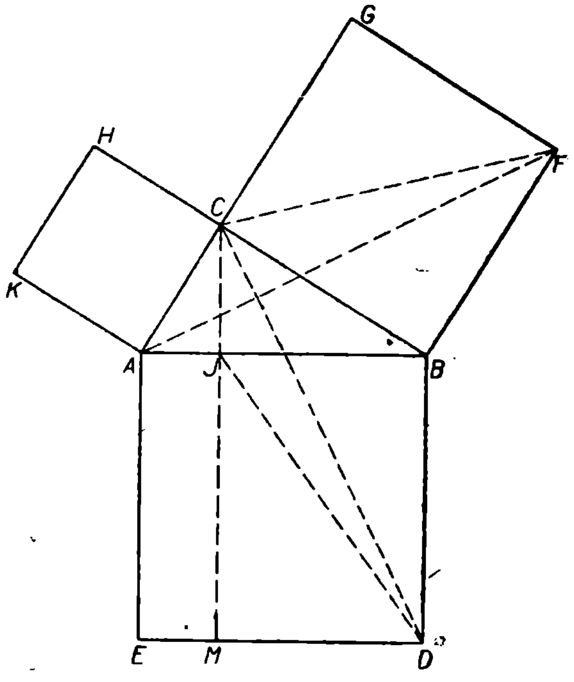
I. DŮKAZ VĚTY PYTHAGOROVY

A) *Euklidův důkaz P. v.* (*Důkaz proměnou ploch.*) Tento důkaz se opírá o větu:

Dva trojúhelníky si jsou rovny (t. j. mají tentýž obsah), jestliže se shodují v jedné straně a k ní příslušné výšce.



Obr. 1.

V obr. 1 je ABC pravoúhlý trojúhelník a nad jeho stranami jsou sestrojeny čtverce $BFGC$, $ACHK$, $AEDB$. Vrchol C spojme s bodem D a vrchol A s bodem F. Výška pravoúhlého trojúhelníka rozdělí čtverec nad přeponou na obdélníky $AEMJ$, $BJMD$. Ve čtverci $BFGC$ narýsujme posléze úhlopříčku CF. Nyní platí

$$ABF \cong DBC, \text{ neboť } \overline{AB} = \overline{DB},\ \overline{BF} = \overline{BC},$$
$$\sphericalangle ABF = 90° + \beta = \sphericalangle DBC.$$

Všimněme si, že podle prve vyslovené věty o rovnosti dvou trojúhelníků je

$$DBC = DBJ \text{ a též } BFA \doteq BFC \text{ a tudíž } DBJ = BFC.$$

Ale $DBJ = \frac{1}{2}MDBJ$ a podobně $BFC = \frac{1}{2}BFGC$ a proto $MDBJ = = BFGC$.

K tomuto výsledku můžeme připojiti jiný, který by se odvodil úplně stejným postupem: $EMJA = ACHK$. Sečtením obou těchto částečných výsledků obdržíme

$$AEDB = BFGC + ACHK.$$

Slovy vyjádřeno: *Čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka rovná se součtu čtverců nad oběma odvěsnami.*

Rovnici vyjadřující P. v. můžeme dáti jednodušší a poněkud přehlednější tvar, jestliže zavedeme, jak je zvykem, toto označení: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$. Pak dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

což je obvyklý tvar P. v. psané rovnicí.

B) *Důkaz věty obrácené.* Nyní jsme si dokázali, že pro pravoúhlý trojúhelník platí P. v. Zbývá ještě dokázati, že tato věta platí jen a jen pro trojúhelník pravoúhlý (a žádný jiný).

Abychom si věc, o níž nám teď půjde, blíže vysvětlili, uvedu zde příklad. Zvláštní případ čtyrúhelníku je lichoběžník rovnoramenný, a tomu můžeme opsati kružnici. Nyní je otázka: Můžeme opsati kružnici jen lichoběžníku rovnoramennému a žádnému jinému čtyrúhelníku nebo existuje ještě nějaký, jistě že zvláštní čtyrúhelník, jemuž se dá taky kružnice opsat? V tomto případě je odpověď snadná, neboť víme, že kružnice se dá opsati každému čtyrúhelníku tětivovému. Máme-li tedy čtyrúhelník, jemuž lze kružnici opsati, nemůžeme tvrditi, že tento čtyrúhelník je rovnoramenný lichoběžník.

A tatáž otázka se naskýtá i zde. Platí P. v. jen pro trojúhelník pravoúhlý nebo existuje ještě nějaký, jistě, že zvláštní trojúhelník, pro nějž tato věta platí? Jinak řečeno, máme-li trojúhelník, o němž platí P. v., můžeme se odvážiti tvrzení, že to je trojúhelník pravoúhlý?

My si v dalším ukážeme, že P. v. platí vskutku jen pro trojúhelník pravoúhlý a žádný jiný.

Jestliže máme nějaký trojúhelník, pak úhel γ, ležící proti straně c, může býti buď ostrý nebo tupý a nebo pravý. V tomto posledním případě platí o stranách trojúhelníka P. v. Všimněme si nyní blíže prvních dvou případů.

1. $\gamma < 90°$. Zde musíme rozlišovati 2 různé případy: γ není v daném trojúhelníku úhel největší a γ je v daném trojúhelníku úhel největší.

a) $\gamma < 90°$ a není v trojúhelníku úhlem největším. Největším úhlem je pak jiný úhel třebas α. Poněvadž $\gamma < \alpha$, musí platiti

$$c < a \text{ čili } c^2 < a^2$$

a tím spíše platí

$$c^2 < a^2 + b^2.$$

b) $\gamma < 90°$ a je to zároveň největší úhel v daném trojúhelníku. Potom výška jdoucí vrcholem B (obr. 2a) rozdělí trojúhelník na 2 trojúhelníky pravoúhlé, pro něž platí P. v. Označme tuto výšku x a úsek na straně b přilehlý straně a označme y. I platí

$$x < a \text{ a též } y < b$$

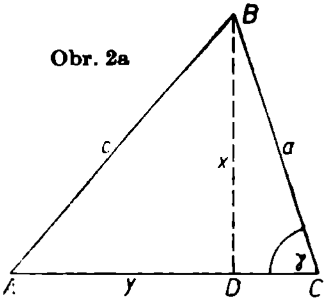
čili

$$x^2 < a^2 \text{ a též } y^2 < b^2.$$

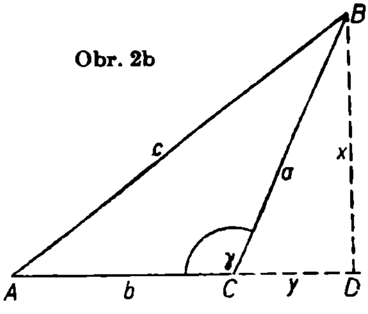
Sečtením obou těchto nerovnin dostaneme $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ čili

$$c^2 < a^2 + b^2,$$

neboť $x^2 + y^2 = c^2$. Vidíme, že o straně c platí nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$ vždy, jakmile úhel $\gamma < 90°$.



Obr. 2a



Obr. 2b

2. Předpokládejme nyní, že $\gamma > 90°$ (obr. 2b). Spusťme opět s vrcholu B výšku, kterou označíme x a vzdálenost její paty od vrcholu C označme y. Tu platí

$$c^2 = x^2 + (b + y)^2.$$

Na pravé straně této rovnice po povýšení můžeme vynechati člen $2by$ a obdržíme pak tuto nerovnost

$$c^2 > x^2 + y^2 + b^2.$$

Ale to můžeme psáti v tvaru

$$c^2 > a^2 + b^2,$$

neboť $a^2 = x^2 + y^2$. Tím jsme vlastně dokázali, že pro stranu c, která je protilehlá tupému úhlu γ platí $c^2 > a^2 + b^2$.

Nyní si zopakujme výsledky, k nimž jsme až dosud dospěli. Dokázali jsme, jestliže

$$\begin{aligned} \gamma &= 90°, \text{ platí } c^2 = a^2 + b^2, \\ \gamma &< 90°, \text{ platí } c^2 < a^2 + b^2, \\ \gamma &> 90°, \text{ platí } c^2 > a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Jiný případ již nastat nemůže a proto $P. v.$ *platí vskutku jen a jen pro trojúhelník pravoúhlý.*

2. ROZŠÍŘENÍ PYTHAGOROVY VĚTY

a) V následujícím budeme potřebovati tuto větu:
Pravidelný n-úhelník je jednoznačně určen jedním prvkem.

Nejprve si ukážeme, že tato věta platí, je-li určovacím prvkem poloměr kružnice opsané. Spojíme-li totiž jednotlivé vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem kružnice opsané, rozdělí se n-úhelník na n shodných středových trojúhelníků. Jejich úhel při středu je $\frac{4R}{n}$. Je-li tedy pravidelný n-úhelník dán poloměrem kružnice opsané, rozdělíme plný úhel při středu jejím na n stejných dílů. Ramena těchto úhlů nám vytnou na kružnici vrcholy žádaného n-úhelníku.

Je-li dán pravidelný n-úhelník jiným určovacím prvkem, sestrojíme nejprve podle předešlého libovolný pomocný pravidelný n-úhelník a pak pomocí podobnosti n-úhelník hledaný.

Pro nás má právě dokázaná věta ten význam, že z ní vyplývá, že pravidelný n-úhelník je jednoznačně určen svou stranou a_n. Potom však jeho obsah P_n je přímo úměrný čtverci této strany, t. j.

$$P_n = k_n \cdot a_n^2,$$

kde k_n je nějaké číslo závislé pouze na n a nikoliv na délce strany a_n. Tak na příklad:

$$P_3 = a_3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{tudíž } k_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P_4 = a_4^2 \qquad \text{tudíž } k_4 = 1,$$

$$P_6 = a_6^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tudíž } k_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ atd.}$$

b) Toho všeho použijeme nyní k rozšíření P. v. Rovnici

$$c^2 = a^2 + b^2$$

znásobme číslem k_n, čímž obdržíme

$$k_n c^2 = k_n a^2 + k_n b^2.$$

Ale výrazy $k_n c^2$, $k_n a^2$, $k_n b^2$ nám vlastně představují obsahy pravidelných n-úhelníků o stranách c, a, b, jež jsou mezi sebou podobné. Tím jsme dospěli k rozšířené větě Pythagorově:

Pravidelný n-úhelník nad přeponou rovná se součtu pravidelných n-úhelníků nad odvěsnami.

c) Jinou zajímavou větu dostaneme, jestliže rovnici

$$c^2 = a^2 + b^2$$

znásobíme $\frac{1}{4}$ Ludolfova čísla. Dostaneme

$$\frac{\pi}{4} c^2 = \frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2.$$

Avšak součiny $\frac{\pi}{4} c^2$, $\frac{\pi}{4} a^2$, $\frac{\pi}{4} b^2$ jsou vlastně obsahy kruhů o poloměrech $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$. Podle toho můžeme vysloviti větu, jež je novým rozšířením P. v.:

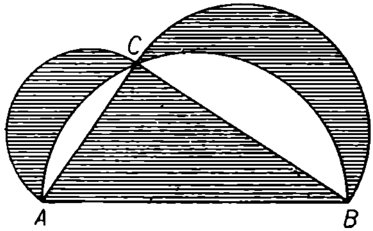
Obsah kruhu opsaného nad přeponou jako nad průměrem je roven součtu obsahů obou kruhů podobně sestrojených nad oběma odvěsnami.

d) Této věty použijeme v dalším. Starořečtí matematikové se po celá staletí snažili provésti kvadraturu kruhu. To je úloha sestrojiti čtverec (nebo jiný rovinný obrazec, který by se dal nějakým způsobem proměniti ve čtverec) téhož obsahu, jako má daný kruh. Teď již víme, že to je úloha neřešitelná. Označíme-li totiž poloměr kruhu r a stranu hledaného čtverce x, musí platiti

$$x^2 = \pi r^2 \quad \text{čili} \quad x = r\sqrt{\pi},$$

kde π je Ludolfovo číslo. O tomto číslu však teď víme, že se nedá narýsovati úsečka, jejíž délka by byla π cm. Můžeme narýsovati úsečku, jejíž délka je vyjádřena číslem velmi blízkým Ludolfovu číslu, ale naprosto přesně znázorniti toto číslo úsečkou nemůžeme. Neumíme-li sestrojiti tuto délku, tím více nám bude působiti obtíží sestrojení úsečky $\sqrt{\pi}$.

O této nesnázi však starořečtí matematikové neměli tušení a zabývali se kvadraturou kruhu velmi úsilovně. Při tom Hippokrates (pocházel z ostrova Chios a žil v 2. polovici V. st. př. Kr.) přišel na zajímavou věc, a tu si nyní vyložíme.



Obr. 3

Nad přeponou i nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku sestrojme půlkružnice tak, jak je znázorněno v obr. 3. Tak vzniknou dva obrazce tvaru měsíčků (na obr. jsou vyšrafovány) a říká se jim měsíčky Hippokratovy. Součet jejich obsahů vypočteme tak, že k obsahu trojúhelníka přičteme obsahy obou polokruhů nad odvěsnami a vzniklý součet zmenšíme o obsah polokruhu nad přeponou. Početně:

$$M = \frac{a \, . \, b}{2} + \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{\pi c^2}{8}.$$

Poslední trojčlen v tomto výrazu je podle poslední věty roven nule a výsledek je $M = \frac{1}{2} a \, . \, b$. To je však obsah daného trojúhelníka. Hippokratovi se tudíž podařila kvadratura dvou měsíčků. Je zcela pochopitelné, že Hippokrates byl tímto objevem mile překvapen a že si od toho velmi sliboval pro hlavní problém, kvadraturu kruhu.

3. VĚTY EUKLIDOVY

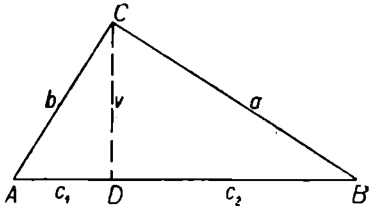
a) V pravoúhlém trojúhelníku ABC sestrojme výšku $v = \overline{CD}$. Ta nám náš trojúhelník rozdělí na dva trojúhelníky pravoúhlé. Pro trojúhelník ACD platí věta Pythagorova (obr. 4):

$$c_1^2 = b^2 - v^2.$$

Pro obsah pravoúhlého trojúhelníka platí dva vzorce

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2},$$

z čehož plyne $v = \frac{a \cdot b}{c}$. Dosadíme-li tuto hodnotu do předchozí rovnice, dostaneme po úpravě $c_1^2 = \frac{b^4}{c^2}$. Zbavíme-li se zlomku a odmocníme, dospějeme k rovnici



Obr. 4

$$c_1 c = b^2.$$

(Rovnice $c_1 c = -b^2$ nemá zde významu.) Toto je již Euklidova věta o odvěsně, které také říkáme 1. věta Euklidova. Vyjádříme ji slovy:

Čtverec nad odvěsnou rovná se obdélníku sestrojenému z přepony a přilehlého úseku.

b) Z obrázku snadno vyčteme, že platí tyto rovnice:

$$c_1^2 = b^2 - v^2,$$
$$c_2^2 = a^2 - v^2.$$

Jejich sečtením dojdeme k rovnici

$$c_1^2 + c_2^2 = a^2 + b^2 - 2v^2,$$

kterou můžeme takto upraviti

$$(c_1 + c_2)^2 - 2c_1c_2 = c^2 - 2v^2$$

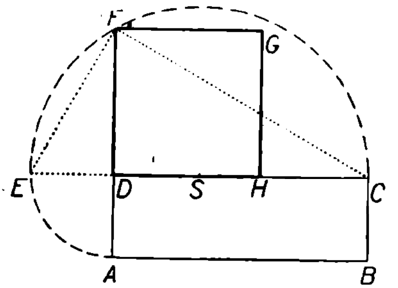
čili

$$c_1 c_2 = v^2.$$

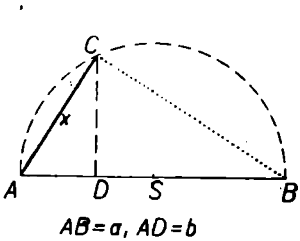
Tak jsme dospěli k Euklidově větě o výšce (t. zv. 2. E. v.), jež vyjádřena slovy zní:

Čtverec nad výškou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku sestrojenému z obou úseků přepony.

c) Vět Euklidových se používá v 1. řadě k proměně obdélníka na čtverec. V obr. 5a je tato úloha provedena na základě 2. E. v. Obdélník $ABCD$ je dán, čtverec $DFGH$ je výsledek. Jakýsi „most" mezi daným a výsledkem je pravoúhlý trojúhelník ECF, jenž je určen svými úseky na přeponě (jsou rovny stranám daného obdélníka). Tedy přepona $\overline{EC} = \overline{AD} + \overline{DC}$. K určení 3. vrcholu použijeme známé věty o obvodovém úhlu nad průměrem (věta Thaletova).



Obr. 5a



Obr. 5b

Jiné užití E. v. spočívá v grafickém určení 3. měřické úměrné. Mějme na př. sestrojiti úsečku $x = \sqrt{ab}$. V obr. 5b je řešení provedeno pomocí 1. E. v. Je tam sestrojen pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je rovna délce a a jeden úsek na ní je roven b. Odvěsna $\overline{AC}$ pravoúhlého trojúhelníka, jehož 3. vrchol je sestrojen opět pomocí Thaletovy věty, přilehlá k danému úseku, je hledaná délka x.

d) Ukázali jsme si, že E. v. se dají odvoditi z P. v., ale dají se též odvoditi přímo. P. v., která se může odvoditi přímo (viz na př. cvič. 4 a 5) se dá vyvoditi z E. v. Tímto způsobem byla P. v. vlastně dokázána v textu, ale pro zopakování uvedu tentýž důkaz početně. Podle E. v. platí

$$a^2 = c \cdot c_2,$$
$$b^2 = c \cdot c_1.$$

Sečtením obou těchto rovnic obdržíme P. v.

Zopakujme si nyní, co víme o důkazech těchto vět. Na jedné straně máme větu Euklidovu a na druhé větu Pythagorovu. O nich víme toto:

1. E. v. se dají odvoditi přímo, t. j. bez znalosti P. v. a P. v. se dá též odvoditi přímo, t. j. bez znalosti E. v.

2. Když už známe E. v., můžeme z nich vyvoditi P. v. a obráceně ze znalosti P. v. plyne platnost E. v.

Tyto vlastnosti jsou stručně vyjádřeny větou:

P. v. je rovnocenná (ekvivalentní) větám E. a obráceně, každá E. v. je rovnocenná P. v.

Prakticky to znamená, že bychom v geometrii vystačili s jedinou z těchto tří vět, ale mnohé úlohy by pak vyžadovaly při řešení velmi umělých obratů a proto používáme vět všech.

4. POUŽITÍ PYTHAGOROVY VĚTY

1. Jsou dány 4 čtverce o stranách a, b, c, d. Sestrojte nový čtverec o straně x tak, aby jeho obsah $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$.

Sestrojíme nejprve čtverec o straně y, která je dána rovnicí $y^2 = a^2 + b^2$. To je bezprostřední aplikace P. v. Sestrojíme totiž pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách a, b a přepona je y. Potom úplně stejným způsobem sestrojíme čtverec $z^2 = y^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Nakonec sestrojíme $x^2 = z^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$. Stane se tak pomocí pravoúhlého trojúhelníka daného přeponou z a odvěsnou d. Druhá odvěsna je pak strana hledaného čtverce.

2. Délky stran trojúhelníka jsou a) 33, 56, 67; b) 28, 45, 51; c) 48, 55, 73. Rozhodněte, zda trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý.

Jestliže trojúhelník má úhel pravý, pak musí ležeti proti nejdelší straně. (Proč?) Tuto nejdelší stranu označíme c, zbývající 2 strany budou a, b.

a) $c^2 = 67^2 = 4489$, $a^2 + b^2 = 4225$.

Tudíž $c^2 > a^2 + b^2$ a trojúhelník je tupoúhlý.

b) $c^2 = 2601$, $a^2 + b^2 = 2809$.

Poznáváme, že $c^2 < a^2 + b^2$ a trojúhelník je ostroúhlý.

c) $c^2 = 5329$, $a^2 + b^2 = 5329$ a trojúhelník je pravoúhlý, neboť $c^2 = a^2 + b^2$.

Nejčastěji se však používá P. v. k vypočítávání délek. Některé výsledky takto získané si pak musíme pamatovati jako vzorce. Pro zopakování si je souhrnně napíšeme:

úhlopříčka čtverce $e = a\sqrt{2}$,
výška rovnostranného trojúhelníku $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$,
tělesová úhlopříčka kvádru $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,
tělesová úhlopříčka krychle $u = a\sqrt{3}$.

Na následujících příkladech si teď ukážeme, jak se dá P. v. použíti v případech jiných.

3. Je dán obsah P a strana a kosočtverce; vypočtěte jeho úhlopříčky e, f.

Poněvadž se úhlopříčky kolmo půlí, platí

$$a^2 = (\tfrac{1}{2}e)^2 + (\tfrac{1}{2}f)^2$$

a k tomu připíšeme vzorec pro obsah kosočtverce

$$P = \tfrac{1}{2}ef.$$

Rovnice přepíšeme na tvar

$$e^2 + f^2 = 4a^2,$$
$$2ef = 4P.$$

Sečtením obou rovnic a odmocněním:

$$e + f = 2\sqrt{a^2 + P}.$$

Poněvadž nám jde o délky úhlopříček, můžeme vzíti odmocninu kladně. Podobně odečtením a odmocněním

$$e - f = \pm\, 2\sqrt{a^2 - P}.$$

Z těchto dvou rovnic snadno dostaneme

$$e = \sqrt{a^2 + P} \pm \sqrt{a^2 - P},$$
$$f = \sqrt{a^2 + P} \mp \sqrt{a^2 - P}.$$

Vidíme, že úloha je možná, jen když $a^2 \geqq P$.

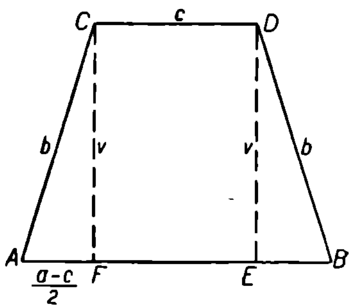
4. V lichoběžníku rovnoramenném jsou dány obě základny a, c a rameno b. Vypočtěte jeho obsah.

Z vrcholů C, D (obr. 6) spusťme kolmice na dolní základnu. Tím se celý lichoběžník rozdělí na obdélník $CDEF$ a 2 shodné trojúhelníky pravoúhlé AFC, BED. Platí pro ně tedy P. v., t. j.

$$b^2 = v^2 + \tfrac{1}{4}(a - c)^2.$$

Odtud se dá vypočísti výška a pak žádaný obsah.

Poznámka. Podobně se dá vypočítati výška i v lichoběžníku pravoúhlém.



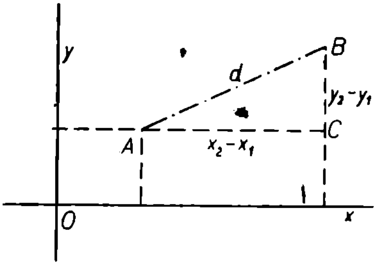
Obr. 6

5. V pravoúhlé soustavě sou-

řadnicové o osách x, y jsou dány 2 body $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Vypočtěte jejich vzdálenost.

Danými body veďme rovnoběžky s osami, jak je narýsováno v obr. 7 a tím nám vznikne pravoúhlý trojúhelník ABC o odvěsnách $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$; přepona je hledaná délka d. Podle P. v. máme hned

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Obr. 7

Jak se změní tento vzorec, jestliže bod A leží v počátku souřadnic?

6. Vypočísti délku tětivy v elipse, která kolmo půlí vedlejší poloosu. (Poloosa hlavní je a, vedlejší b, lin. výstřednost e.)

Hledanou tětivu označme $\overline{MN} = 2x$ (obr. 8), průvodiče bodu M označme $y = \overline{F_1M}$, $\overline{F_2M} = 2a - y$, délka kolmice spuštěné z bodu M na hlavní osu $\overline{MP} = \frac{1}{2}b$, úsečka $\overline{SP} = x$. Z obrázku vidíme, že tam jsou 2 pravoúhlé trojúhelníky F_1PM o stranách y, $x - e$, $\frac{1}{2}b$ a trojúhelník F_2PM o stranách $2a - y$, $x + e$, $\frac{1}{2}b$. Pro ně platí P. v.:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + (x - e)^2,$$
$$(2a - y)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + (x + e)^2.$$

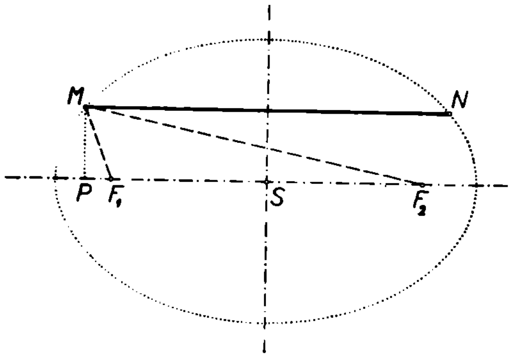
Odečtením obou rovnic přijdeme k rovnici

$$ex + ay = a^2.$$

Z ní vypočteme y a dosadíme do některé z prvních dvou rovnic a obdržíme

$$x = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Tětiva má pak délku dvojnásobnou.

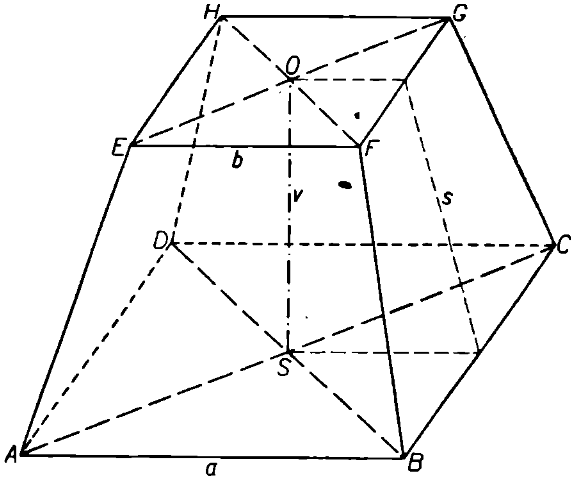


Obr. 8

7. Povrch pravidelného komolého jehlanu čtyrbokého je 8640 cm², výška je 21 cm a hrany podstavné jsou v poměru 3 : 1. Vypočtěte délky podstavných hran a objem tělesa.

Hranu dolní podstavy označme a, horní podstavy b, výšku tělesa v a výšku stěnovou s. Pak platí (obr. 9)

$$a^2 + b^2 + 2s(a + b) = 8640,$$
$$s^2 = 21^2 + \tfrac{1}{4}(a - b)^2 \text{ (je to P. v.)},$$
$$a = 3k, \; b = k.$$



Obr. 9

Vyloučíme-li z těchto 4 rovnic neznámé a, b, s, dojdeme k rovnici

$$k^4 - 5584k^2 + 1440^2 = 0.$$

Z ní již snadno dostaneme

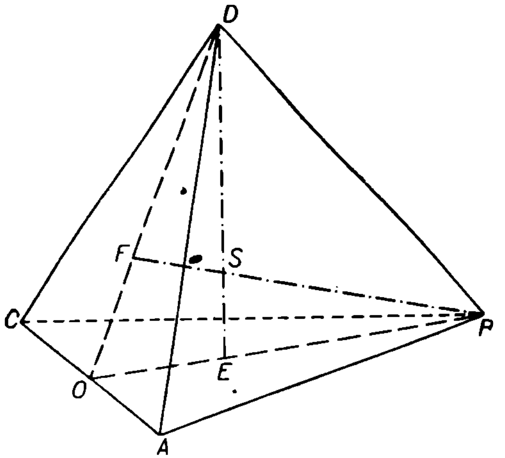
$$k_{1,2} = \sqrt{5184} = \pm\ 72,$$
$$k_{3,4} = \sqrt{400} = \pm\ 20.$$

Záporné kořeny nemají v našem případě význam a kořen $+72$ nevyhovuje, jak se můžeme přesvědčiti, vypočteme-li na základě této hodnoty povrch tělesa. I zbývá jedině kořen $k = +\ 20$. Potom $a = 60$ cm, $b = 20$ cm, a objem $V = 36\ 400\ \text{cm}^3$.

8. Vypočtěte poloměr koule a) vepsané, b) opsané pravidelnému čtyrstěnu o hraně a.

Tělesná výška $\overline{ED} = v$ čtyrstěnu se skládá ze dvou částí (obr. 10): z poloměru koule vepsané $\varrho = \overline{ES}$ a z poloměru koule opsané $r = \overline{SD}$. Tedy

$$v = r + \varrho. \tag{1}$$



Obr. 10

Ale v můžeme vypočítati pomocí P. v. z pravoúhlého trojúhelníku BED, v němž $\overline{BD} = a$, $\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BO} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Tudíž

$$v^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

Nyní můžeme na pravoúhlý trojúhelník BES použíti P. v. ($\overline{BS} = r$, $\overline{SE} = \varrho$, $\overline{BE} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$):

$$r^2 = \varrho^2 + (\tfrac{1}{3}a\sqrt{3})^2.$$

Použijeme-li dále rovnice (1), pak po kratším výpočtu dojdeme k výsledku

$$\varrho = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6},\ r = v - \varrho = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6} = 3\varrho.$$

5. DOSLOV

Na několika příkladech jsme si ukázali, jak lze použíti P. v. a v následujícím odstavci máte příležitost sami si ověřit její použitelnost a tím dokázat její důležitost. Tím však zdaleka nejsou vyčerpány všechny možnosti jejího použití. V goniometrii se ukazuje, že i zde P. v. nalézá své uplatnění. Tomu, kdo již něco z této části geometrie zná, chci připomenouti, že na př. vztahy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ jsou v podstatě P. větou. A ten, kdo zná aspoň základy diferenciálního počtu, ví, že diferenciál ds oblouku každé křivky je dán rovnicí $ds^2 = dx^2 + dy^2$, což je opět P. v.

Ale nejen to. Měli jsme, že vzdálenost d dvou bodů v rovině je dána vzorcem $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, kde x_1, y_1, x_2, y_2 jsou souřadnice krajních bodů úsečky d. Když obráceně předpokládáme, že vzdálenost dvou bodů, jež jsou dány svými souřadnicemi $x_1, y_1; x_2, y_2$, je vyjádřena prve napsaným vzorcem, pak je to charakteristická známka té geometrie, kterou se zabýváme na našich školách i v běžné praxi (vyměřování pozemků a pod.). Této geometrii říkáme g. euklidovská. (Podrobnější rozbor by přesahoval rámec této knížky.) Tím ovšem se nám pak P. v. jeví jako jeden ze základních sloupů celé naší (euklidovské) geometrie.