Pythagorova věta

Cvičení

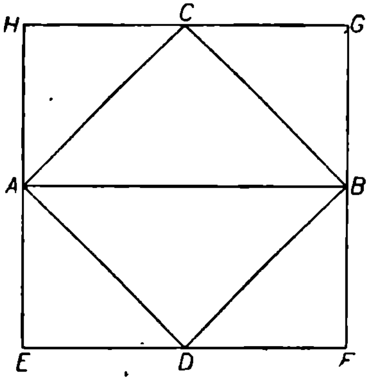
In: Stanislav Horák (author): Pythagorova věta. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 23–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402878

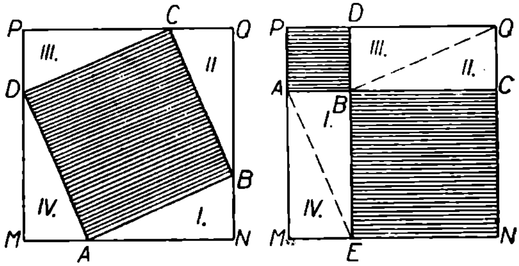
6. CVIČENÍ

1. Dokažte, že trojúhelníky o stranách a) n, $\frac{1}{2}n^2 - 1$, $\frac{1}{2}n^2 + 1$; b) n, $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$, $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$; c) $\sqrt{uv}$, $\frac{1}{2}(u - v)$, $\frac{1}{2}(u + v)$ jsou pravoúhlé. Jak musíte v případě c) voliti čísla u, v, aby trojúhelník byl pythagorejský?

2. Dokažte správnost těchto dvou tvrzení: a) 3 čísla pythagorejská obdržíme tak, že si jedno, liché, zvolíme a jeho čtverec vyjádříme jako součet 2 sčítanců lišících se o 1. Tyto 2 sčítance spolu se zvoleným číslem jsou pythagorejská čísla. b) 3 čísla pythagorejská obdržíme též tak, že si zvolíme číslo sudé a pak čtverec jeho poloviny zmenšený a zvětšený o 1 dávají spolu se zvoleným číslem čísla pythagorejská.



Obr. 11



Obr. 12

3. V obr. 11 je trojúhelník ABC pravoúhlý a rovnoramenný. Nad jeho přeponou i nad odvěsnami jsou sestrojeny čtverce $EFGH$, $ADBC$. Rozkladem těchto na shodné trojúhelníky pravoúhlé, rovnoramenné dokažte platnost P. v. (Takřka samozřejmá platnost P. v. v tomto případě vedla kromě jiných důvodů Platona k tvrzení, že i otrok bez vzdělání může P. v. pochopiti.)

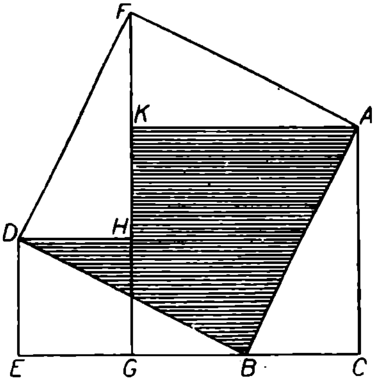
4. Od daného čtverce $MNQP$ oddělme dvěma různými způsoby 4 shodné pravoúhlé trojúhelníky tak, jak je naznačeno v obr. 12. Jednou nám zbude čtverec $ABCD$ nad přeponou, po druhé čtverce $ENCB$, $ABDP$ nad odvěsnami. Tak lze provésti důkaz P. v. Proveďte podrobně.

5. V obr. 13 jsou sestrojeny 2 shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC, BDE tak, že vrcholy C, B, E leží v jedné přímce. Nad přeponami je sestrojen čtverec

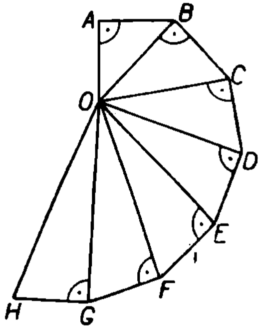
$ABDF$, nad odvěsnou $\overline{AC}$ prvního trojúhelníka je sestrojen čtverec $ACGK$ a nad odvěsnou $\overline{DE}$ druhého trojúhelníka je sestrojen čtverec $DEGH$. Dokažte, že a) přímka GHK prochází vždy bodem F; b) $DHF \cong FKA \cong BCA$; c) posléze P. v., t. j. $ABDF = ACGK + DEGH$.

6. Zvolte si 4 libovolně dlouhé úsečky $a > b > c > d$ a sestrojte a) $x = \sqrt{a^2 + bc}$; b) $y = \sqrt{ab + bc + cd}$; c) $z = \sqrt{a^2 - bc + d^2}$. (Pomocí E. v. nahradíme součiny tvaru bc čtvercem u^2.)

7. V obr. 14 jsou úsečky $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \ldots$ stejně dlouhé a úhly vyznačené při vrcholech $A, B, C, D, \ldots$ jsou pravé. Jestliže $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} =$



Obr. 13



Obr. 14

$= \overline{CD} = \ldots = 1$, pak $\overline{OB} = \sqrt{2}$, $\overline{OC} = \sqrt{3}$, $\overline{OD} = \sqrt{4}$, ... Obecně přepona v n-tém pravoúhlém trojúhelníku má délku $\sqrt{n + 1}$. Dokažte!

8. Pro přibližnou hodnotu Ludolfova čísla se někdy udává vzorec $\pi \doteq \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Sestrojte podle cvičení 7 úsečku dlouhou π cm.

9. Kolik trojúhelníků lze sestrojiti z úseček dlouhých 3, 4, 5, 8, 15, 17 cm? Kolik z nich je ostroúhlých, pravoúhlých a tupoúhlých?

10. 2 strany trojúhelníku jsou dlouhé 6,7 cm a 7,2 cm; jak dlouhá musí být 3. strana, aby proti ní ležel úhel pravý? Mezi kterými hodnotami musí být délka 3. strany, aby proti ní ležel úhel ostrý (tupý)?

11. Dovedli byste na trávníku ohraničiti wolley-balové hřiště tvaru obdélníku, když byste měli po ruce jen metrové měřítko a dostatečně dlouhý motouz? Popište přesně, jak byste si počínali.

12. Dokažte tyto věty o rovnostranném trojúhelníku: a) Čtverec sestrojený nad výškou je roven trojnásobnému čtverci nad poloviční stranou. b) Obdélník sestrojený z celé výšky a poloměru kružnice vepsané je roven čtverci nad poloviční stranou.

13. Heronův trojúhelník je takový, jehož strany i obsah jsou vyjádřeny čísly celými. Takový trojúhelník se dá prostě sestrojiti tak, že se složí ze dvou trojúhelníků pythagorejských o společné odvěsně, která se pak stane výškou tohoto trojúhelníka. Na př. pythagorejské trojúhelníky o stranách 9, 12, 15; 5, 12, 13 dají, přiložíme-li je k sobě stejně dlouhými odvěsnami, Heronův trojúhelník o stranách 13, 14, 15. Určete si sami několik takových trojúhelníků.

14. Čtverci můžeme vepsati pravidelný osmiúhelník takto: na každou stranu čtverce naneseme od vrcholu polovinu jeho úhlopříčky a tím obdržíme na stranách všech 8 vrcholů žádaného osmiúhelníka. Dokažte správnost této konstrukce výpočtem! (Z konstrukce plyne, že všechny úhly osmiúhelníka jsou stejně velké. Dále vzdálenost 2 sousedních vrcholů na téže straně čtverce je $a \,.\, (\sqrt{2} - 1)$; vzdálenost 2 sousedních vrcholů na různých stranách čtverce je $a \,.\, \sqrt{3 - 2 \,.\, \sqrt{2}}$. Oba tyto výrazy jsou si rovny.)

15. V pravoúhlém trojúhelníku o stranách a, b, c sestrojte výšku a obvody vzniklých 2 trojúhelníků vyjádřete pomocí a, b, c. Ukažte, že obvody obou těchto trojúhelníků a obvod původního tvoří strany nového trojúhelníka pravoúhlého.

16. Prof. dr K. Čupr ve své knížce „Aritmetické hry a zábavy" uvádí, že Číňané již půl třetího tisíciletí před Kristem řešili tuto úlohu: Přesně uprostřed čtvercové nádržky o straně 10 stop trčí rákosový prut jednu stopu nad vodou. Skloní-li se prut přesně k půlícímu bodu kterékoliv strany, ponoří se právě pod vodu; jak jest nádržka hluboká?

17. V téže knížce nalezneme též jinou čínskou úlohu asi z XI. stol. př. Kr.: Obvod města je kružnice; přesně na sever i jih vedou brány. Jdu-li směrem severním, dorazím ve vzdálenosti 300 stop ode zdi ke stromu, jenž se mi počíná právě ukazovati za zdí, jdu-li jižní bránou 900 stop k západu. Jaký jest průměr kružnice vyznačené ohradní zdí?

18. Dvě silnice se protínají v pravém úhlu. O kolik m byla kratší cesta polní pěšinou, která začínala 55 m a končila 65 m od křižovatky?

19. Vypočtěte obsah trojúhelníka, jestliže jsou dány 2 strany a výška příslušná ke straně třetí. (Spec. $a = 10$, $b = 17$, $v_c = 8$.)

20. Vypočtěte odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána přepona a obsah P. Spec. $c = 6{,}5$ cm, $P = 7{,}5$ cm^2.

21. Jak nutno zvoliti $a \neq 0$, aby trojúhelník o stranách $a - 1$, $a - 2$, $a - 3$ byl a) ostroúhlý, b) pravoúhlý, c) tupoúhlý.

22. Na mapě o měřítku 1 : 1 000 000 tvoří města Turnov, Jičín a Bakov nad Jizerou pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem v Turnově. Vzdálenost Turnov — Jičín je na této maně 2,3 cm a vzdálenost Jičín — Bakov 3,15 cm. Jaká je vzdálenost Turnov — Bakov na mapě i ve skutečnosti, nehledíme-li k zakřivení země?

23. Před budovou stojí telegrafní tyč ve vzdálenosti 1,6 m; hoření konec tyče je ve stejné výši s okenní římsou. Když se tyč naklonila tak, že se opírala o budovu, byl její konec 40 cm pod římsou. Jak je tyč vysoká?

24. Jak dlouhé strany má trojúhelník, jehož vrcholy jsou a) $A(6; 6)$, $B(-5; 5)$, $C(1; 0)$; b) $M(3; 3)$, $N(-1; 0)$, $P(1; 1{,}5)$?

25. Ukažte, že čtyrúhelník $ABCD$, $A(2; 8)$, $B(7; 9)$, $C(6; 3)$, $D(-\frac{3}{41}; \frac{137}{41})$, je deltoid.

26. Nad přeponou i nad oběma jejími úseky jsou sestrojeny půlkružnice, všechny na tutéž stranu. Ukažte, že obsah plochy jimi omezené je roven obsahu kruhu, který je sestrojen nad výškou jako nad průměrem.

27. Každá strana pravoúhlého trojúhelníka je rozdělena na n dílů a nad každým dílem je sestrojena půlkružnice jako nad průměrem. Dokažte, že součet obsahů všech půlkružnic nad oběma odvěsnami rovná se součtu obsahů všech půlkružnic nad přeponou.

28. Půlkružnice v předešlém příkladě nahraďte pravidelnými n-úhelníky; platí pak věta podobná větě předešlé?

29. Vypočísti délku tětivy, která jde ohniskem a) elipsy, b) hyperboly kolmo k hlavní ose.

30. Vypočísti délku tětivy, která kolmo půlí hlavní poloosu elipsy.

31. Kolem středu a) elipsy, b) hyperboly je opsána kružnice jdoucí ohnisky. Jak dlouhé jsou průvodiče průsečíků této kružnice s křivkou?

32. Vypočtěte obsah pravidelného šestiúhelníka, jestliže je dán poloměr r kružnice opsané.

33. Je-li dán poloměr kružnice pravidelnému osmiúhelníku opsané, vypočtěte jeho obsah.

34. Vypočtěte podobně obsah pravidelného dvanáctiúhelníka.

35. V pravoúhlém lichoběžníku ($a \perp d$) vypočtěte zbývající stranu a obsah, jestliže je dáno: a) $a = 10{,}3$; $b = 8{,}5$; $c = 6{,}7$; b) $a = 8{,}2$; $b = 9{,}7$; $d = 6{,}5$. c) $a = 5{,}6$; $c = 2{,}8$; $d = 4{,}5$. d) $b = 20{,}5$; $c = 8{,}4$; $d = 15{,}6$.

36. Podobně vypočítejte zbývající stranu a obsah lichoběžníka rovnoramenného (obr. 6), je-li dáno: a) $a = 320$, $b = 305$, $c = 48$; b) $a = 300$, $b = 229$, $v = 221$; c) $a = 542$, $c = 220$, $v = 240$; d) $v = 420$, $b = 421$, $c = 100$.

37. Vypočtěte délky základen rovnoramenného lichoběžníka, v němž obsah $P = 17{,}20 \text{ cm}^2$, $v = 4$ cm, $b = 4{,}1$ cm.

38. V deltoidu je dána úhlopříčka $f = 24$ a strany $a = 37$, $b = 15$. Vypočtěte jeho obsah.

39. Určiti obsah čtyrúhelníka tětivového, je-li dáno: $a = 13$, $b = 84$, $c = 36$, $\beta = 90°$.

40. Úhlopříčky různoběžníku se kolmo protínají. Ukažte, že součet čtverců nad dvěma protilehlými stranami rovná se součtu čtverců nad druhými dvěma protějšími stranami.

41. Vypočtěte vzdálenost tělesných úhlopříček kvádru od jednotlivých hran.

42. Do krychle je vepsán pravidelný čtyrstěn tak, že jeho hrany jsou stěnové úhlopříčky krychle. Určete jeho objem, jestliže hrana krychle je a.

43. V pravidelném čtyrstěnu o hraně a vypočtěte vzdálenost mimoběžných hran.

44. V pravidelném osmistěnu o hraně a vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných stěn.

45. Vypočtěte povrch koulí pravidelnému osmistěnu opsané, vepsané a dotýkající se hran.

46. V komolém jehlanu n-bokém je dáno (a, b hrany podstavné, v výška, s výška stěnová, S povrch, V objem): a) $n = 4$, $a = 14$, $b = 8$, $S = 480$; b) $n = 6$, $a = 8$, $b = 4$, $V = 168\sqrt{3}$; vypočtěte zbývající prvky.

47. V rotačním kuželi komolém je dáno (poloměry podstav r_1, r_2, výška v, strana s, povrch S, objem V, plášť P): a) $r_1 = 6$, $s = 13$, $S = 128\pi$; b) $s = 5$, $P = 60\pi$, $S = 140\pi$.

48. Koule je proťata dvěma rovnoběžnými rovinami v kružnicích o poloměrech $\varrho_1 = 8$, $\varrho_2 = 7$; vzdálenost obou řezů je 3. Vypočtěte povrch příslušné kulové vrstvy.

49. Nad každou stěnou krychle o hraně a je vztyčen pravidelný jehlan o výšce $\dfrac{a}{n}$. Vypočítejte povrch vzniklého tělesa.