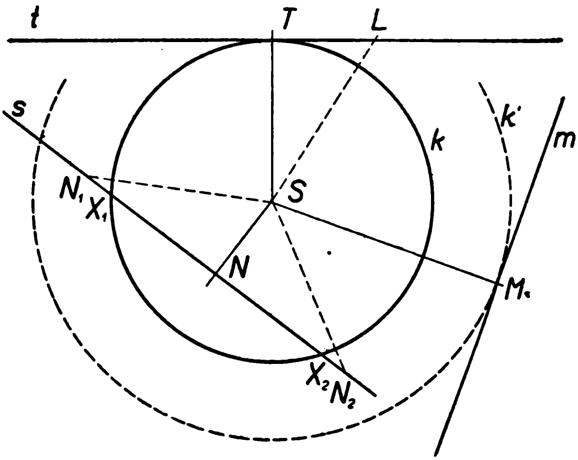
Čím body A (resp. B) na přímce p volíme dále od paty P, tím větší jest jejich vzdálenost od D. Ze všech vzdáleností bodů A od D jest délka kolmice PD nejkratší. Tento poznatek lze vyjádřiti též takto:

Je-li $h < i < k$, pak nutně $\overline{DA}_h < \overline{DA}_i < \overline{DA}_k$.

Uvedených výsledků použijeme nyní při vyšetřování vzájemné polohy kružnice a přímky. (Obr. 2.)

Zvolme si libovolnou přímku t, jejíž vzdálenost v od středu S dané kružnice k se rovná jejímu poloměru r! Tato vzdálenost se nám jeví jako kolmice $\overline{ST}$ spuštěná z bodu S na přímku t. Podle volby přímky

t jest: $v = \overline{ST} = r$. Pata T této kolmice leží podle 2,1 na kružnici k. Zvolíme-li na t libovolný jiný bod L, jest podle předchozího jeho vzdálenost $\overline{SL}$ od středu S vždy větší než $\overline{ST}$: $\overline{SL} > r$, proto bod L leží vně kružnice k. To platí pro všechny body přímky t kromě bodu T, který jediný leží na kružnici k.



Obr. 2.

Přímce, která má s kružnicí jediný společný bod, říkáme **tečna** kružnice, společný bod obou čar jmenujeme bodem **dotykovým**. V našem případě je přímka t tečnou a bod T dotykovým bodem. Vidíme, že k tomu, aby přímka byla tečnou kružnice stačí, když její vzdálenost od středu je rovna poloměru. Přitom je tečna kolmá k poloměru dotykového bodu.

Známe-li střed S kružnice a jednu její tečnu t, spustíme z bodu S kolmici na t, vzdálenost $\overline{ST}$ je již poloměrem hledané kružnice.

Budiž vzdálenost zvolené přímky m od středu S kružnice k větší než její poloměr r! Pata kolmice z bodu S na přímku m je M, pak podle volby $\overline{SM} > r$.

Z týchž důvodů jako prve je vzdálenost kteréhokoli bodu přímky m od středu S větší než délka kolmice $\overline{SM}$ a tím spíše větší než r.

Všechny body přímky m jsou tedy od středu S vzdáleny více než r, leží vně kružnice k, žádný z nich na kružnici. Přímka, která nemá s kružnicí společný bod, jest nesečna kružnice.

V našem případě je přímka m nesečnou kružnice k. Stačilo k tomu, aby měla od středu kružnice vzdálenost větší než poloměr.

Konečně zvolme přímku s ve vzdálenosti $\overline{SN} < r$! Naneseme-li od paty N kolmice na přímku s oběma směry délku poloměru do bodů N_1 a N_2, jest: $\overline{NN_1} = \overline{NN_2} = r$. V pravoúhlých trojúhelnících SNN_1, SNN_2 jest $\sphericalangle SNN_1 > \sphericalangle N_1SN$, $\sphericalangle SNN_2 > \sphericalangle N_2SN$ a podle 1,9: $\overline{SN_1} > \overline{NN_1}$, $\overline{SN_2} > \overline{NN_2}$ čili $\overline{SN_1} > r$, $\overline{SN_2} > r$. Body N_1, N_2 jsou vnějšími body kružnice k. Podle úvahy ze začátku této kapitoly musí na přímce s mezi bodem N, jehož vzdálenost od S je menší než r, a mezi bodem N_1 (resp. N_2), jehož vzdálenost od S je větší než r, ležeti bod X_1 (resp. X_2), jehož vzdálenost od S je právě r. Ze souměrnosti podle SN plyne, že $\overline{NX_1} = \overline{NX_2}$. Body X_1, X_2 jsou průsečíky přímky s s kružnicí k. Přímka, která má s kružnicí dva body společné, je sečna kružnice.

V našem případě přímka s je sečnou kružnice k. Stačilo k tomu, aby její vzdálenost od středu kružnice byla menší než poloměr.

Uvedenými třemi případy jsou všechny možné vzájemné polohy kružnice a přímky vyčerpány.

Shrneme si je v tento přehledný výsledek:

Je-li vzdálenost přímky od středu S kružnice k

$v < r$, je přímka sečna 3,1,
je-li: $v = r$, je přímka tečna 3,2,
je-li: $v > r$, je přímka nesečna .. 3,3.

Sečna kružnice ji protíná jen ve dvou bodech X_1, X_2. Kdyby ji protínala ještě v 3. bodě X_3, pak by podle 2,1 $\overline{SX_3} = r$, rovnoramenné trojúhelníky X_1SX_2, X_2SX_3 by měly základny v téže přímce s a jedno rameno společné (na př. $\overline{X_2S}$). Součet úhlů při základně $S\widehat{X_2}X_1$ a $S\widehat{X_2}X_3$ (jež jsou v rovnoramenných trojúhelnících vždy ostré), by byl úhel přímý, což jest nemožné, a proto:

3,5. Žádné tři body kružnice neleží v přímce.

Úsečka, kterou na sečně vytíná kružnice, jest tětiva. V případě, že sečna jde středem kružnice ($v = 0$), stává se tětiva průměrem.

Označujeme jej d (od řec. slova diametros): $d = 2r$. Jinak platí podle obrázku: $\overline{X_1X_2} < \overline{X_1S} + \overline{SX_2}$, $\overline{X_1X_2} < 2r$.

3,6. Průměr jest nejdelší tětivou kružnice.

Cvičení:

7a. Narýsujte několik kružnic, které se dotýkají dané přímky t v daném bodě T (po obou jejích stranách)! b) Co je geom. místem středů těchto kružnic?

8. Co vyplňují středy všech kružnic, které mají poloměr $r = 2$ cm a dotýkají se dané přímky t? Narýsujte toto geom. místo bodů!

9. Dané přímky a, b svírají úhel 60°. Sestrojte kružnici poloměru $r = 1$ cm, která se dotýká přímek a i b!

10. Sestrojte kružnici poloměru $r = 2$ cm, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky a (vzdálenost A od a volte 3 cm)!

11. Narýsujte mezikruží, jehož jedna kružnice se dotýká dané přímky a v daném bodě A (A na a) a jehož druhá kružnice se dotýká jiné dané přímky b v bodě B (B na b)!

12. Dvě přímé trati svírají úhel 135°. Jsou spojeny kruhovým obloukem poloměru 400 m. Narýsujte v měřítku 1 : 20 000!

13. Na dané kružnici určete bod, který jest nejdále od dané tětivy kružnice!

14. Cirkusový stan kruhového půdorysu leží stranou přímé silnice. Určete graficky, v kterém místě jest vchod, aby byl nejblíže silnici!

15. Dána kružnice $k(S, 4\text{ cm})$ a bod $A(\overline{AS} = 7\text{ cm})$. Sestrojte kružnici k', která má střed v bodě A a půlí kružnici k!

4. DVĚ KRUŽNICE.

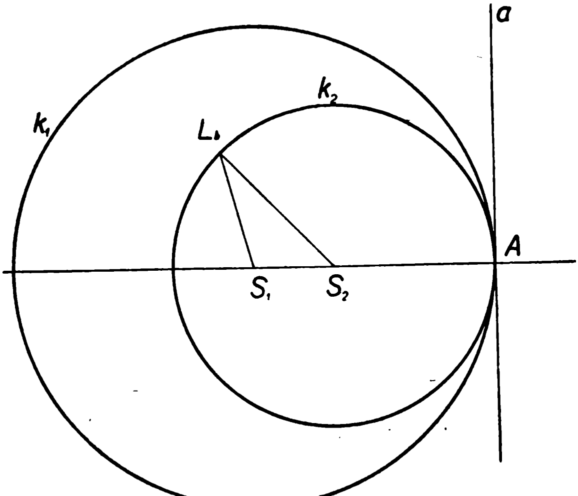
Zkoumejme vzájemnou polohu dvou kružnic k_1, k_2 o různých středech S_1, S_2 a různých poloměrech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)! Spojnici $\overline{S_1S_2}$ jmenujeme střednou (centrálou) a její délku označíme c. Tato délka c může vzhledem k poloměrům r_1, r_2 nabývati postupně těchto hodnot:

a) $0 < c < r_1 - r_2$, b) $c = r_1 - r_2$, c) $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$,
d) $c = r_1 + r_2$, e) $c > r_1 + r_2$.

Jiných možností není, neboť případ $c = 0$ jsme již probrali při soustředných kružnicích.

Zvolíme-li si v případě a) na kružnici k_2 libovolný bod L_a, jest podle definice $\overline{S_2L_a} = r_2$ a podle naší podmínky $\overline{S_1S_2} < r_1 - r_2$, proto $\overline{S_1S_2} + \overline{S_2L_a} < r_1$, v $\triangle S_1S_2L_a$ jest podle 1,8: $\overline{S_1L_a} < \overline{S_1S_2} + \overline{S_2L_a}$ a tím spíše: $S_1L_a < r_1$, čili ktorýkoli bod kružnice k_2 má od S_1 vzdálenost menší než r_1, leží proto uvnitř kružnice k_1, celá kružnice k_1 leží uvnitř k_2, kružnice nemají společný bod, neprotínají se.

b) Budiž: $c = r_1 - r_2$ (Obr. 3.)! Od bodu S_2 naneseme na prodlouženou spojnici S_1S_2 délku r_2 do bodu A (na opačnou stranu než je bod S_1). Podle konstrukce leží bod A na $k_2(\overline{S_2A} = r_2)$, podle dané podmínky: $S_1A = c + r_2 = r_1$, bod A leží také na k_1. Obě kružnice mají



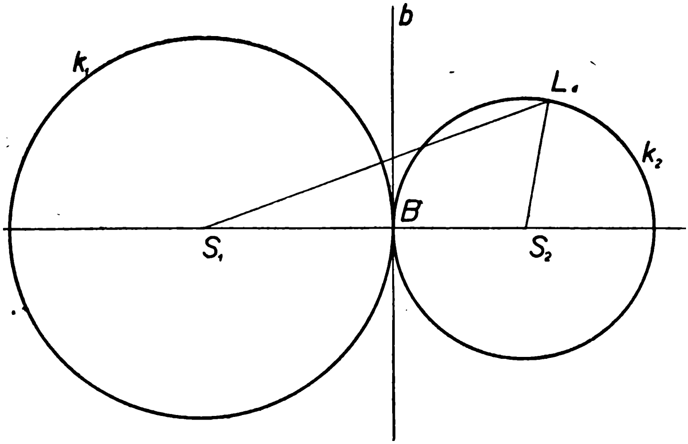
Obr. 3.

společný bod A a jak vyplývá z vlastnosti tečny, též společnou tečnu a v bodě A. Každý jiný bod L_b na kružnici k_2 má od středu S_1 vzdálenost menší než r_1, neboť:

$$\overline{S_1L_b} < \overline{S_1S_2} + \overline{S_2L_b},\ \overline{S_1L_b} < r_1 - r_2 + r_2,\ \overline{S_1L_b} < r_1.$$

Každý bod kružnice k_2 (kromě A) leží uvnitř kružnice k_1.

Dříve než budeme vyšetřovati polohu c), zabývejme se případem d) $c = r_1 + r_2$ (Obr. 4)! Naneseme-li od středu S_2 směrem k S_1 úsečku r_2, leží koncový bod B této úsečky na kružnici k_2 ($\overline{S_2B} = r_2$), ale podle sestrojení také na k_1, neboť: $\overline{S_1B} = \overline{S_1S_2} - \overline{S_2B} = c - r_2 = r_1 + r_2 - r_2 = r_1$. Obě kružnice mají společný bod B a také tečna b vedená v něm kolmo k $\overline{S_1S_2}$ jest společná.



Obr. 4.

Kterýkoli jiný bod L_d kružnice k_2 má od středu S_1 vzdálenost větší než r_1:

$$\overline{S_1L_d} + \overline{S_2L_d} > \overline{S_1S_2},\ \overline{S_1L_d} + r_2 > r_1 + r_2,\ \overline{S_1L_d} > r_1$$

proto všechny ostatní body kružnice k_2 (kromě bodu B) leží vně kružnice k_1.

V obou případech b) i d) měly obě kružnice jeden společný bod (dotykový) a v něm společnou tečnu kolmou k středné. Říkáme, že se navzájem dotýkají. V případě b) leží obě tyto kružnice po téže straně společné tečny, mají vnitřní dotyk, dotýkají se zevnitř. V případě d) leží po různých stranách společné tečny, dotýkají se zevně, mají vnější dotyk.

c) Z polohy b) jsme mohli přejíti do polohy d), kdybychom byli posunuli kružnici k_2 ve směru $\overrightarrow{S_1S_2}$ o délku $2r_2$. Označujeme-li průsečíky středné a pohybující se kružnice k_2 stále A_i a B_i, zůstává při tomto ohraničeném pohybu ($r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$) bod A_i stále vnějším a bod B_i stále vnitřním bodem kružnice k_1. Chceme-li přejíti od vnitřního bodu B_i k vnějšímu bodu A_i po horní půlkružnici k_2, musíme nutně v některém bodě X_1 překročiti kružnici k_1, volíme-li dráhu z A_i do B_i po dolní půlkružnici k_2, musíme ze stejného důvodu přejíti kružnici k_1 v dalším bodě X_2. Obě kružnice se protínají ve dvou bodech.

S tímto výsledkem přímo souvisí známý poznatek, že ze tří úseček r_1, r_2, c lze vždy sestrojiti trojúhelník, platí-li: $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$. e) Je-li konečně $c > r_1 + r_2$, neboli $c - r_2 > r_1$ a je-li L_e libovolný bod kružnice k_2 ($\overline{S_2L_e} = r_2$), pak podle 1,8 platí: $\overline{S_1L_e} + \overline{S_2L_e} > \overline{S_1S_2}$, $\overline{S_1L_e} + r_2 > c$, $\overline{S_1L_e} > c - r_2$ a tím spíše $\overline{S_1L_e} > r_1$. Všechny body kružnice k_2 leží vně kružnice k_1.

Cvičení.

16. Trojúhelník ABC má strany $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm. Kolem jeho vrcholů jsou opsány kružnice $k_1(A, r_1 = 1 \text{ cm})$, $k_2(B, r_2 = 3 \text{ cm})$, $k_3(C, r_3 = 5 \text{ cm})$. Jaká je vzájemná poloha těchto tří kružnic?

17. Kolem vrcholů trojúhelníka z předešlého příkladu jsou opsány kružnice k_4 $(A, r_4 = 9 \text{ cm})$, k_5 $(B, r_5 = 5 \text{ cm})$, k_6 $(C, r_6 = 3 \text{ cm})$. Určete vzájemnou polohu kružnic k_4, k_5, k_6!

18. a) Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice k $(S, r = 4 \text{ cm})$ v jejím bodě T α) vně, β) uvnitř! b) Kolik je takových kružnic? c) Sestrojte geom. místo středů těchto kružnic!

19. Kde leží středy kružnic poloměru $r = 1$ cm, které se dotýkají dané kružnice k $(S, r_1 = 4 \text{ cm})$? Narýsujte toto geom. místo bodů!

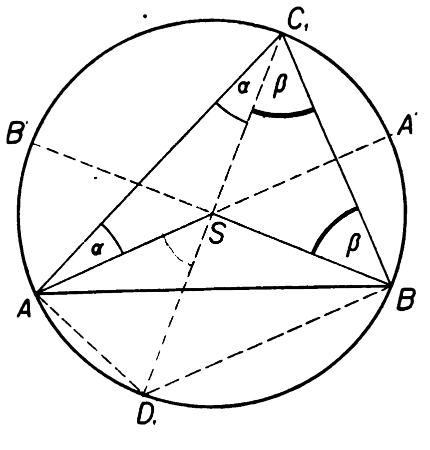
5. OBVODOVÉ ÚHLY V KRUŽNICI.

Koncové body libovolné tětivy $\overline{AB}$ spojme se středem S (obr. 5)! Poloměry SA, SB svírají úhel $A\hat{S}B$, jehož vrchol leží ve středu kružnice. Budeme jej nazývati úhel středový. Spojujeme-li naproti tomu jednotlivé body obvodu kružnice s koncovými body A, B naší tětivy, vznikají úhly obvodové, na př. $A\hat{C_1}B$, $A\hat{C_2}B$ ... Všimněme si jednoho z nich, třeba úhlu $A\hat{C_1}B$! Spojnice jeho vrcholu C_1 se středem S protne kružnici po druhé v bodě D_1. Trojúhelníky AC_1S a BC_1S jsou rovnoramenné ($\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = r$), proto jejich úhly při základně jsou stejně velké:

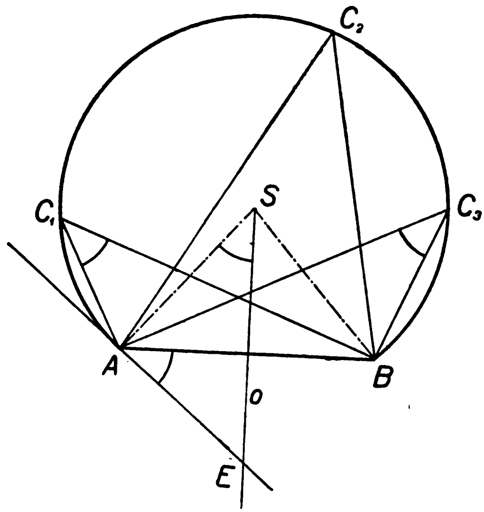
$$S\hat{A}C_1 = S\hat{C_1}A = \alpha, \quad S\hat{B}C_1 = S\hat{C_1}B = \beta.$$

Úhel $\widehat{D_1SA}$ je vnějším úhlem $\triangle ASC_1$, proto se rovná součtu dvou protilehlých úhlů vnitřních (podle 1,7): $\widehat{D_1SA} = \widehat{SAC_1} + \widehat{SC_1A}$. Oba sčítanci na pravé straně rovnice jsou stejní, proto: $\widehat{D_1SA} = 2 \, . \, \widehat{SC_1A}$. Obdobně odvodíme z $\triangle BSC_1 : \widehat{D_1SB} = 2 \, . \, \widehat{SC_1B}$. Sečtení obou rovnic vede ke vztahu: $\widehat{D_1SA} + \widehat{D_1SB} = 2 \, . \, (\widehat{SC_1A} + \widehat{SC_1B})$, což nám podle obrázku dává závislost mezi úhly: $\widehat{ASB} = 2 \, . \, \widehat{AC_1B}$.

Stejnou úvahu můžeme provésti pro libovolný bod $C_2, C_3, \ldots$ na obvodě kružnice, pokud ho volíme mezi body A', B'. Pro obvodové úhly, jejichž vrcholy leží na kružnici mezi body A a B' nebo A' a B, postupujeme při důkazu stejně, jenom sčítání rovnic nahradíme odčítáním. Výsledek jest stále týž:



Obr. 5.



Obr. 6.

5,1. Středový úhel se rovná dvojnásobnému úhlu obvodovému nad týmž obloukem.

Protože k témuž jedinému středovému úhlu kružnice přísluší více obvodových úhlů nad týmž obloukem, musí býti všechny tyto obvodové úhly navzájem stejně velké.

5,2. Všechny obvodové úhly nad týmž obloukem kružnice jsou stejně velké.

Nahradíme-li tětivu $\overline{AB}$ průměrem, přejde středový úhel v přímý (180°) a příslušný obvodový úhel, který je jeho polovinou, bude pravý.

5,3. Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

Tento důležitý poznatek je znám v geometrii již velmi dlouho. Ponejprv jej vyslovil řecký filosof a matematik Thales z Miletu (v 6. stol. před Kr.). Podle něho nazýváme právě dokázanou poučku větou Thaletovou.

Použijeme-li Thaletovy věty v našem obrazci pro průměr $\overline{C_1D_1}$, vidíme, že úhly $C_1\widehat{A}D_1$ a $C_1\widehat{B}D_1$ jsou pravé. Protože součet vnitřních úhlů ve čtyrúhelníku AD_1BC_1 je 360° (součet úhlů ve dvou trojúhelnících), a dva z nich jsou pravé, musí součet zbývajících dvou býti 180°. Z toho plyne, že úhly $AD_1\widehat{}B$ a $AC_1\widehat{}B$ jsou výplňkové (jejich součet jest 180°).

5,4. Obvodové úhly nad touž tětivou, jejichž vrcholy leží po různých stranách tětivy, jsou výplňkové.

Chceme-li naopak sestrojiti vrcholy všech úhlů dané velikosti γ, jejichž ramena jdou pevnými body A a B, sestrojíme (obr. 6) při tětivě $\overline{AB}$ v bodě A úhel γ, zvaný úsekový, k jeho druhému rameni t vedeme kolmici a vyhledáme její průsečík S s osou úsečky $\overline{AB}$. Poloměrem $\overline{SA}$ opíšeme nad tětivou $\overline{AB}$ kruhový oblouk. Ze dvou možných oblouků zvolíme při ostrém úhlu γ větší, při tupém γ menší z nich. Pro naše úhly plyne z konstrukce: $A\widehat{S}E = E\widehat{A}B$ (úhly s rameny navzájem kolmými) a podle dokázané věty: $AC_1\widehat{}B = AC_2\widehat{}B = \frac{1}{2}A\widehat{S}B = A\widehat{S}E = E\widehat{A}B = \gamma$, čímž dokázáno, že úsekový úhel (sevřený tětivou a tečnou kružnice v jejím koncovém bodě) se rovná příslušnému úhlu obvodovému a tím potvrzena správnost konstrukce.

Cvičení:

20. Z kterého bodu se jeví strany trojúhelníka ABC ($a = 10$ cm, $b = 9$ cm, $c = 8$ cm) v témž zorném úhlu?

21. Čelní fronta budovy obdélníkového půdorysu ($a = 60$ m, $b = 40$ m) jeví se pozorovateli v zorném úhlu $\alpha = 22\frac{1}{2}°$, bočná fronta v zorném úhlu

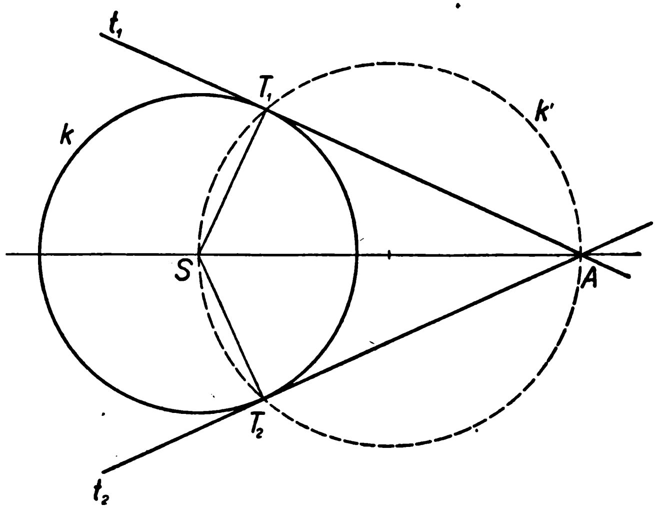
$\beta = 30°$. Určete graficky (měř. 1 : 2000), jak daleko stojí pozorovatel od rohu budovy (úloha Pothenotova)!

22. Dán obdélník a přímka, která jej seče. Stanovte na ní bod, z něhož se jeví úhlopříčky obdélníka v témž zorném úhlu!

6. SPOLEČNÉ TEČNY KRUŽNIC.

Věty Thaletovy lze s výhodou užíti při řešení úlohy: Ke kružnici k veďte z bodu A tečny (obr. 7)!

Protože hledané tečny jsou kolmé k příslušným poloměrům, převádí se naše úloha na sestrojení pravoúhlých trojúhelníků ST_1A a ST_2A, které mají přeponu v úsečce $\overline{AS}$ a vrchol pravého úhlu na dané



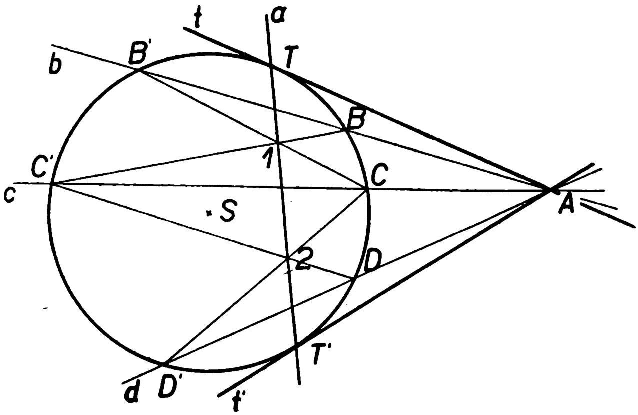
Obr. 7.

kružnici k. Stačí, když nad průměrem $\overline{AS}$ sestrojíme pomocnou kružnici k' a vyhledáme její průsečíky T_1, T_2 s kružnicí danou. Spojnice $\overline{AT_1}$ a $\overline{AT_2}$ jsou hledané tečny t_1, t_2. Ze shodnosti obou trojúhelníků vyplývá rovnost úseček $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$.

6,1. Z bodu mimo kružnici lze k ní vésti dvě stejně dlouhé tečny.

Předchozí úlohu lze řešiti i jinak, a to pouhým pravítkem (obr. 8):

Bodem A vedeme ke kružnici k tři libovolné sečny b, c, d. Jejich průsečíky s kružnicí jsou postupně: B, B' — C, C' — D, D'. Spojíme-li průsečíky *1*, *2* úhlopříček ve vzniklých čtyrúhelnících $BCC'B'$, $CDD'C'$, protíná tato spojnice a kružnici k ve dvou bodech T, T'. Spojnice $t = AT$, $t' = AT'$ jsou hledané tečny, body T, T' příslušné dotykové body. Důkaz této konstrukce by vyžadoval znalost projektivní geometrie.



Obr. 8.

Chceme-li zobraziti dvě kola $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ spojená napjatým řemenem a točící se **stejným** směrem, musíme sestrojiti takové přímky, které se současně dotýkají obou kružnic k_1 i k_2. Tyto přímky jsou **společné** tečny kružnic k_1, k_2 (obr. 9).

Je-li $r_1 > r_2$, sestrojíme nejprve pomocnou kružnici k' kolem středu S_1 poloměrem $r_1 - r_2$. Ze středu S_2 vedeme k ní tečny t_1', t_2'. Přímky t_1 a t_2 s nimi rovnoběžné ve vzdálenosti r_2 (na opačné straně od S_1) jsou **vnější společné tečny**.

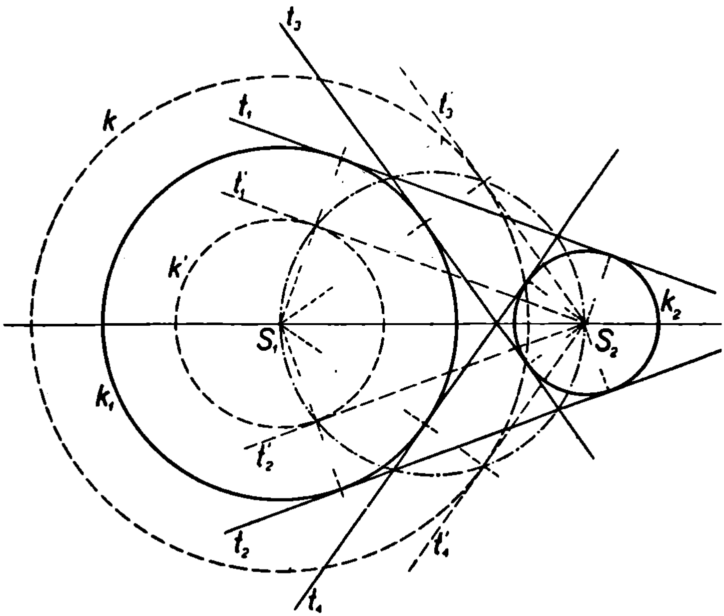
Kdyby se měla kola točiti **opačným** směrem, použili bychom řemene zkříženého. V obraze by to byly **vnitřní společné tečny**.

K jejich sestrojení použijeme pomocné kružnice k'' kolem středu S_1 poloměrem $r_1 + r_2$. Ze středu S_2 vedeme k ní tečny t_3'', t_4''. Hledané tečny t_3, t_4 jsou s nimi rovnoběžné ve vzdálenosti r_2 (směrem k S_1).

Cvičení:

23. Dána kružnice $k(S, 4\text{ cm})$ a bod $A(\overline{AS} = 7\text{ cm})$. Sestrojte kružnici k', která má střed v A a protíná kružnici k kolmo (tečny v průsečném bodě jsou kolmé)!

24. Na dané přímce p určete bod, z něhož se daná kružnice k $(S, 4\text{ cm})$ jeví v zorném úhlu $\alpha = 30°$!

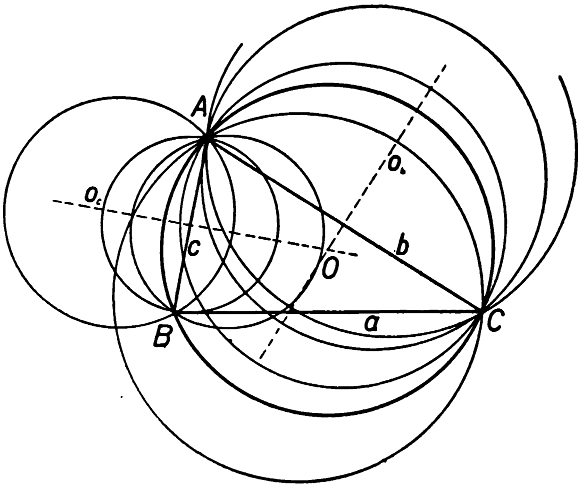


Obr. 9.

7. KRUŽNICE A TROJÚHELNÍK.

Vedeme-li půlícím bodem S_c dané úsečky $c = \overline{AB}$ k ní kolmici o_c, jest přímka o_c osou souměrnosti úsečky c a každý její bod C_i jest od obou koncových bodů A a B stejně vzdálen, o čemž se snadno přesvědčíme překlápěním pravoúhlých trojúhelníků ASC_i kolem osy o_c do shodných trojúhelníků BSC_i. Body C_i lzo považovati za středy kružnic poloměrů $\overline{C_iA} = \overline{C_iB}$, které procházejí současně body A i B. Kružnice, jdoucí dvěma pevnými body A, B, tvoří s v a z e k k r u ž n i c (viz př. 4, kap. 2). Zvolme si třetí bod C, který neleží na přímce AB! S body A, B tvoří trojúhelník ABC. Body A, C je určen jiný svazek kružnic, jejichž středy leží na ose o_b úsečky $b = \overline{AC}$. Snadno nahlédneme, že lze sestrojiti kružnici, která patří do obou svazků. Je to kružnice k jdoucí všemi třemi body A, B, C (obr. 10). Říkáme jí kružnice trojúhelníku ABC opsaná, trojúhelník jest jí vepsán. Střed opsané kružnice O leží v průsečíku os stran o_c a o_b a má od všech tří vrcholů stejnou vzdálenost r:

$\overline{AO} = \overline{BO} = r$ (vlastnost bodů osy o_c),
$\overline{AO} = \overline{CO} = r$ (vlastnost bodů osy o_b), odtud také:
$\overline{BO} = \overline{CO} = r$ (vlastnost bodů osy o_a).



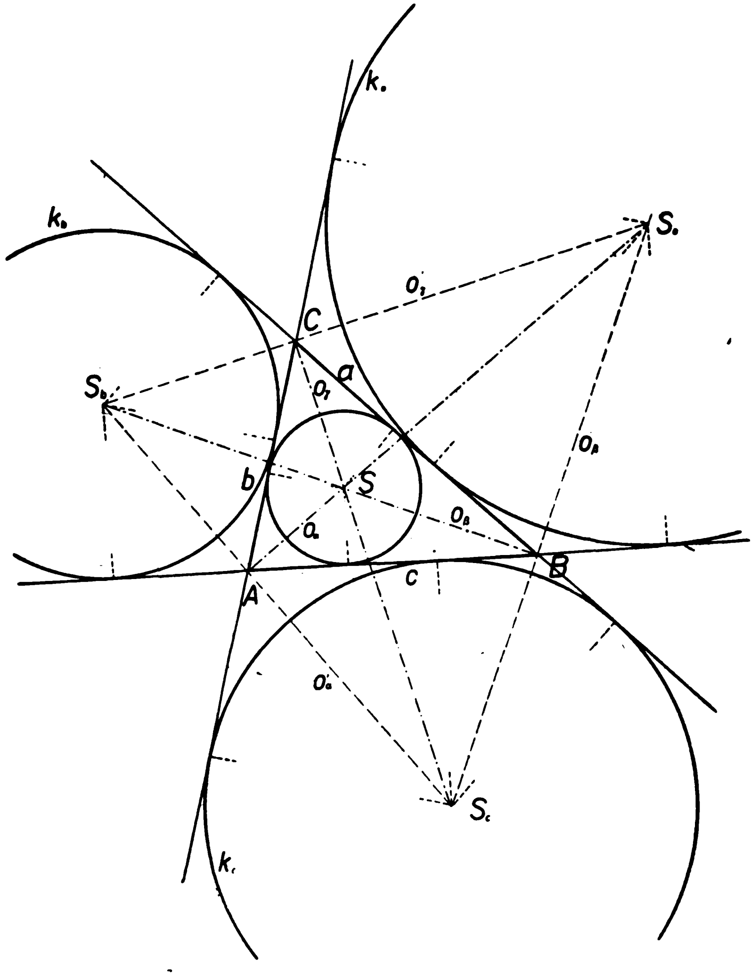
Obr. 10.

Bod O leží i na třetí ose o_a úsečky $\overline{BC}$. Tuto osu není třeba při hledání středu O sestrojovati.

7,1. Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané.

Tato kružnice jest jen jedna, protože dvě přímky (o_b, o_c) se protínají jen v jednom bodě.

Položme si nyní úlohu, nalézti uvnitř daného trojúhelníka ABC bod S, který je od všech tří jeho stran stejně vzdálen (obr. 11)! Rozpůlíme-li vnitřní úhel $\gamma = \widehat{ab}$ přímkou o_γ ($\widehat{ao_\gamma} = \widehat{bo_\gamma}$), má každý bod C_i této osy souměrnosti stejnou vzdálenost od obou ramen a i b. Je středem kružnice, která se dotýká přímky a i b. Poloměr této kružnice je délka kolmice spuštěné z bodu C_i na a nebo b. Právě tak body



Obr. 11.

(uvnitř $\triangle$), stejně vzdálené od stran a, c leží na ose o_β vnitřního úhlu $\beta = \widehat{ac}$ a jsou středy kružnic, které se dotýkají stran a a c. Jediný průsečík S os o_β, o_γ má ode všech tří stran trojúhelníka stejnou vzdálenost, je tedy středem kružnice, jež se dotýká všech jeho stran. Jest to kružnice trojúhelníku vepsaná, trojúhelník jest jí opsán. Obdobně jako prve usoudíme, že také osa o_α vnitřního úhlu α jde bodem S.

7,2. Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané.

Kdybychom sestrojovali osy vždy dvou vnějších úhlů, na př. o_α', o_β', byl by jejich průsečík S_c vně trojúhelníka, ale též stejně vzdálen od všech tří jeho stran. Bod S_c je středem kružnice poloměru ϱ_c, která se dotýká strany c a prodloužených stran a a b, jest trojúhelníku připsána. V průsečících S_a os o_β', o_γ' a S_b os o_α', o_γ' vnějších úhlů jsou středy dalších dvou připsaných kružnic poloměrů ϱ_a, ϱ_b.

Cvičení:

25. Jsou dány body A, B, C, D (žádné dvě jejich spojnice nejsou rovnoběžné). Narýsujte mezikruží, jehož jedna kružnice jde body A, B a druhá body C, D!

26. Když jsme narýsovali kružnici, ztratili jsme její střed. Pomozte nám jej nalézti! Vám se ovšem tato nehoda nestane, protože si jistě vyznačíte střed kružnice dříve, než ji začnete rýsovati.

27. Do kruhové výseče ($r = 6$ cm, $\alpha = 45°$) vepište kružnici!

28. Narýsujte půdorys věnce 12 shodných po dvou se vzájemně dotýkajících kuliček ložiska, jehož vnější poloměr $R = 8$ cm!

29. Do mezikruží, jehož vnitřní poloměr $r = 5$ cm, vepište 8 navzájem se dotýkajících shodných kružnic!

30. Plynojem kruhového půdorysu se jeví ze vzdálenosti 60 m ve vodorovném zorném úhlu $\alpha = 30°$. Určete graficky v měřítku 1 : 1000 délku jeho průměru!

31. Do rovnostranného trojúhelníka ($a = 10$ cm) vepište tři kružnice, z nichž každá se dotýká dvou stran trojúhelníka a zbývajících dvou kružnic! Tato úloha ve zcela obecném případě (různostranný trojúhelník) je označována jako Malfattiho problém a řeší se složitými konstrukcemi.

32. Ověřte si pokusně tuto — velmi zjednodušenou — větu Ponceletovu: Jsou-li kružnice k_1 a k_2 v takové poloze, že existuje trojúhelník ABC do kružnice k_1 vepsaný a současně kružnici k_2 opsaný, pak trojúhelníků této vlastnosti je nekonečně mnoho!

33. Hřiště má tvar rovnoramenného lichoběžníka (základny $a = 38$ m, $c = 25$ m, výška $v = 42$ m). Na jeho obvodě je běžecká dráha, jejíž vnější hranici tvoří části ramen b a d a dva kruhové oblouky, které se dotýkají obou ramen a vždy jedné základny. Narýsujte v měř. 1 : 500 a zjistěte odtud délku přímé části dráhy!

8. APOLLONIOVA KRUŽNICE.

Dvěma trojúhelníkům $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, jejichž odpovídající si úhly jsou stejně velké ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$) říkáme podobné.

O nich — jak bude dokázáno v jiném svazku této sbírky — platí poučka:

8,1. V podobných trojúhelnících jsou odpovídající si strany v témž poměru ($a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$) a naopak:

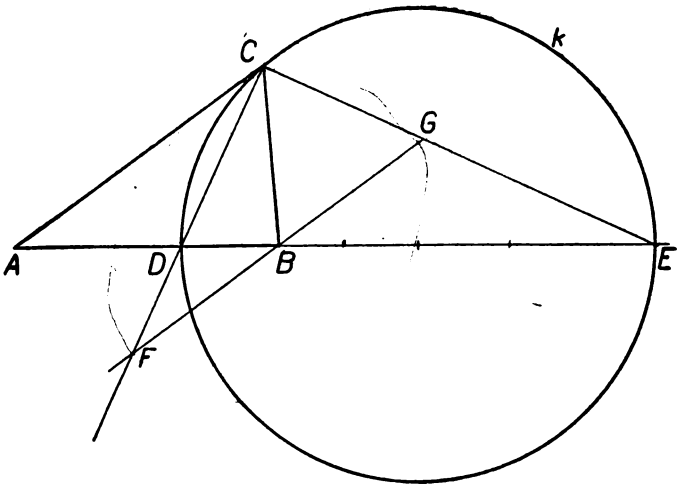
8,2. Jsou-li ve dvou trojúhelnících odpovídající si strany úměrné, jsou trojúhelníky podobné a mají tudíž navzájem stejné úhly.

Nyní k vlastní úloze: Sestrojiti geom. místo bodů, jejichž vzdálenosti od dvou daných bodů A a B jsou v daném poměru $p : q$! ($p > q$). Nejprve si určíme na spojnici AB body D a E, vyhovující naší podmínce. Rozdělíme-li úsečku $\overline{AB}$ na $p + q$ stejných dílů, leží bod D v koncovém bodě p dílu (počítáno od A), rozdělíme-li ji na $p - q$ stejných dílů a nanášíme-li tyto díly od A přes B, jest koncový bod p dílu hledaným bodem E. Nad průměrem $\overline{DE}$ sestrojíme kružnici, která se nazývá Apolloniova (obr. 12).

Spojme libovolný bod C_i této Apol. kružnice s body A, B, D, E! Protože úsečka $\overline{DE}$ jest jejím průměrem, jest podle Thaletovy poučky úhel $D\widehat{C_i}E$ pravý. Nyní vedeme bodem B rovnoběžku se spojnicí AC_i. Tato rovnoběžka protne spojnice C_iD a C_iE v bodech F a G. Protože podle 1,1 a 1,2 úhel $C_i\widehat{A}D = G\widehat{B}E = D\widehat{B}F$, jsou trojúhelníky ADC_i a BDF podobné, právě tak, jako trojúhelníky AEC_i a BEG. Odpovídající si strany jsou proto úměrné: $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC_i} : \overline{BF}$, $\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{AC_i} : \overline{BG}$. Podle konstrukce je poměr na levých stranách obou úměr týž ($p : q$), proto i poměry na pravých stranách jsou tytéž:

$$\overline{AC_i} : \overline{BF} = \overline{AC_i} : \overline{BG} = p : q,$$

což lze splniti jen, když: $\overline{BF} = \overline{BG}$. V pravoúhlém trojúhelníku FGC_t je bod B středem přepony a současně tedy středem opsané kružnice, proto: $\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{BC_t}$.



Obr. 12.

Dosadíme-li tento výsledek do předchozí úměry, dostaneme konečně:

$$\overline{AC_t} : \overline{BC_t} = p : q.$$

Každý bod Apol. kružnice má od bodů A a B daný poměr vzdáleností $p : q$.

Kdybychom však při téže volbě bodů A, B, D, E volili bod C_1 mimo Apol. kružnici, platily by všechny předchozí úvahy beze změny až na podmínku o velikosti úhlu $D\widehat{C_t}E$, který by nebyl pravý, a proto v tomto případě $\overline{BF} = \overline{BG} \neq \overline{BC_t}$, úsečky $\overline{AC_t}$, $\overline{BC_t}$ nejsou v poměru $p : q$.

8,3. Apolloniova kružnice je geometrickým místem bodů, které mají od dvou pevných bodů stálý poměr vzdáleností.

Tato kružnice má své jméno od řeckého matematika Apollonia z Pergy, který žil v Alexandrii kolem r. 200 př. Kr. a proslavil se řešením četných úloh o kružnici i o jiných kuželosečkách (elipse, hyperbole, parabole).

Cvičení:

34. V trojúhelníku ABC ($\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm) určete na výšce v_c bod D, jehož vzdálenosti od A a B jsou v poměru $2 : 1$!

35. Tři místa A, B, C tvoří trojúhelník o stranách $\overline{AB} = 9$ km, $\overline{BC} = 10$ km, $\overline{AC} = 12$ km. Určete (v měř. 1 : 100 000) uvnitř trojúhelníka bod D, do něhož dorazí současně z A chodec, jdoucí přímou pěšinou 6 km/hod., z B povoz, jedoucí přímou cestou 10 km/hod. a z C cyklista, jedoucí přímou silnicí 15 km/hod., vyrazili-li v tomtéž okamžiku!

36. Mezikruží kruhového terče (1, 2, 3,..., 10) měla šířku rovnou vnitřnímu poloměru. Byl-li zásah na rozhraní dvou polí, počítal se již do vnitřního (lepšího) pole. Po třech ranách zjistil střelec, že má po jedné desítce (bod A), devítce (B) a osmičce (C), vždy jen těsně. Když chtěl později ve střelbě pokračovat, shledal, že terč zmizel, zbyly jen otvory A, B, C ve dřevě. Jak nalezne střed terče a jednotlivé kružnice?

37. Vedoucí umístil na hřišti 3 družstva žáků takto: I. (10 ž.) v bodě A, II. (8 ž.) v bodě B a III. (12 ž.) v bodě C. ($\overline{AB} = 30$ m, $\overline{AC} = 24$ m, $\overline{BC} = 28$ m). Při hře musí 1. členové družstva doběhnouti k metě D a vrátiti se na své místo, pak běží další, až se všichni vystřídají. Kde vytýčí vedoucí metu, aby tato hra o závod byla spravedlivá (1 : 400)?

9. KŘIVKY SLOŽENÉ Z KRUHOVÝCH OBLOUKŮ.

Vhodným spojováním kružnic, které se dotýkají zevně nebo zevnitř, můžeme vytvořiti různé křivky buď uzavřené nebo ubíhající do nekonečna.

Ve všech obrazcích této kapitoly jest střed kruhového oblouku označen touž číslicí jako příslušný oblouk. Kruhové oblouky rýsujte podle obrázků v pořadí číslic!

Ovál: Základní čtyrúhelník *1324* (obr. 13) je kosočtverec. Ovál nesmíme zaměňovat s elipsou, jíž se velmi podobá.

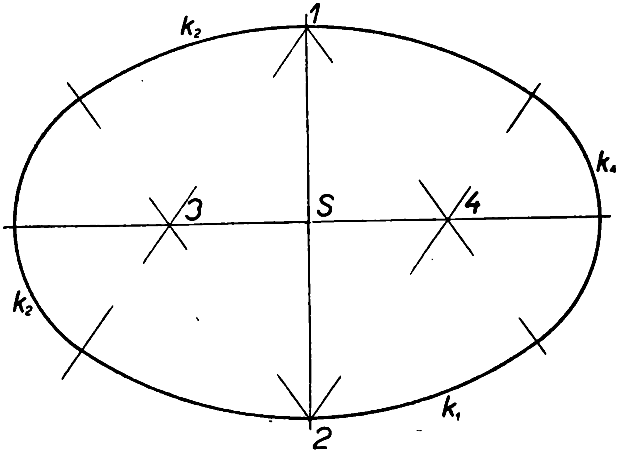
Vejcovka: Viz obr. 14!

Trojlist (obr. 15), který jest základním obrazcem gotických kružeb, má za základ rovnostranný trojúhelník *123* a kruhové oblouky stejných poloměrů.

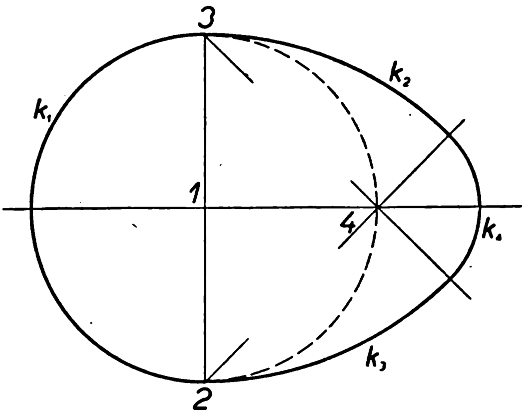
Závitnice (spirála): Půlkružnice nad přímkou p (obr. 16) mají střed v bodě *1*, dolní půlkružnice v bodě *2*. Bod *2* může býti v koncovém bodě první horní půlkružnice.

Vlnovka: Vyšrafované rovnoramenné trojúhelníky v obr. 17 jsou shodné.

Zvláštní případ nastane, když body *1234* ... jsou v jedné přímce, oblouky přejdou v půlkružnice.



Obr. 13.



Obr. 14.

Cvičení:

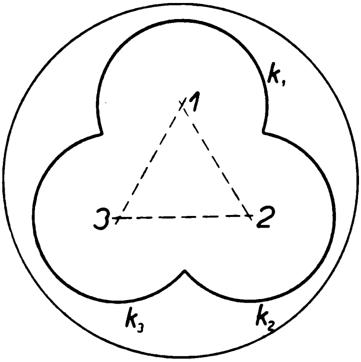
38. Narýsujte ovál v případě, že trojúhelník **234** jest rovnostranný ($a = 4$ cm)!

39. Narýsujte trojlist, jehož kružnice se navzájem dotýkají!

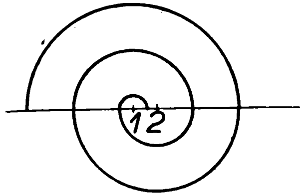
40. Zobrazte ve skutečné velikosti část profilu svinovací záclony (rolety) z vlnitého plechu, jestliže na 1 bm plechu připadá 25 polovln vysokých 1 cm!

41. Bruslař kreslí na ledě „osmičky“ složené ze dvou stejně velkých kružnic, které se navzájem dotýkají. Jak velká může býti n a n e j v ý š tato osma na čtvercovém kluzišti o straně 35 m? Narýsujte v měřítku 1 : 500!

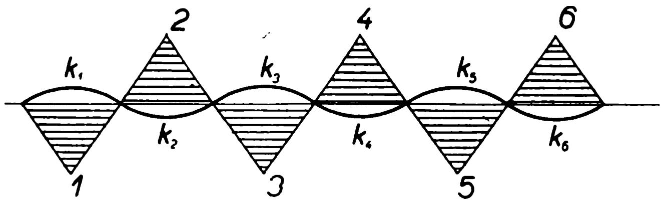
42. Dán čtverec $ABCD$ ($\overline{AB} = 1$ cm). Sestrojte spirálu, složenou ze čtvrtkružnic! První má střed A, poloměr $\overline{AD}$, druhá má střed B, další C atd.



Obr. 15.



Obr. 16.



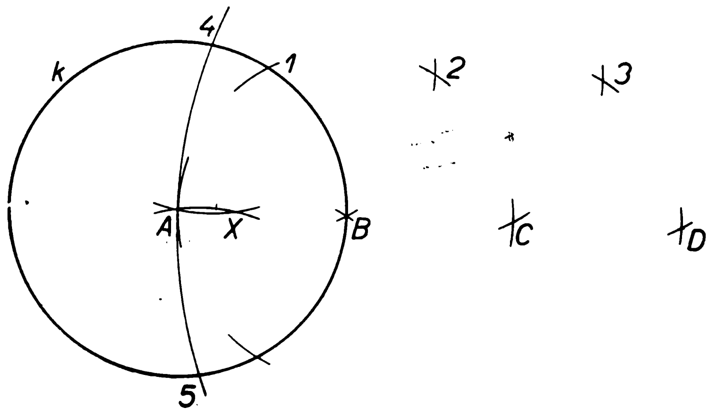
Obr. 17.

10. MASCHERONIHO ÚLOHY.

Přesnost, s jakou narýsujeme kružnici, závisí na správném zabodnutí hrotu kružítka do jejího středu a na rozevření kružítka tak, aby druhý hrot měl od středu správnou vzdálenost r. Naproti tomu při rýsování přímky musíme hranu pravítka, která nebývá vždy ideálně rovná, přiložiti ke dvěma daným bodům přímky a pak vésti podle ní rýsovací pero tak, aby jeho hrot měl vzhledem k pravítku touž polohu po celou dobu rýsování přímky. Jeví se nám tedy rýsování úseček (hlavně delších) méně přesné než rýsování kružnic. Tato okolnost vedla geometry k myšlence, aby prováděli geometrické konstrukce pokud možno jen kružítkem.

Dánský matematik Georg Mohr věnoval část své knihy Euklides Danicus (1672) těmto konstrukcím. Soustavně se však jimi zabýval italský matematik Lorenzo Mascheroni v knize Geometria del Compaso (1797), kde dokázal, že všechny úlohy, které se sestrojují pravítkem a kružítkem, lze prováděti pouhým kružítkem. Podle něho nazýváme úlohy tohoto druhu mascheronské. Na ukázku z nich provedeme tyto:

Danou úsečku $\overline{AB}$ násobiti celým číslem (v obr. 18 třemi):



Obr. 18.

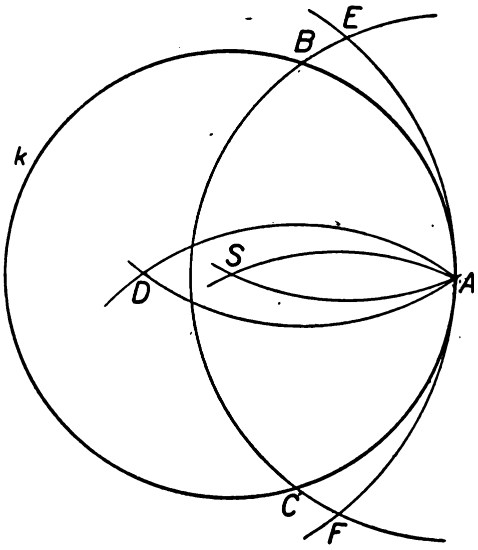
Podle obrazce sestrojujeme kruhové oblouky týchž poloměrů $r = \overline{AB}$, trojúhelníky $AB1$, $12B$, $BC2$, $23C$ a $CD3$ jsou rovnostranné, $\overline{AD} = 3 \,.\, \overline{AB}$.

Nalézti $1/n$ dané úsečky (v témž obr. $\frac{1}{3}$):

Předešlou konstrukcí sestrojíme nejdříve trojnásobnou úsečku $\overline{AD} = 3 \,.\, \overline{AB}$, kolem D opíšeme kruhový oblouk poloměrem $\overline{DA}$, jeho průsečíky $4{,}5$ s kružnicí k jsou středy dalších dvou oblouků o poloměru $\overline{4A} = \overline{4X}$ resp. $\overline{5A} = \overline{5X}$, jež se protnou v bodě X. Úsečka $\overline{AX} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$. Správnost plyne z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků $AD4$ a $A4X$, které mají společný úhel při základně $DA4$. Jejich příslušné strany jsou úměrné:

$$\overline{AX} : \overline{A4} = \overline{A4} : \overline{AD}, \quad \text{neboli} \quad \overline{AX} : \overline{AB} = r : 3r = 1 : 3.$$

Nalézti neznámý střed S narýsované kružnice k (obr. 19):



Obr. 19.

Postupně rýsujeme kruhové oblouky (první písmeno značí střed kružnice, uvedená úsečka její poloměr): 1. $AB = AC = AE = AF$ (bod A i poloměr $\overline{AB}$ libovolný), 2. $BA = BD$, 3. $CA = CD$, 4. $DA = DE = DF$, 5. $EA = ES$, 6. $FA = FS$. Důkaz vyplývá z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ADF a AFS, po př. ABD a ASB.

Do kružnice k vepsati pravidelný mnohoúhelník (obr. 20):

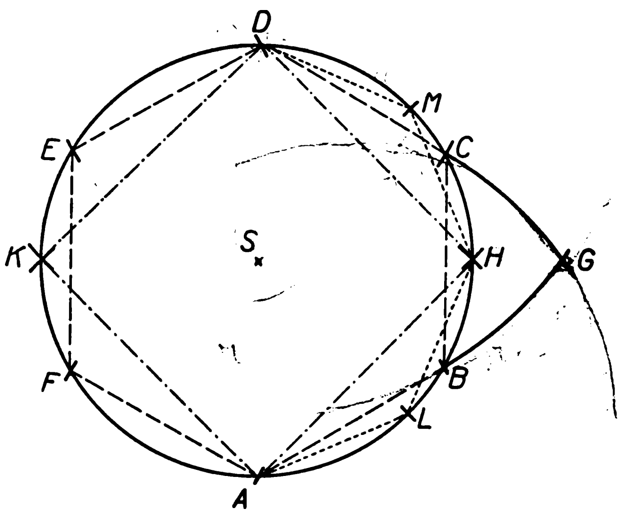
Poloměr r lze nanésti na obvod kružnice k celkem šestkrát. Strany vepsaného pravidelného šestiúhelníka jsou proto:

$$a_6 = r = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots = \overline{FA}.$$

Vepsaný rovnostranný **trojúhelník** dostaneme spojováním ob jeden vrchol:

$$a_3 = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{EA}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku ACD jest: $\overline{AD} = 2r$, $\overline{CD} = r$ a podle Pythagorovy věty: $a_3 = \overline{AC} = r\sqrt{3}$.



Obr. 20.

Kruhové oblouky $AC = AG$ a $DB = DG$ se protínají v bodě G. V pravoúhlém trojúhelníku ASG jest: $\overline{AS} = r$, $\overline{AG} = r\sqrt{3}$ a opět podle Pythagorovy věty: $\overline{SG} = r\sqrt{2} = a_4$, což je délka strany vepsaného **čtverce**. Kruhové oblouky $AH = AK = SG$ opsané kolem A vytknou na kružnici k zbývající vrcholy čtverce $AHDK$.

Přetneme-li kružnici k kruhovým obloukem opsaným kolem G poloměrem r v bodech L, M, vznikne čtverec $SLGM$ a v něm úhel GSL měří 45°.

Proto úsečky $\overline{AL} = \overline{LH} = \overline{HM} = \overline{MD} = \dots$ jsou stranami vepsaného pravidelného **osmiúhelníka**.