O logaritmech a logaritmických tabulkách

Části 1-10

In: Vítězslav Jozífek (author): O logaritmech a logaritmických tabulkách. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 4–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402885

I. MOCNINY A ODMOCNINY

Mocnina je součin několika sobě rovných činitelů, na př.: $a \cdot a \cdot a = a^3$. Každý ten činitel se jmenuje mocněnec nebo základ mocniny, počet činitelů se jmenuje mocnitel nebo také exponent. a^3 je třetí mocnina čísla a, říkáme: a^3 dostaneme, umocníme-li číslo a na třetí.

Mocniny stejnojmenné jsou takové, které mají stejný základ a stejný exponent. Jen takové umíme slučovat. Píšeme-li exponent také obecně znakem x, při čemž x je číslo celé a kladné, naznačíme obecně slučování výrazem:

$$ka^x \pm la^x = (k \pm l)\, a^x.$$

Znásobme si $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$. Společný základ umocníme součtem exponentů. Umíme také násobit $a^3 \cdot b^2$?

Ze součinu odvodíme snadno podíl:

$$a^3 \cdot a^2 = a^5, \; a^5 : a^3 = a^2.$$

Podobně umocňujeme mocniny:

$$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6; \; (a^3)^2 = a^{3 \cdot 2}.$$

Vyslovte si sami pravidla pro tyto početní výkony.

Obecný zápis:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \; a^x : a^y = a^{x-y}; \; (a^x)^y = a^{xy}.$$

Dělme dvě stejnojmenné mocniny:

$$a^3 : a^3 = a^0 = 1.$$

Vidíme, že $1 = a^0 = b^0 = c^0$; kde základ je rozdílný od nuly.

Máme-li podíl: $\frac{1}{a^x}$ a rozepíšeme-li ho: $1 : a^x = a^0 : a^x = a^{0-x} = a^{-x}$, dostaneme mocninu se záporným exponentem $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Tu převedeme na mocninu s kladným exponentem, umocníme-li reciprokou hodnotu základu kladným exponentem.

Tak také umocníme:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^x.$$

Početní výkony s mocninami se zápornými exponenty provádíme podle týchž pravidel jako s mocninami o exponentech kladných. Proveďte si sami odůvodnění podle naznačeného příkladu:

$$a^{-3} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

Odmocninou nazýváme na př. výraz $\sqrt[3]{8}$; znak $\sqrt{\ }$ je odmocnítko, číslo 8, které odmocňujeme je odmocněnec, číslo 3, kterým odmocňujeme je odmocnitel. Odmocňování je obrácený výkon k umocňování. Je-li dána rovnice: $2^3 = 8$, platí zároveň, že $2 = \sqrt[3]{8}$. Obecně psáno: $x^3 = 8$, x vypočítáme odmocněním 8, t. j.: $x = \sqrt[3]{8}$ a čteme: x rovná se třetí odmocnině osmi (ne z osmi). Třetí odmocnina má vždy tři hodnoty, z nichž budeme uvažovat v pojednání jen reálnou hodnotu, t. j. kladné dvě. Při sudých odmocninách, t. j. takových odmocninách, kde odmocnitelem je sudé číslo, uvažujeme jen kladnou reálnou hodnotu odmocniny. (Na př. hodnoty $\sqrt[4]{16}$ jsou dvě reálné čísla, ± 2, a dvě hodnoty, které nedovedeme dosud vyjádřit.)

Z vlastností odmocnin si pamatujme:

a) Každá odmocnina jedné je jedna: $\sqrt[n]{1} = 1$, pokud uvažujeme jen reálnou, kladnou hodnotu odmocniny.

b) Jedna jako odmocnitel nemá významu; dvě jako odmocnitele nevypisujeme a píšeme prostě: $\sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$.

c) Umocníme-li odmocninu odmocnitelem, dostaneme odmocněnce: $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$, $(\sqrt[3]{2^3})^3 = 2^3$.

d) V našich pojednáních budeme uvažovat jen odmocniny kladných odmocněnců.

e) Zatím dovedeme jen určit hodnotu odmocniny, kde odmocněnec je mocnina s exponentem rovným odmocniteli; na př.: $\sqrt[3]{2^3}$ neboť podle c) $(\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{2^3} = 2$, obecně: $\sqrt[x]{c^x} = c$.

f) Hodnota odmocniny, kde odmocněnec není mocninou žádného čísla celého nebo lomeného s exponentem, který se rovná odmocniteli nebo jeho násobku je číslo tak zvané irracionální, t. j. nekonečný desetinný zlomek neperiodický. Tak na př. uvažovaným odmocněncem při druhé odmocnině je každé číslo, které není druhou mocninou celého nebo lomeného čísla. $\sqrt{2} = 1{,}4142186\ldots$, ale $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$. $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

g) Pokusme se vyjádřit odmocninu, v které je odmocněncem nějaká mocnina, na př.: $\sqrt[3]{a^2}$, mocninou se základem a. Exponent bude neznámý, a označme si ho znakem x, takže máme: $\sqrt[3]{a^2} = a^x$. Umocněme rovnici $\sqrt[3]{a^2} = a^x$ odmocnitelem 3 a obdržíme: $a^2 = a^{3x}$. Poněvadž se sobě rovnají obě mocniny $a^2 = a^{3x}$ o společném základu a, budou se rovnat i exponenty, takže platí: $2 = 3x$, odtud: $x = \frac{2}{3}$ a odmocninu vyjádříme: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. Obecněji: $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$. Které číslo je čitatelem exponentu, a které jmenovatelem?

Přesvědčme se, že věta platí i pro případ, kdy exponent je násobkem odmocnitele, na příklad: $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

h) Pro početní výkony s mocninami, které mají lomený exponent platí totéž pravidlo, jako pro mocniny s exponentem celým.

2. LOGARITMUS O ZÁKLADU 2

Pojem logaritmu vysvětleme si nejdříve na mocninách o základu 2. Základ 2 volíme proto, že známe hodně malých čísel, které jsou mocninami čísla 2.

Sledujme nejprve podle připojené tabulky hodnoty mocnin čísla 2.

V hořením řádku jsou exponenty, v dolejším hodnoty příslušných mocnin.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Z těchto hodnot užitím vět o početních výkonech s mocninami plyne:

$16 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1024$ $\qquad 256 \cdot \frac{1}{16} = 2^8 \cdot 2^{-4} = 2^4 = 16$

$1024 : 256 = 2^{10} : 2^8 = 2^2 = 4$ $\qquad 64 : \frac{1}{32} = 2^6 : 2^{-5} = 2^{11} = 2048$

$8^3 = (2^3)^3 = 2^9 = 512$ $\qquad (\frac{1}{8})^3 = (2^{-3})^3 = 2^{-9} = \frac{1}{512}$

$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4;$ $\sqrt[3]{\frac{1}{512}} = (2^{-9})^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$

Uvedené početní výkony se omezují ovšem jen na čísla uvedená v hoření tabulce.

Vypočítejte podle návodu: $16 \,.\, 32$; $512 : 64$; $128 : \frac{1}{8}$; $\frac{1}{512} \,.\, 32$; $\sqrt[4]{256}$; $\sqrt[7]{128}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$; 64^2; 16^2.

Z příkladů vidíme, že s uvedenými čísly můžeme si usnadnit početní výkony tím, že čísla převedeme na mocniny o základu 2, provedeme s nimi početní výkony a zpět určíme hodnotu výsledné mocniny. Všimli jste si jistě, že násobení čísel převádíme na sčítání exponentů, dělení na odčítání, umocňování na násobení, odmocňování na dělení exponentů.

Exponenty jsou v našich úvahách velmi důležité, a nazýváme je pro tyto výkony logaritmy o základu 2 (t. j. základu naší mocniny). Máme tedy při mocnině $2^4 = 16$: exponent 4 se jmenuje logaritmus čísla 16 o základu 2, a znamená to, že musíme umocnit základ 2 logaritmem čísla 16, abychom dostali toto číslo. Možno říci obecněji: Základ 2 umocněn logaritmem daného čísla dá nám dané číslo. A píšeme: $4 = \log_2 16$, obecně: $a = 2^x$; $x = \log_2 a$ a čteme x je logaritmus čísla a o základu 2. Všimněme si ihned, že i zde vycházíme z rovnice $2^4 = 16$, ale neznámá není základ, nýbrž exponent, tedy $2^x = 16$, $x = 4$. Neznámá je logaritmem pravé strany o základu 2.

Zopakujme si ještě jednou: rovnice $2^3 = 8$ může mít na levé straně za neznámou buď základ: $x^3 = 8$, pak $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (odmocňování, neznámá je odmocninou), nebo je neznámá exponent: $2^x = 8$ (rovnice se jmenuje exponenciální, poněvadž neznámá je exponentem) a kořen rovnice je logaritmus čísla 8 a to logaritmus o základu 2: $x = \log_2 8$; $2^x = a$, $x = \log_2 a$, $2^{\log_2 a} = a$.

Cvičení 1. Určete logaritmy o základu 2 čísel: 4; 8; 16; 512; 8192; 4096; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2^3}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{128}$; $\frac{1}{1024}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. Jsou dány logaritmy o základu 2: 15; 9; -7; 6; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{4}{5}$; $-0{,}2$. Určete čísla k daným logaritmům.

Je ovšem otázka, zda můžeme také i jiná čísla než ta, která byla uvedena v tabulce, t. j. mocniny čísla 2 s exponenty celými nebo lomenými, vyjádřit jako mocniny základu 2; t. zn., zda můžeme i s jinými čísly (na př. 3, 5, 6, 7, ...) provádět početní výkony tak, že je převedeme na mocniny o základu 2. A druhá otázka, jaké by byly ty exponenty.

Obě otázky si pro nedostatek místa zodpovíme až při logaritmu o základu 10. Každý nahlédne, že výsledky budou platné i pro základ 2, platí-li pro základ 10. Naše úvahy můžeme rozšířit na mocniny o základu 5,9, atd.

Tak na př. $25 = 5^2$; exponent 2 je logaritmem čísla 25 o základu 5, $2 = \log_5 25$; $81 = 9^2$, 2 je logaritmem čísla 81 o základu 9. Platí však také, že $81 = 3^4$. Proto jsou 4 logaritmem čísla 81 o základu 3.

Měli bychom určit log čísla 32 o základu 8: $\log_8 32 = x$, t. j. $32 = 8^x$. Poněvadž neznáme celistvou mocninu čísla 8, která by měla hodnotu 32, převeďme si obě hodnoty (8, 32) na mocninu téhož mocněnce: $32 = 2^5$, $8 = 2^3$; $2 = 8^{\frac{1}{3}}$. Pak platí $2^5 = (2^3)^x = 2^{3x}$. Mocniny se sobě rovnají, rovnají se i základy, proto se budou rovnat i exponenty: $5 = 3x$; $x = \frac{5}{3}$; $32 = 8^{\frac{5}{3}}$; $\log_8 32 = \frac{5}{3}$. Ujasněte si pojem logaritmu na příkladech:

Cvičení 3. Určete log. čísel: a) 3; 9; 27; 81; 243; 729; 6561; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{81}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3^2}$; o základu 3. b) 5; 1; 0,2; 0,04; 625; $\sqrt[3]{5}$; o základu 5. c) 9; 81; 729; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{81}$; $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt[6]{9^5}$; o základu 9.

4. Jaký bude log. čísla 4096 o základu a) 2; b) 4; c) 8; d) 16; e) 64?

5. Určete hodnoty log: $\log_{\frac{2}{3}}\frac{16}{81}$; $\log_{\frac{4}{5}}\frac{64}{125}$; $\log_{\frac{5}{8}}\frac{25}{64}$; $\log_{\frac{5}{8}}\frac{125}{512}$; $\log_{\frac{1}{3}}243$; $\log_{36}6$; $\log_{512}8$; $\log_8 32$; $\log_8 4$; $\log_{16}8$; $\log_{125}\frac{1}{5}$; $\log_{\frac{8}{27}}\frac{2}{3}$; $\log_{\frac{4}{7}}1\frac{3}{4}$.

6. Je-li $\log_x 49 = 2$; $\log_x 81 = 4$; $\log_x 5329 = 2$; $\log_x 2197 = 3$ jaké mají dané log. základy?

7. Určete hodnotu výrazů:

a) $\dfrac{\log_5 125 + \log_5 25}{1 + \log_5 625}$; b) $\dfrac{\log_2 \frac{1}{16} - \log_4 \frac{1}{64}}{\log_8 \frac{1}{64} - \log_{16} \frac{1}{16}}$;

c) $(\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt{3})^5$; d) $\sqrt{\log_2 4 \,.\, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \,.\, \log_3 \sqrt[4]{3}}$;

e) $(\log_5 \frac{1}{125} \,.\, \log_{\frac{1}{2}} 2)^{\log_7 49}$; f) $(\log_6 36 + \log_7 49)^{\log_2 \frac{1}{4}}$; g) $(\log_4 64)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}}$.

8. Určete číslo, jehož log je dán: $\log_{\frac{2}{5}} x = 5$; $\log_{\frac{1}{7}} x = -6$; $\log_{\sqrt{a}} x = n$.

3. NĚCO Z HISTORIE LOGARITMU

Měli jsme již rovnici: $a^x = b$, kde neznámá je v exponentu. Mají-li a i b určité hodnoty, dá se neznámá x vypočítat ponenáhlu častým umocňováním a odmocňováním; postup je velmi zdlouhavý, jak uvidíme později při logaritmu o základu 10, a namnoze tak nesnadný, že ho nelze úplně ani provést. Již slavný Archimedes (nar. r. 287 před Kr. a zemřel r. 212 před Kr.) znal pojem logaritmu a tušil jeho prospěch. Ve svém spise spojuje řadu aritmetickou s řadou geometrickou tak, jak to žádá pojetí logaritmu. Této myšlenky se později nikdo neujal, až ve století 16.

Michael Stiefel (nar. r. 1486 v Esslinkách, mnich augustiánský, později prof. matematiky v Jeně, kde roku 1567 zemřel) ve svém spise „Arithmetica integra" r. 1544 sestavuje řadu aritmetickou i geometrickou:*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Sečítání v řadě aritmetické odpovídá násobení v řadě geometrické. Tak na př. sečtěme v prvé řadě $2 + 3 = 5$; uvedeným číslům odpovídají v druhé řadě čísla: 4, 8, 32 a skutečně: $4 . 8 = 32$ (přesvědčte se o tom na jiném příkladu). Podobně odčítání v prvé řadě: $5 - 2 = 3$ odpovídá v druhé řadě dělení $32 : 4 = 8$. Násobme 2 z prvé řady třemi, to znamená, že jsme sečtli $2 + 2 + 2 = 6$, v druhé řadě: $4 . 4 . 4 = 64$, což je číslo odpovídající 6 prvé řady. Násobiteli (v našem příkladu 3) odpovídá exponent 3, tedy: $4^3 = 64$, takže můžeme říci: Násobení dvěma, třemi, členů první řady, odpovídá umocňování na druhou, na třetí odpovídajících čísel v druhé řadě. Podobně dělení dvěma, třemi (v první řadě) odpovídá odmocňování dvěma, třemi odpov. čísla v druhé řadě; přesvědči se sám.

Stiefel se ovšem nepokusil, aby doplnil svou řadu geometrickou (druhou) čísly 3, 5, 6, 7, ... a k nim určil odpovídající čísla v prvé řadě.

*) Řadou aritmetickou rozuměj naznačený součet čísel, kde každé následující vznikne z předcházejícího tak, že k němu přičítáme stále stejné číslo (v našem případě je to hoření řada — přičítáme vždy 1). Řada geometrická je naznačený součet čísel, která vzniknou, násobíme-li první jeho číslo postupně stále stejným číslem; každý násobek je následujícím číslem v řadě (v našem případě je to druhá řada — násobíme vždy dvěma).

Od spisu uplynulo skorem 100 let, kdy Justus Byrg nebo Buergi (Švýcar, nar. r. 1552 v Lichtensteigu, dvorský mechanik a hodinář císařů Rudolfa II., Matyáše a Ferdinanda II., zemřel v Kasselu r. 1633), začal pracovati na myšlence logaritmů a uměl je určovati ještě dříve, než jeho současník Nepper, což mu dosvědčuje Kepler. Svou práci uveřejnil r. 1620 — o 6 let později než Nepper.

Roku 1614 vyšly první desky Johna Neppera nebo Napiera, skotského lorda v Merchistonu; nar. 1550 v Merchistonu v Anglii, zemřel r. 1617. Vydání desek upravil jeho syn Robert. Ve svém díle se obírá autor logaritmy funkcí úhlů (sinu, kosinu) a t. zv. logaritmů, které mají za základ číslo přibližně rovné číslu e^{-1}. On zavedl výraz logaritmus odvozený z logu arithmos, což značí číslo, udávající poměr. Princip logaritmu můžeme zobecnit řadami, kdy čísla řady geometrické píšeme jako mocniny základu q, tedy obě řady takto:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \ldots & \frac{1}{q^3} & \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q} & q^0 & q^1 & q^2 & q^3 & q^4 & q^5 & q^6 & \ldots \end{array}$$

Potom k logaritmům, které postupují řadou aritmetickou (první řada) přísluší druhá řada mocnin, která je geometrická.

Můžeme tedy považovati za logaritmy čísel: $\frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, \ldots$ čísla odpovídající jim v první řadě: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Potom výkonu: $q^2 \cdot q^3 = q^5$ odpovídá v první řadě součet odpovídajících čísel $2 + 3 = 5$ a podobně další výkony podle výkladu u M. Stiefela.

4. ZÁKLADY LOGARITMŮ

Základem mocniny může být kterékoli libovolné číslo, ale ne každý základ se hodí k tomu, aby byl základem logaritmu.

a) *Za základ se nehodí číslo záporné.* Zvolme na př. číslo -2. Víme, že platí: $(-2)^0 = 1$, $(-2)^1 = -2$, $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$, $(-2)^4 = 16$, $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$, $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$ atd.

Užitím reálných exponentů neumíme vyjádřit jako mocninu základu

(−2) čísla: 2, 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ... a reálným číslem hodnotu mocnin: $(-2)^{\frac{1}{2}}$; $(-2)^{\frac{1}{4}}$; ... ($\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-2}$; sudá odmocnina).

b) *Za základ se nehodí číslo lomené menší než jedna.* Na př. číslo $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{1}{2})^0 &= 1 && \text{(0 je logaritmus čísla 1 o základu } \tfrac{1}{2}\text{)}\\
(\tfrac{1}{2})^1 &= \tfrac{1}{2} && \text{(1 je logaritmus čísla } \tfrac{1}{2} \text{ o základu } \tfrac{1}{2}\text{)}\\
(\tfrac{1}{2})^2 &= \tfrac{1}{4} && \text{(2 je logaritmus čísla } \tfrac{1}{4} \text{ o základu } \tfrac{1}{2}\text{)}\\
(\tfrac{1}{2})^{-1} &= 2 && \text{(}-1 \text{ je logaritmus čísla 2 o základu } \tfrac{1}{2}\text{)}\\
(\tfrac{1}{2})^{-2} &= 4 && \text{(}-2 \text{ je logaritmus čísla 4 o základu } \tfrac{1}{2}\text{).}
\end{aligned}
$$

Z toho vidíme, že log čísel větších než 1 je číslo záporné.

c) *Za základ se nehodí také číslo 1 a ovšem ani 0.* $1^n = 1$. Neumíme vyjádřit žádné číslo rozdílné od 1 jako mocninu základu 1.

d) *Za základ logaritmu se hodí jen číslo kladné a větší než 1.* Většímu číslu patří při základu větším než 1 větší logaritmus. Pokusme se odvodit obecně tuto větu. Označme si základ mocniny a, exponenty x a y. Při tom předpokládejme, že $x > y$ (x je větší než y). Základ a budiž číslo kladné, větší než 1; $a > 1$. Potom musí $a^x > a^y$. Položme $x = y + m$. Máme $a^x = a^y \cdot a^m$; pokud $a > 1$ je $a^m > 1$, a proto $a^x > a^y$.

Z toho soudíme obráceně: je-li $a^x > a^y$, je $x > y$ pro $a > 1$.

Kdyby tomu bylo jinak, bylo by $x = y$, nebo $x < y$, což však nemůže být. Neboť: je-li $x = y$ musí $a^x = a^y$ a to odporuje předpokladu, že $a^x > a^y$, je-li $x < y$, pak je též $a^x < a^y$ a to také odporuje předpokladu, že $a^x > a^y$. Můžeme tedy říci, že platí, že k větším číslům patří větší logaritmy, takže se vzrůstajícím číslem vzrůstá jeho logaritmus. Z platnosti $a^x = a^y$, $x = y$ soudíme, že pro tentýž základ (a) platí: je-li $A = B$, je též $\log A = \log B$ pro tentýž základ, neboli každou rovnici můžeme logaritmovat pro stejný základ.

Z rovnice: $2^1 = 2$, $a^1 = a$, $b^1 = b$ je zjevné, že v každé logaritmické soustavě jest 1 logaritmem základu. Psáno: $1 = \log_a a$.

Poněvadž $2^0 = 10^0 = a^0 = 1$, jest logaritmus jednotky v každé logaritmické soustavě roven nule.

Pro každý základ $a > 1$ je log 0 roven $-\infty$, log ∞ opět ∞; $\log_a 0 = -\infty$; $\log_a \infty = \infty$.

Víme totiž, že $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$. Zvětšuje-li se stále n, zvětšuje se také hodnota a^n, ale současně se zmenšuje hodnota zlomku $\frac{1}{a^n}$. Tato hodnota se blíží se zvětšujícím se n k nule a konečně pro $n = \infty$ klademe $\frac{1}{a^n} = 0$. Poněvadž $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$ jest $-n$ logaritmem čísla $\frac{1}{a^n}$ a tedy $\log_a 0 = -\infty$.

5. LOGARITMUS O ZÁKLADU 10 (DESÍTKOVÝ)

Nejrozšířenější v praktickém počítání je logaritmus o základu 10, t. zv. log. Briggův, který označujeme log (bez označení základu). Ukážeme si, že každé kladné číslo můžeme pokládati za mocninu čísla 10. Víme, že čísla 10; 100; 1000; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; ... jsou mocniny základu 10 a to: $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}$; $\frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}, \ldots$ Je otázkou, jaký bude exponent mocniny základu 10, je-li hodnota této mocniny nějaké jiné celé číslo kladné. Na př. 2, 3, 35, atd.

Musíme předpokládat, že i toto číslo se dá vyjádřit jako mocnina základu 10. Tedy číslo $a = 10^x$. Je-li x číslo celistvé (2, 3 atd.), pak mocnina je již uvažované číslo 100, 1000, atd.

V ostatních případech nemůže exponent x být číslo racionálné, tedy v našem případě zlomek, na př. $\frac{p}{q}$, kde čísla p i q jsou nesoudělná (t. zn., že zlomek se nedá již krátit). Kdyby bylo $x = \frac{p}{q}$, pak by číslo a rovnalo se mocnině: $10^{\frac{p}{q}}$. Co to ale znamená $10^{\frac{p}{q}}$? Je to podle vzorce z odmocnin: $\sqrt[q]{10^p}$. Ale $\sqrt[q]{10}$ je číslo iracionální, jak jsme si již řekli. A naše číslo je racionální. Podobně ovšem i $\sqrt[q]{10^p}$ by bylo číslo iracionální. A tak přicházíme k výsledku: Dá-li se vyjádřit každé kladné celé číslo (rozdílné od celistvých mocnin základu 10, t. j. čísel 10, 100, ...) jako mocnina základu 10, bude exponent této mocniny číslo iracionální. Výkony početní s takovou mocninou konáme podle týchž pravidel jako početní výkony s mocninou o celém exponentu.

*) Neúnavným pěstováním logaritmů zasloužil se o ně nejvíce Henry Briggs, čili Briggius, nar. r. 1556 ve Warlewoodě v hrabství Yorku, prof.

Ukažme si nyní, že můžeme na př. číslo 2 vyjádřit jako mocninu 10. Sestavme si nejprve tabulku odmocnin 10 a omezme se na 4 desetinná místa.

Odmocnina	Mocnitel	Odmocnina	Mocnitel
$\sqrt{10} \doteq 3{,}1623$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\sqrt[256]{10} \doteq 1{,}0090$	$\frac{1}{256} \doteq 0{,}0039$
$\sqrt[4]{10} \doteq 1{,}7783$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\sqrt[512]{10} \doteq 1{,}0045$	$\frac{1}{512} \doteq 0{,}0020$
$\sqrt[8]{10} \doteq 1{,}3335$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\sqrt[1024]{10} \doteq 1{,}0022$	$\frac{1}{1024} \doteq 0{,}0010$
$\sqrt[16]{10} \doteq 1{,}1548$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\sqrt[2048]{10} \doteq 1{,}0011$	$\frac{1}{2048} \doteq 0{,}0005$
$\sqrt[32]{10} \doteq 1{,}0746$	$\frac{1}{32} \doteq 0{,}0313$	$\sqrt[4096]{10} \doteq 1{,}0006$	$\frac{1}{4096} \doteq 0{,}0002$
$\sqrt[64]{10} \doteq 1{,}0366$	$\frac{1}{64} \doteq 0{,}0156$	$\sqrt[8192]{10} \doteq 1{,}0003$	$\frac{1}{8192} \doteq 0{,}0001$
$\sqrt[128]{10} \doteq 1{,}1182$	$\frac{1}{128} \doteq 0{,}0078$	$\sqrt[16384]{10} \doteq 1{,}0001$	$\frac{1}{16384} \doteq 0{,}00006$

Číslo 2 dělme zkráceně na 4 desetinná místa vždy číslem nejblíže nižším uvedeným v tabulce odmocnin čísla 10. Podíl potom opět vždy dělitelem nejblíže nižším z tabulek odmocnin a skončíme u podílu, který se přibližně rovná jedné.

$$
\begin{aligned}
2 &: 1{,}7783 \doteq 1{,}1246\\
1{,}1246 &: 1{,}0746 \doteq 1{,}0466\\
1{,}0466 &: 1{,}0366 \doteq 1{,}0097\\
1{,}0097 &: 1{,}0090 \doteq 1{,}0007\\
1{,}0007 &: 1{,}0006 \doteq 1{,}0001.
\end{aligned}
$$

---

geometrie na Greshamském kolegiu v Londýně, později v Oxfordě, kde r. 1631 zemřel. Poznal, že základ 10 by byl pro numerické, t. j. početní určování výhodnější (log. desítkový), než číslo e, které jako základ logaritmů, t. zv. přirozených, značených lx, si zvolil vrstevník Briggův, Nepper; e = 2,7182818... Briggs vydal r. 1618 osmimístné logaritmy čísel 1—1000 s názvem „Logaritmorum cgilias prima".

Po Briggsovi doplňoval mezeru v logaritmech čísel holandský počtář Andr. Vlacq. Oba vypočítávali log obtížným způsobem, jiným než je odvozen v příštím oddílu log 2, a to nejprve logaritmy prvočísel, potom čísel složených.

Log. přirozený nemá sice takového užití v praktickém počítání, ale je za to nesmírně důležitý v theorii matematiky. Odvození logaritmu přirozeného je velmi přesné a můžeme z něho přejít k log. desítkovému.

Odtud:

$$2 \doteq 1{,}7783 \,.\, 1{,}0746 \,.\, 1{,}0366 \,.\, 1{,}0090 \,.\, 1{,}0006 \,.\, 1{,}0001$$

$$2 \doteq 10^{\frac{1}{4}} \,.\, 10^{\frac{1}{32}} \,.\, 10^{\frac{1}{64}} \,.\, 10^{\frac{1}{256}} \,.\, 10^{\frac{1}{4096}} \,.\, 10^{\frac{1}{16384}}$$

$$2 \doteq 10^{\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{16384}}.$$

Log2 rovná se součtu vypsaných exponentů.

Sečtěme hodnoty zlomků, které jsou vypočteny v hoření tabulce:

$$\begin{array}{rl} \text{Log}2 \doteq & 0{,}2500 \\ & 0{,}0313 \\ & 0{,}0156 \\ & 0{,}0039 \\ & 0{,}0002 \\ \hline \text{Log}2 \doteq & 0{,}3010. \end{array}$$

A podobně jako log. čísla 2 určili bychom log. jiného čísla hodnoty 1—10.

Tak jsme si ukázali, že je možno každé číslo mezi 1 a 10 vyjádřit jako mocninu základu 10. Je-li exponent, t. j. logaritmus čísla číslo iracionální, pak udáváme jeho hodnotu s přesností, jakou potřebujeme, t. j. na tolik desetinných míst, kolik chceme.

6. POČÍTÁNÍ S LOGARITMY

V podstatě jsme si již ukázali při logaritmu o základu 2, jak můžeme si odvodit pravidla pro výkony početní s logaritmy. Nyní odvoďme si je pro logaritmus o základu 10, log. desítkový. Odvozená pravidla platí ovšem i pro kterýkoliv jiný základ.

1. Číslo M se dá vyjádřit jako mocnina základu 10 a to: $M = 10^m$ (na př. $2 \doteq 10^{0{,}3103}$), jiné číslo $N = 10^n$. Z napsaných rovnic plyne: $m = \log M$, $n = \log N$. Potom z rovnice: $M \,.\, N = 10^m \,.\, 10^n = 10^{m+n}$ plyne $\log MN = m + n$. Slovy vyjádříme: logaritmus součinu rovná se součtu logaritmů.

2. Podíl čísel: $M : N = 10^m : 10^n = 10^{m-n}$. $\text{Log} M : N = m - n$. Vyjádři sám slovy, čemu se rovná log. podílu.

3. Z hořeního vzorce: $\text{Log}\frac{1}{M} = \log 1 - \log M = 0 - \log M =$ $= -\log M$.

4. $\text{Log}M^x$ odvodíme tak, že vyjádříme, co vlastně mocnina M^x je. $M^x = M \,.\, M \,.\, M \,.\, M \ldots M$ (x-krát). Potom platí, že $\log M^x = \log M +$ $+ \log M + \log M + \ldots + \log M$ (x-krát) $= x \,.\, \log M$. Máme-li logaritmovat mocninu, potom znásobíme exponentem log. základu mocniny.

5. Je-li úkolem logaritmovat odmocninu, pak převeďme si odmocninu na mocninu a logaritmujme mocninu: $\sqrt[x]{M^n} = M^{\frac{n}{x}}$; $\log\sqrt[x]{M^n} =$ $= \frac{n}{x}\log M$.

Vzpomeňme si na ukázky řad aritmetické a geometrické a na vztahy mezi nimi.

Příklady (z látky geometrie):

$\log\frac{1}{2}zv = \log z + \log v - \log 2.$
$\log[\frac{1}{4}(abc : P)] = \log a + \log b + \log c - \log 4 - \log P.$
$\log 4\pi r^2 = \log 4 + \log\pi + 2\log r.$
$\log(\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}) = 2\log a + \frac{1}{2}\log 3 - \log 4.$
$\log\sqrt[5]{3x^2} = \frac{1}{5}(\log 3 + 2\log x).$

Poněvadž není možno logaritmovat součet nebo rozdíl, upravujeme si často tvary rozdílu na součiny. Na př. $\log\pi(r_1^2 - r_1^2) = \log\pi(r_1 + r_2) \,.$ $. \,(r_1 - r_2) = \log\pi + \log(r_1 + r_2) + \log(r_1 - r_2)$.

Cvičení 9. Znáte-li log2 a 10, kterých jedno- a dvojciferných čísel znáte log? Vyjádřete!

10. Určete log čísel: 20; 200; 2000; 0,2; 0,02; 0,002...

11. Znáte-li log čísel 2, 3, 5, 7, kterých dvojciferných čísel si můžete prostým sčítáním log z nich odvodit?

12. Uvažte, že budeme znát log všech čísel, známe-li log prvočísel, neboť ostatní čísla jsou násobky prvočísel.

13. Logaritmujte výrazy: ab, abc, a^2; a^3; $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, $2\pi r$; πr^2; $\frac{4}{3}\pi r^3$; $\frac{1}{3}\pi r^2 v$; $\pi r(r + s)$; $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $\dfrac{x^2y^3 \,.\, \sqrt[4]{2x^3}}{\sqrt[3]{2^2y}}$; $\dfrac{(\sqrt[5]{2^2x^3})^3}{(\sqrt[4]{3^3x^2})^2}$;

$$\sqrt[5]{3^2x^3\sqrt[3]{2^2x^2y}}.$$

14. Je dáno: $\log 3 + 2\log a$; kterého výrazu je to logaritmus? $\log 3 + 2\log a = \log 3a^2$; $\frac{1}{2}\log a - \frac{2}{3}\log b = \log\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$. Podobně: $\log a + \log b - \log 3 - \log 2$; $3\log a + 2\log b$; $5\log a - 3\log b$; $4\log x - 3\log y + \frac{1}{3}\log 3$; $\log a - (\log c + \log d)$; $2\log a + (5 - x)\log b - \frac{1}{3}\log c$; $\frac{1}{4}\log y - \frac{m}{n}\log x$; $2\log(x + a) - \frac{2}{3}\log(a - x)$; $\frac{3}{4}\log a - \frac{5}{6}\log 6$.

15. Při kterém základu je log500 o 3 větší než log256? $\log_x 500 = \log_x 256 + 3$; $\frac{500}{256} = (\frac{5}{4})^3$; $\log_x \frac{500}{256} = 3$; $\log_x (\frac{5}{4})^3 = 3$; $x = \frac{5}{4}$. Podobně obecně: $\log_x a$ je o n větší než $\log b$.

7. CHARAKTERISTIKA A MANTISA LOGARITMU

Ukázali jsme, že $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 20 = 1{,}3010$, poněvadž $20 = 2 \,.\, 10$, $\log 200 = 2{,}3010$, neboť $200 = 2 \,.\, 10^2$. Podobně z rovnice: $0{,}2 = 2 : 10$ plyne, že $\log 0{,}2 = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1$ (záporný), $\log 0{,}02 = 0{,}3010 - 2$, atd.

Obecně lze ihned psát. Je-li číslo $x = N \,.\, 10^n$, při čemž N je číslo hodnoty mezi 1 a 10, pak $\log x = \log N + n$. Číslo n může být větší nebo menší než 0. Vidíme, že u logaritmů čísel, která mají totéž pořadí číslic, ale různou hodnotu, na př. 3,4597, 34,597, 345,97 nemění se část logaritmu za desetinnou čárkou, t. j. část logaritmu, které říkáme mantisa. Druhá část je před desetinnou čárkou na př. v logaritmech hořeních čísel: 0,5391, 1,5391, 2,5391, je žádná celá, jedna celá, dvě celé, atd., které říkáme charakteristika. Ta nám udává, jakého řádu je nejvyšší místo čísla.

Mantisa je, jak je vidět na příkladě nezávislá na hodnotě čísla, charakteristika zase je nezávislá na pořadí číslic daného čísla a určuje jen řád nejvyššího místa čísla.

Charakteristika jednotek je 0, desítek 1, stovek 2, atd., desetin -1, setin -2 atd. Proč?

Příklad: $\log 2{,}3 = 0{,}3617$, $\log 23 = 1{,}3617$, $\log 230 = 2{,}3617$, $\log 2300 = 3{,}3617$, $\log 0{,}23 = 0{,}3617 - 1$, $\log 0{,}023 = 0{,}3617 - 2$. S logaritmem desetinného čísla počítáme jako s dvojčlenem, což je důležité pro násobení a dělení logaritmu.

V celku můžeme říci: Logaritmy čísel, které se liší jen postavením desetinné čárky, mají stejné mantisy a liší se jen charakteristikou. Kladné charakteristiky píšeme před desetinnou čárku, záporné za ní.

Určete log. čísel: $5 = \frac{10}{2}$; 50, 500; 0,5; 0,05; 0,005.

Vyjádřete jako mocninu čísla 10: 2; 20; 200; 50; 500; 0,5.

Určete hodnoty mocnin: $10^{0,3010..}$; $10^{3,3010}$; $10^{1,3010}$; $10^{0,3010-1}$.

8. LOGARITMICKÉ TABULKY

S logaritmy počítáme tak, že určíme nejprve logaritmy daného čísla, nebo daných čísel, a s nimi potom provádíme výkony početní podle již uvedených pravidel. Abychom určili ke každému číslu jeho logaritmus, používáme tabulek. Je možno ovšem provádět ihned početní výkony s danými čísly s pomocí tak zvaného logaritmického pravítka, při čemž neurčujeme vůbec logaritmy čísel a pouhým mechanismem čteme na upraveném pravítku výsledek.

Logaritmické tabulky se liší pravidelně jen počtem cifer mantisy. Jinak jejich uspořádání až na nevýznamné maličkosti je totéž. Podle toho, jsou-li mantisy logaritmu udávány na 4, 5 nebo 7 míst, rozeznáváme tabulky čtyr-, pěti-, sedmimístné. Všimněme si a ukažme si jejich uspořádání, vysvětleme si hledání logaritmu k číslu a naopak čísla k danému logaritmu v tabulkách čtyrmístných.

Vezměme si jednu část tabulky:

N	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445

Ve sloupci nadepsaném *N* jsou uváděna v tabulkách čísla 10 až 110.

A) Hledejme logaritmus v log. tabulkách k danému číslu:

a) *Jednocifernému*: na př. 6, vyhledáme číslo 60 ve sloupci označeném N a mantisu v řádku čísla 60 ve sloupci označeném nahoře 0. Napíšeme nejdříve charakteristiku 0 a potom mantisu 7782, takže dostaneme: $\log 6 = 0{,}7782$.

b) *Dvoucifernému*: hodnotu čísla najdeme rovněž ve sloupci N a v tomto řádku mantisu ve sloupci pod 0. Na př.: $\log 65 = 1{,}8129$; $\log 0{,}65 = 0{,}8129 - 1$, $\log 0{,}065 = 0{,}8129 - 2$ (počítáme řád čísla od desetinné čárky vpravo -1, -2, kdy přijdeme k první cifře různé od nuly; řád našeho nejvyššího místa je -2, charakteristika rovněž -2). Charakteristiku čísla většího než 1 píšeme často hned (kladnou); charakteristiku zápornou až po napsání mantisy.

c) *Trojcifernému*, na př. 635. Ve sloupci N najdeme dvojčíslí 63, v tomto řádku a ve sloupci nahoře označeném 5 (poslední cifra daného čísla) máme mantisu logaritmu 8028. A charakteristiku 2, takže $\log 635 = 2{,}8028$, $\log 0{,}0635 = 0{,}8028 - 2$, a pod.

d) *Čtyrcifernému*: Mantisu v tabulkách čtyrmístných neurčíme naprosto přesně. Na př. $\log 602{,}7$. Mantisa trojčíslí 602 je 7796, trojčíslí o jednotku většího 603 je 7803. Naše číslo 602,7 je větší než číslo 602,0 a menší než 603,0.

Všímáme-li si rozdílu sousedních mantis vidíme, že není stále stejný. Odtud můžeme uvažovat, že logaritmus nevzrůstá stejnoměrně. Nejlépe bychom se o tom přesvědčili na grafickém znázornění. Grafem logaritmu je křivka, která nestoupá stejnoměrně. Pro náš rozdíl mezi mantisami čísel 602 a 603 budeme předpokládat, že v takovém malém intervalu je vzrůst skutečně rovnoměrný. Není to ovšem pravdivý předpoklad, ale chyba bude velmi nepatrná, a můžeme ji klidně pominout.

Rozdílu 603 a 602, t. j. jedné jednotce posledního místa bude odpovídat rozdíl jejich příslušných mantis 7803 a 7796, t. j. 7 jednotek posledního místa mantisy. Jedné desetině jednotky posledního místa našeho čísla bude přibližně odpovídat desetina sedmi jednotek posledního místa mantisy, t. j. 0,7. Vzrůstá-li mantisa rovnoměrně, pak log. čísla $602{,}1 = 2{,}7796 + 0{,}00007 = 2{,}77967$, s opravou 2,7797, $\log 602{,}2 = = 2{,}77974$. Sedmi jednotkám posledního místa čísla 602,7 přísluší vzrůst mantisy 0,7 . 7 jednotek posledního jejího místa, t. j. o 4,9, s opravou o 5 jednotek, takže

$$\begin{array}{rl} \log 602{,}7 = & 2{,}7796 \\ & +\quad 5 \\ \hline & 2{,}7801 \end{array}$$

e) *Log. čísla víceciferného než čtyrciferného* určíme buď tak, že je zaokrouhlíme na čtyrmístné, nebo určujeme opravu pro poslední místo pěticiferného čísla tím, že dělíme rozdíl mantis (v našem případě 7) stem (0,07) a počítáme dále opravu, na př.

$$\begin{array}{rll} \log 60272 = & 4{,}7796 & \\ & +\quad 49 & (0{,}7\,.\,7) \\ & +\quad 14 & (0{,}07\,.\,2) \\ \hline & 4{,}780104 \doteq 4{,}7801 & \end{array}$$

Rozdílu mantis dvou sousedních čísel říkáme tabulková diference, a způsobu výpočtu naší mantisy interpolace. Snadno počítáme poslední místa mantisy tehdy, máme-li násobky desetiny tabulkové diference již vypočítány v tabulkách ve sloupcích (vedle tabulek) nadepsaných P. P. (partes proportionales = části úměrné). Takový sloupec je nadepsán na př. 7 (pro tabulkovou diferenci 7) a vypadá takto:

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

Je-li poslední místo (čtvrté) našeho čísla na př. 5, a tabulková diference 7, pak si najdeme nalevo 5, vedle 3,5, a k mantise, nebo lépe řečeno k poslednímu jejímu místu přičteme 3,5, s opravou 4.

Sledujte na uvedeném příkladu i postup psaní a určení log. čísla:

$x = 674{,}7$

$\log x = 2{,}8287$

$+\quad 4$

$2{,}8291$

mantisa trojčíslí: 674 = 8287;
mantisa trojčíslí: 675 = 8293;
zapíšeme: $\log x = 2{,}8287$;
tabulková diference je 6;
zapíše se po straně: t. d. = 6;

jedna její desetina = 0,6;
poslední číslo našeho čtyrčíslí je 7. Násobíme: 7 . 0,6 = = 4,2, vezmeme z čísla opravu, zde 4, — a připočítáme k mantise.
Pro počátek se postup zapisuje takto:

$$\begin{array}{l} \log x = 2{,}8287 \qquad \text{t. d.} = 6;\ 0{,}6 \,.\, 7 = 4{,}2 \\ \quad\ \underline{+ \quad 42} \\ \quad\ 2{,}8291 \end{array}$$

Cvičení 16. Určete log. čísel: 235,4; 32,65; 0,8456; 2,479; 0,08312; 0,00123; 6485; 0,2185; 18,486; 0,28436; 324 670; 643,29; 7,1125.

17. Vyjádřete jako mocninu o základě 10 čísla: 8; 19; 28; 246; 5755; 0,4721; 0,5498; 0,005862.

B) Hledáme-li číslo k danému logaritmu, postupujeme obráceně. Mohou nastat celkem dva základní případy, které si objasníme:

a) $\log x = 1{,}8338$, nebo $\log y = 0{,}8338 - 2$.

V tabulkách hledáme mantisu nejbližší k dané, a vidíme, že najdeme ji v řádku označeném ve sloupci N číslem 68, a že mantisa sama je ve sloupci označeném shora číslem 2. Trojčíslí je tedy 682. Vzhledem k charakteristice oddělíme při x desítky, tedy $x = 68{,}2$, pro y je 6 jednotek řádu -2; připíšeme před šest 0 řádu -1, napíšeme desetinnou čárku a žádnou celou, takže máme: $y = 0{,}0682$.

b) $\log x = 2{,}8425$.

V tabulkách hledáme mantisy nejblíže menší a větší k dané. Jsou to 8420 a 8426. K nim příslušná čísla jsou 695, 696. Jak víme již z dříve provedené úvahy, bude naše číslo větší než 695 a menší než 696. Rozdílu mantis (t. zn. tabulkové diferenci), v našem případě 6 jednotkám posledního místa mantis odpovídá jedna jednotka posledního místa čísla.

Při předpokládaném rovnoměrném vzrůstu logaritmu odpovídá jedné desetině rozdílu mantis (t. j. 0,6) jedna desetina poslední jednotky daného čísla. Rozdíl mezi danou mantisou (8425) a menší z obou vyhledaných mantis (8420) je 5. Jemu odpovídá tolik desetin posledního místa našeho čísla 695, kolikrát je 0,6 (desetina diference tabulkové) obsažena v našem rozdílu 5. Lépe než 5 : 0,6 počítáme tak, že desetinásobek našeho rozdílu (5) dělíme tabulkovou diferencí: tedy $50 : 6 \doteq 8$, to znamená, že čtyrčíslí našeho čísla bude: 6958. Z charakteristiky plyne, že dané číslo je 695,8.

Jsou-li v tabulkách propočítány násobky diferencí tabulkových ve sloupci P. P., určíme tabulkovou diferenci, a hledáme v příslušném sloupci, nadepsaném hodnotou této diference. Je-li (na př. při t. d. 7 ve vyobrazeném sloupci) rozdíl dané a menší mantisy 6, určíme k tomuto nejbližší číslo v pravém sloupci, t. j. 6, 3, vlevo je 9, což je poslední místo našeho čísla bez počítání.

Příklady: Určete číslo k danému logaritmu: $\log x = 1{,}8067$. Sledujte i způsob psaní, hlavně pro počátek.

$$\begin{array}{rll}
\log x = & 1{,}8067 & \\
 & -\quad 2 & \text{t. d.} = 7 \\
\hline
 & 5 & 50 : 7 \doteq 7 \\
x = & 64{,}07 & \\
\log x = & 0{,}8067 - 2 & \\
x = & 0{,}06407 &
\end{array}$$

Mantisy nejbližší k dané jsou: 8062, 8069. Tabulkový rozdíl (7) označujeme t. d. = 7. Poslední rozdílná čísla mezi danou mantisou a menší (2) píšeme pod daný log a odečteme.

Rozdíl mezi danou mantisou 8067 a menší z tabulky (8062) je 5.

Mantisa 8062 odpovídá trojčíslí 640, které napíšeme za $x = 640$; dělíme desetinásobek rozdílu 5 tabulkovou diferencí (7) a přibližný podíl 7 připíšeme jako poslední místo k trojčíslí 640.

Z charakteristiky daného čísla oddělíme náš počet míst.

Máme-li charakteristiku zápornou, můžeme napsat za x nejprve 0,0 (podle charakteristiky) a potom teprve naše trojčíslí, k němuž připíšeme poslední místo. Tedy takto postupně: 0,0

0,0640
0,06407.

Cvičení **18.** K danému log. určete číslo: 2,7896; 0,6580 — 2; 3,6469; 5,8469; 4,2814; 0,1658 — 1; 0,6234; 0,46 — 2; $\frac{12}{13}$.

19. Ustanovte číslo, které se rovná dané mocnině 10: $10^{1,8261}$; $10^{0,9524}$; $10^{3,6845}$; $10^{0,3950-2}$; $10^{0,46-3}$.

Logaritmické tabulky pětimístné. Z užívaných tabulek jsou dost obvyklé také pětimístné, které obsahují pětimístné mantisy čísel až čtyrciferných; mantisy čísel péticiferných určíme analogickou interpolací jako v tabulkách čtyrciferných. Úprava tabulek pěticiferných je stejná jako u tabulek čtyrciferných až na dva rozdíly. Poněvadž celá řada mantis po sobě jdoucích se shoduje v prvních dvou místech, je příslušné dvojčíslí napsáno jen jednou na začátku řádku, v dalším jsou psána jen další trojčíslí mantisy. Mění-li se první dvojčíslí mantisy uprostřed řádku, je před příslušným trojčíslím hvězdička, která nám značí, že poslední cifru dvojčíslí na začátku řádku vyznačeného je nutno o jednotku zvětšit. Příklad:

N	log0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	81954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014

Mantisa čtyrčíslí: 6607 je 82000, čísla 6608 je 82007, což plyne i z toho, že mantisa se zvětšujícím se číslem se zvětšuje. Jinak postup při určování log. z daného čísla i čísla z daného log. je shodný s postupem v tabulkách čtyrciferných. Někdy bývá diference tabulková mezi poslední mantisou řádku a první mantisou řádku následujícího vypsána na konci řádku ve sloupci nadepsaném d.

9. UŽITÍ LOGARITMŮ

1. *Součin*:

a) $x = 34 \,.\, 625{,}7$

$\log 34 \,.\, 625{,}7 = \log 34 + \log 625{,}7$

Výpočet upravujeme ihned bez rozepisování takto:

$$\begin{array}{rr} \log x = & 1{,}5315 \\ + & 2{,}7959 \\ + & 5 \\ \hline = & 4{,}3279 \\ - & 63 \\ \hline & 16 \\ & \\ x = & 21280 \end{array}$$

Po určení log. součinu určujeme ihned číslo k vypočítanému logaritmu.

b) $x = 45{,}6 \cdot 0{,}057 \cdot 0{,}00678$

$$
\begin{array}{rl}
\log x = & \,1{,}6590 \\
 & +\,0{,}7559 - 2 \\
 & +\,0{,}8312 - 3 \\
\hline
 & =\,3{,}2461 - 5 \\
 & \,0{,}2461 - 2 \text{ (neboť } 3 - 5 = -2) \\
 & -\phantom{0{,}24}55 \\
\hline
 & \phantom{-0{,}24}6 \\
x = & \,0{,}01762
\end{array}
$$

Sčítáme zvlášť charakteristiky před desetinnou čárkou a za mantisou log. Upravíme teprve po výpočtu.

(tab. dif. = 25, rozdíl = 6; 60 : 25 $\doteq$ 2)

2. *Podíl*:

a) $x = 674 : 7{,}35$

$$
\begin{array}{rl}
\log x = & \,2{,}8287 \\
 & -\,0{,}8663 \\
\hline
= & \,1{,}9624 \\
x = & \,91{,}7
\end{array}
$$

Zde odečítáme prostě mantisy i charakteristiky.

b) $x = 6{,}02 : 823$

$$
\begin{array}{rl}
 & +\,3 \qquad\quad -3 \\
\log x = & \,0{,}7796 \\
 & -\,2{,}9154 \\
\hline
= & \,0{,}8642 - 3 \\
x = & \,0{,}00731
\end{array}
$$

Dělitel je větší než dělenec. Při odečítání je charakteristika dělitele větší než charakteristika dělence a to o 3. Proto přičteme 3 jednotky před desetinnou čárku, ale ihned odečteme za mantisou dělence číslo 3 (naznačeno nad log. dělence).

c) $x = 2{,}7 : 0{,}00365$

$$
\begin{array}{rl}
 & +\,1 \qquad\quad -1 \\
\log x = & \,0{,}4314 \\
 & -\,0{,}5623 \mp 3 \\
\hline
= & \,0{,}8691 + 2 \\
 & \,2{,}8691 \\
 & -\phantom{2{,}86}86 \\
\hline
 & \phantom{-2{,}869}5 \\
x = & \,739{,}8
\end{array}
$$

Odečítáme záporný log., s kterým počítáme jako s dvojčlenem. Proto znamení charakteristiky za mantisou změníme v opačné (odečteme) a naznačíme pod — znam. +. Jinak při odčítání řídíme se pravidlem v b) a ve výsledku sloučíme charakteristiky (— 1 + + 3 = 2).

d) $x = 0{,}0234 : 0{,}00865$

$$\begin{array}{rl} & \quad +1 \qquad -1 \\ \log x = & \left|\begin{array}{l} 0{,}3692 - 2 \\ 0{,}9370 \mp 3 \end{array}\right. \\ = & \quad 0{,}4322 \\ - & \qquad 14 \\ & \qquad\ 8 \\ x = & \quad 2{,}705 \end{array}$$

V podstatě stejné jako c) rozšířené o to, že i dělenec je menší než 1. Postup v jádře stejný jako v c).
Po sloučení charakteristik za mantisou dostaneme 0.

e) $x = \dfrac{1{,}34}{9{,}2 \,.\, 0{,}00845}$

$$\begin{array}{rl} & \quad +2 \qquad -2 \\ \log x = & \left|\begin{array}{l} 0{,}1271 \\ -\ 0{,}9638 \\ -\ 0{,}9269 \mp 3 \end{array}\right. \\ = & \quad 0{,}2364 + 1 \\ & \quad 1{,}2364 \\ - & \qquad 55 \\ & \qquad\ 9 \\ x = & \quad 17{,}23 \end{array}$$

Příklad zahrnující předcházející případy, zde máme dva dělitele.

3. *Mocniny*:

a) $x \doteq 36{,}7^4$.

$$\log x = 1{,}5647 \,.\, 4 = 6{,}2588$$
$$x = 1815000$$

V hodnotě mocniny musíme se spokojit se 4 platnými ciframi.

b) $x = 0{,}057^3$

$$\begin{array}{rl} \log x = & (0{,}7559 - 2) \,.\, 3 \\ = & 2{,}2677 - 6 \\ = & 0{,}2677 - 4 \\ - & \qquad\quad 2 \\ & \qquad\quad 5 \\ x = & 0{,}0001852 \end{array}$$

Log. násobíme jako dvojčlen, t. j. obě části a po vynásobení upravíme jeho charakteristiku sloučením obou (2 — — 6 = — 4).

4. *Odmocniny*:

a) $x = \sqrt[3]{94,5}$

$$\begin{aligned} \log x &= 1,9754 : 3 \\ &= 0,6585 \\ &\underline{-\ \ 80} \\ &\quad\ \ 5 \\ x &= 4,555 \end{aligned}$$

Dělíme prostě logaritmus odmocněnce odmocnitelem.

b) $x = \sqrt{0,0157}$

$$\begin{aligned} \log x &= (0,1959 - 2) : 2 \\ &= 0,0979 - 1 \\ &\underline{-\ \ 69} \\ &\quad\ 10 \\ x &= 0,1253 \end{aligned}$$

Dělíme jako dvojčlen jednočlenem; při dělení nám vyjde charakteristika číslo celé (2 : 2 = 1), proto přikročíme ihned k dělení.

c) $x = \sqrt[5]{0,045}$

$$\begin{aligned} \log x &= (0,6532 - 2) : 5 \\ &\ (3,6532 - 5) : 5 \\ &= 0,7306 - 1 \\ &\underline{-\ \ 00} \\ &\quad\ \ 6 \\ x &= 0,5377 \end{aligned}$$

Kdybychom dělili přímo jako v b) dostali bychom charakteristiku číslo lomené ($\frac{2}{5}$). Ale charakteristika musí být číslo celé. Proto přičteme k log, a zároveň odečteme takové číslo, aby charakteristika za mantisou bylo číslo dělitelné odmocnitelem (v našem případě přičteme a odečteme 3, charakteristika za mantisou bude -5) a dělíme tak jako v b).

Zkuste přičíst 8; 13.

Příklady složitější:

5. Vypočítejte poloměr plochy kulové, je-li dán její povrch $S = 45,7\ \mathrm{dm}^2$.

Vzorec pro S: $S = 4\pi r^2$ $\qquad$ $\log \pi = 0,4971$ (zapamatujte si ho)

Počítejme r: $r = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$; $\qquad$ $\log r = \frac{1}{2}[\log S - (\log 4 + \log \pi)]$

$$\begin{aligned} \log r = \tfrac{1}{2}\ &|\ 1,6599 \\ -\ &|\ 0,6021 \\ -\ &|\ 0,4971 \\ \hline &\ \ 0,5607 \quad (:2) \\ = &\ \ 0,2804 \quad r \doteq 1,907\ \mathrm{dm} \\ \hline - &\qquad 788 \\ \hline &\qquad\ \ 16 \end{aligned}$$

(tab. d. = 22, 160 : 22 $\doteq$ 7)

6. Vypočítejte poloměr podstavy rotačního kužele, je-li dán jeho objem $V = 0{,}579\,\mathrm{dm}^3$ a výška $v = 3{,}4\,\mathrm{dm}$.

Objem kužele $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$. Odtud $r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi v}}$.

$$\log r = \tfrac{1}{2}(\log 3 + \log V - \log\pi - \log v)$$

$$\begin{array}{rl}
\log r = \tfrac{1}{2} & \left| \begin{array}{l} 0{,}4771 \\ 0{,}7627 - 1 \end{array}\right. \\
\hline
 & \left| \; 1{,}2398 - 1 \right. \\
- & \left| \; 0{,}4971 \right. \\
- & \left| \; 0{,}5315 \right. \\
\hline
 & \left| \begin{array}{l} 0{,}2112 - 1 \\ 1{,}2112 - 2 \quad (:2) \end{array}\right. \\
\hline
= & 0{,}6056 - 1 \qquad r = 0{,}4033\,\mathrm{dm} \\
- & \quad 53 \\
\hline
 & \quad\; 3
\end{array}$$

(tab. d. = 11; 30 : 11 ≐ 3)

7. $x = \dfrac{2\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{7}}$; $\log x = \log 2 + \frac{1}{2}\log 0{,}5 - \frac{1}{2}\log 7$.

$$\begin{array}{rl}
\log x = & \left| \begin{array}{l} 0{,}3010 \\ 0{,}8495 - 1 \quad [(0{,}6990 - 1) : 2 = (1{,}6990 - 2) : 2] \end{array}\right. \\
\hline
 & \left| \; 1{,}1505 - 1 \right. \\
- & \left| \; 0{,}4225 \qquad (0{,}8451 : 2) \right. \\
\hline
 & 0{,}7280 - 1 \qquad x = 0{,}5346 \\
- & \quad 75 \\
\hline
 & \quad\; 5
\end{array}$$

Cvičení **20.** Vypočítejte: 3,1458 . 24,64; 0,3492 . 0,006845; 489,5 . 0,8021 405,7 . 0,0003687 . 0,98764; 80,94 . 0,3257 . 0,004315.

21. Určete hodnoty zlomků: $\dfrac{34{,}68}{598{,}5}$; $\dfrac{1{,}234}{56{,}78}$; $\dfrac{0{,}4539}{27{,}89}$; $\dfrac{0{,}004135}{678{,}9}$;

$\dfrac{2{,}468}{97{,}35 \,.\, 669{,}7}$; $\dfrac{397{,}5 \,.\, 0{,}04967}{0{,}05849 \,.\, 0{,}006875}$; $\dfrac{0{,}4712 \,.\, 89{,}64}{0{,}4877 \,.\, 0{,}9876}$; $\dfrac{68{,}94 \,.\, 95{,}84}{123{,}85 \,.\, 0{,}09998}$;

$\dfrac{6{,}845 \,.\, 3{,}287}{0{,}9872 \,.\, 0{,}0834{,}5}$.

22. Umocněte: $0{,}8495^3$; $1{,}2358^9$; $68{,}47^4$; $389{,}8^3$; $0{,}008945^2$; $0{,}1235^4$.

23. Určete hodnoty odmocnin: $\sqrt{845,2}$; $\sqrt[3]{0,2857}$; $\sqrt[4]{0,07956}$; $\sqrt[5]{0,03987}$; $\sqrt[4]{29,87}$; $\sqrt[3]{321,6}$; $\sqrt{0,9876}$.

24. Vypočtěte: a) $\dfrac{3,452^2 \,.\, \sqrt{0,1235}}{\sqrt[3]{2768}}$; b) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{34,17 \,.\, 0,05674}{0,009876}}}{3,125^2 \,.\, \sqrt[3]{0,5764}}$;

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2,57 \,.\, \sqrt{0,9876}}{\sqrt[3]{0,01234} \,.\, \sqrt[4]{0,9765}}}$; d) $\dfrac{\sqrt{2,876 \,.\, \dfrac{3,879^2}{\sqrt[3]{0,15^2}}}}{\sqrt[3]{6,845^2 \,.\, 5,793^3}}$.

25. Určete obsah a) čtverce o straně 3,78 dm, b) kruhu o poloměru 0,674 m, c) kosočtverce o úhlopříčkách 34,5 dm, 27,8 dm, d) trojúhelníku rovnostranného o straně 5,34 dm, e) trojúhelníku rovnostranného o výšce 7,45 dm, f) kruhu o obvodu 6,7 dm, g) trojúhelníku pravoúhlého o odvěsnách 5,7 cm a 4,98 cm.

26. Určete stranu a) čtverce o plošném obsahu 5 cm², b) čtverce o úhlopříčce 4,65 cm, c) trojúhelníku rovnostranného o plošném obsahu 15,4 cm³, d) trojúhelníku rovnostranného o výšce 6,7 cm.

27. Vypočítejte stranu čtverce rovného obsahem kruhu o obvodu 5,7 dm.

28. Vypočítejte obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kruhu o poloměru 5 cm.

29. Stanovte objem: a) krychle o hraně 3,275 m, b) krychle o povrchu 6,8 cm², c) krychle o tělesné úhlopříčce 5,78 cm, d) kvádru o rozměrech 2,56 dm, 0,96 dm, 6,257 dm, e) koule o poloměru 7,46 cm, f) válce rotačního o poloměru 5,67 dm a výšce 8,96 dm, g) válce rotačního o poloměru 6,7 dm a plášti 215,7 dm², h) kužele o poloměru 7,53 cm a plášti 214,7 cm².

30. Určete povrch plochy kulové z jejího objemu $V = 2,467$ dm³.

31. Určete objem koule z jejího povrchu $S = 8,828$ dm².

32. Z koule o poloměru $r = 8,56$ dm je seříznut vrchlík o obsahu 200 dm²; jaká je jeho výška?

33. Jak veliký je objem výseče kulové, je-li poloměr koule $r = 4,89$ dm a výška příslušného vrchlíku $v = 13,76$ cm?

34. Tětiva kruhové úseče rovná se 18,65 m, výška úseče 8,57 m; jak velký je poloměr kruhu?

35. Určete obsah trojúhelníka, poloměr kružnice opsané a vepsané jemu, jsou-li dány strany: 45,67 dm, 78,5 dm, 78,9 dm.

36. Jak dlouhá je hrana mosazné krychle o váze 6,879 kg ($s = 8,4$)?

37. Tyč vysoká 257 cm vrhá stín 198 cm; a) jak velký bude stín tyče dlouhé 467 cm? b) jak velká je tyč, jejíž stín je 278 cm?

38. Určete hranu krychle o objemu dvakrát větším než je objem krychle o hraně 4,678 m?

39. Určete objem rovnostranného kužele, jehož plášť měří 4,567 m².

40. Určete tělesnou úhlopříčku krychle, jejíž objem je dvakrát větší než objem kvádru o hranách 4,568 m, 8,936 m, 2,485 m.

10. LOGARITMY ČÍSLA V RŮZNÝCH SOUSTAVÁCH

Logaritmy stejných čísel ve dvou různých soustavách logaritmů jsou ve stálém poměru.

Mějme dáno:

$$a^m = M,\ b^p = M,$$

t. j. jedno číslo udáno jako mocnina dvou různých základů.

$$\text{Podobně } a^n = N,\ b^q = N,$$

M, N jsou dvě různá čísla; potom

$$m = \log_a M,\ p = \log_b M,$$
$$n = \log_a N,\ q = \log_b N.$$

Z prvých dvou rovnic plyne, že $a^m = b^p$, ale také $a^n = b^q$, odtud $a = b^{\frac{p}{m}}$ a též $a = b^{\frac{q}{n}}$. Poněvadž obě rovnice vyjadřují totéž číslo (a), musí se rovnat také pravé strany: $b^{\frac{p}{m}} = b^{\frac{q}{n}}$ a z této rovnice dále: $\frac{p}{m} = \frac{q}{n}$.

Výsledek tedy jest: $$\frac{\log_b M}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_a N} = k.$$

Vedle logaritmů desítkových se velmi často ve vědeckých pojednáních vyskytují t. zv. logaritmy přirozené. Jak je známo z poznámek, jsou to logaritmy o základu e = 2,718281... a značí se pravidelně lx (což značí přirozený logaritmus čísla x).

Položme si do výsledku naší úvahy

$$\frac{\log_b M}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_a N}, \quad N = 10,\ a = 10,\ b = e$$

a máme $$\frac{lM}{\log M} = \frac{l_{10}}{1} = 2{,}30258509\ldots = m.$$

Tento podíl označme si znakem m.

Podobně platí i o reciproké hodnotě poměru

$$\frac{\log M}{\mathrm{l}M} = \frac{1}{\mathrm{l}_{10}} = 0{,}43429448\ldots = \mu$$

a hodnotu tohoto poměru označme μ.

Z obou úvah platí, že

$$m = \frac{1}{\mu}, \text{ t. j. } m\mu = 1.$$

Známe-li tyto dvě veličiny, kterým se říká také modulus, nebo míra, odvodíme snadno z logaritmu desítkového logaritmus přirozený takto: $\mathrm{l}M = m \log M$; t. j. přirozený logaritmus nějakého čísla vypočítáme, znásobíme-li dekadický logaritmus téhož čísla modulem přirozené soustavy m, a obráceně, dekadický logaritmus vypočítáme, násobíme-li přirozený logaritmus téhož čísla modulem dekadické soustavy, t. j. $\log M = \mu \mathrm{l}M$.

Příklady: Dokažte správnost vzorců:

1. $\log_b a + \log_b \frac{1}{a} = 0.$

2. $\log_b a \,.\, \log_a b = 1.$

3. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$

4. $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x \,.\, \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$ $[x = ab^{\frac{uv}{u+v}};\ u = \log_a x;\ v = \log_b x.]$